Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ЖЕСТКОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРИВИЗНЫ, ГРАНИЦА КОТОРЫХ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПАРАЛЛЕЛЬЮ

И. ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Получены достаточные условия жесткости некоторых классов (односвязных и многосвязных) поверхностей вращения знакопеременной гауссовой кривизны, граница которых удовлетворяет определенным условиям.

1. Бесконечно малые (б. м.) изгибания поверхностей знакопеременной гауссовой кривизны мало исследованы. Среди известных нам таких исследований для поверхностей вращения почти все касаются либо замкнутых поверхностей вращения [1—6], либо незамкнутых, граница которых составлена из параллелей [6—12]. Только работа [13] является исключением в этом отношении — в ней доказывается жесткость поверхности, которая получается из тора удалением куска отрицательной кривизны с границей специального вида.

В настоящей работе даются достаточные условия жесткости некоторых классов поверхностей вращения, граница которых не является параллелью и лежит в поясе отрицательной кривизны (точные утверждения см. в п. 2).

2. Пусть задана кривая

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \mathbf{c}:\ & x^1=\zeta(u),\\ & x^2=r(u),\, u\in[0,U_c],\ u\text{ — длина дуги, } \zeta(u),\ r(u)\in C[0,U_c],\ r(u)>0 \text{ в } (0,U_c). \end{aligned}$$

При вращении линии c вокруг оси Ox^1 получаем поверхность

$$\text{(2)}\qquad S: x(u,v)=r(u)\,.\,a(v)+\zeta(u)\,.\,e,\quad (u,v)\in D=[0,U_c]\times[0,2\pi),$$

где e — единичный вектор оси Ox^1, а $a(v)$ — единичный вектор, перпендикулярный к Ox^1 и повернутый на угол v от плоскости Ox^1x^2, т. е. $a(0,\ \cos v,\ \sin v)$.

А. Пусть меридиан c — незамкнутая кривая, т. е. $c(0)\neq c(U_c)$. Рассматриваем следующие поверхности: односвязную поверхность S_a с границей $\partial S_a=\Gamma_1$ (точка $(\zeta(0),0,0)$ является полюсом S_a); двусвязная поверхность S_δ с границей $\partial S_\delta=c_0\cup\Gamma_1$: двусвязная поверхность S_b с границей $\partial S_b=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. При этом: параллель $c_0: u=u_0$, $0<u_0<u_1$; $\Gamma_1(\Gamma_2)$ — кусочно-гладкая простая замкнутая кривая, лежащая на поясе $S_{u_1u_2}(S_{u_3u_4})$, которая негомотопна нулю на $S_{u_1u_2}(S_{u_3u_4})$; пояс $S_{u_1u_2}(S_{u_3u_4})$ поверхности S заключен между параллелями $c_1: u=u_1$ и $c_2: u=u_2$, $0<u_1<u_2\leq U_c/c_3: u=u_3$ и $c_4: u=u_4$, $0<u_3<u_4$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 11, 1985, с. 330—340.

$<u_1$), $r(u)$, $\zeta(u)\in C^3[u_1, u_2]$($r(u)$, $\zeta(u)\in C^3[u_3, u_4]$) и гауссова кривизна $K|_{\overline{S}_{u_1u_2}}<0$ ($K|_{\overline{S}_{u_3u_4}}<0$). Заметим, что поверхности S_a, S_δ и S_b получаются из поверхности S при помощи удаления некоторых частей.

Б. Пусть меридиан c — замкнутая кривая, т. е. $c(0)=c(U_c)$, $r(0)\neq 0$ и из пояса $S_{u_1u_2}$($0<u_1<u_2\leq U_c$, $r(u)$, $\zeta(u)\in C^3[u_1, u_2]$, $K|_{\overline{S}_{u_1u_2}}<0$) поверхности S удалено конечное число кусков поверхностей S_i, $i=1, \ldots, q$, где границы ∂S_i кусочно-гладкие и $\partial S_{i_1}\cap\partial S_{i_2}=\varnothing$ при $i_1\neq i_2$. Рассматриваем многосвязную поверхность $S_\Gamma=S\setminus\bigcup_{i=1}^{q}S_i$, $\partial S_\Gamma=\bigcup_{i=1}^{q}\partial S_i$.

Предположим, что: 1) меридиан с поверхности S_a(S_δ, S_b, S_Γ) принадлежит кусочно классу C^1 в $(0, u_1)$ ((u_0, u_1), (u_4, u_1), $[0, U_c]\setminus[u_1, u_2]$), и его точки излома получаются при $\overline{u}_i$, $i=1, \ldots, p$; 2) функция $\zeta'(u)$ может иметь только изолированные нули в $[0, U_c]$; 3) существует число $\widetilde{u}_0\in(0, u_1]$ для S_a ($\widetilde{u}_0\in[u_0, u_1]$ для S_δ, $\widetilde{u}_0\in[u_4, u_1]$ для S_b, $\widetilde{u}_0\in[0, U_c]\setminus(u_1, u_2)$ для S_Γ) такое, что: 3а) при поверхности S_a, S_δ и S_b для каждого нуля $u^*\geq\widetilde{u}_0$ ($u^*\leq\widetilde{u}_0$) функции $\zeta'(u)$ существует достаточно малое число $\delta>0$, для которого функция $|\zeta'(u)|$ не убывающая (невозрастающая) в $[u^*, u^*+\delta]$ ($[u^*-\delta, u^*]$) 3б) при поверхности S_Γ, если $0\leq\widetilde{u}_0<u_1$, соответственно $u_2<\widetilde{u}_0\leq U_c$, то для каждого нуля $u^*\in[\widetilde{u}_0, u_1)$($u^*\in(0, \widetilde{u}_0]$ и $u^*\in(u_2, U_c]$), соответственно $u^*\in[\widetilde{u}_0, U_c)$ и $u^*\in[0, u_1)$($u^*\in(u_2\widetilde{u}_0]$), функции $\zeta'(u)$ существует достаточно малое число $\delta>0$, для которого функция $|\zeta'(u)|$ неубывающая (невозрастающая) в $[u^*, u^*+\delta]$ ($[u^*-\delta, u^*]$). При этом если u^* — внутренняя точка интервала $[\overline{u}_i, \overline{u}_{i+1}]$, $i=0, \ldots, p$ ($\overline{u}_0=0$, $\overline{u}_{p+1}=u_1$ для S_a; $\overline{u}_0=u_0$, $\overline{u}_{p+1}=u_1$ для S_δ; $\overline{u}_0=u_4$, $\overline{u}_{p+1}=u_1$ для S_b; $\overline{u}_0=u_2$, $\overline{u}_{p+1}=u_1$ для S_Γ), то $[u^*, u^*+\delta]\subset(\overline{u}_i, \overline{u}_{i+1})$ ($[u^*-\delta, u^*]\subset(\overline{u}_i, \overline{u}_{i+1})$), а если $u^*=\overline{u}_i$ ($\overline{u}_i$ — некоторая точка излома меридиана) и $\zeta'^{+}(u^*)=0$ ($\zeta'^{-}(u^*)=0$), то $[u^*, u^*+\delta]\subset[\overline{u}_i, \overline{u}_{i+1})$ ($[u^*-\delta, u^*]\subset(\overline{u}_{i-1}, \overline{u}_i]$).

Границу Γ двукратно гладкой поверхности S, для которой гауссовая кривизна $K|_\Gamma<0$, будем называть допустимой первого типа, если она кусочно-гладкая, и обе асимптотические линии, выходящие из каждой точки P границы Γ, не пересекают ее в другой точке, кроме случая совпадения этой линии или ее дуги с началом P с границей Γ целиком [13].

Границу Γ двукратно гладкой поверхности S, для которой гауссовая кривизна $K|_\Gamma<0$, будем называть допустимой второго типа [5], если она составлена из конечного числа гладких дуг, каждая из которых является либо асимптотической, либо неасимптотической γ_k, $k=1, \ldots, m$, для которой: а) обе асимптотические линии, выходящие из каждой точки γ_k, не пересекают ее в другой точке; б) имеется две асимптотические линии поверхности (из разных систем), выходящие из концов γ_k, которые вместе с γ_k загораживают треугольную область (для краткости будем называть ее асимптотическим треугольником), принадлежащую поверхности S.

При предположении, что поле U б. м. изгибания принадлежит классу C^1 на гладких кусках поверхности и классу C на всей поверхности, имеет место

Теорема 1. *Поверхность S_a(S_δ, S_b, S_Γ), граница Γ_1(Γ_1, Γ_1 и Γ_2, $\bigcup_{i=1}^{q}\partial S_i$) которой является допустимой первого типа, жестка, если параллель $\widetilde{c}_0: u=\widetilde{u}_0$ закреплена, т. е. если поле U удовлетворяет условию*

(3) $$U|_{\widetilde{C}_0}=0.$$

Пусть теперь поверхность $S_a(S_\delta, S_b)$ удовлетворяет вместо предположения 3) предположение 3′) для каждого нуля $u^*<u_1$ функции $\zeta'(u)$ существует достаточно малая окрестность $[u^*-\delta, u^*]$, $\delta>0$, в которой функция $|\zeta'(u)|$ невозрастающая. При этом если u^* — внутренняя точка интервала $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}]$, $i=0,\ldots,p$, $\bar{u}_0=0$, $\bar{u}_{p+1}=u_1$ для $S_a/\bar{u}_0=u_0$, $\bar{u}_{p+1}=u_1$ для S_δ; $\bar{u}_0=u_4$, $\bar{u}_{p+1}=u_1$ для S_b), то $[u^*-\delta, u^*]\subset(\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$, а если $u^*=\bar{u}_i$ и $\zeta'^{-}(u^*)=0$, то $[u^*-\delta, u^*]\subset(\bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i]$.

Пусть граница Γ_1 поверхности $S_a(S_\delta, S_b)$ является допустимой второго типа. Обозначим через $\Gamma_1^1(\Gamma_1^2)$ ту часть границы Γ_1, которая составлена из асимптотических дуг, принадлежащих системе асимптотических линий систем $G^1(G^2)$ поверхности. При помощи линий систем G^2 (G^1), выходящих из точек Γ_1^1 (Γ_1^2), часть $\Gamma_1^1(\Gamma_1^2)$ границы Γ_1 распадается на пары противоположных поддуг a_i^1 и $a_i^{1'}$, $i=1,\ldots,s_1$ (a_i^2 и $a_i^{2'}$, $i=1,\ldots,s_2$) и поддуги b_j^1, $j=1,\ldots,m_1$ (b_j^2, $j=1,\ldots,m_2$) (см. (13) и рис. 1), т. е.

$$\Gamma_1^l=(\bigcup_{i=1}^{s_l}(a_i^l\cup a_i^{l'}))\cup(\bigcup_{j=1}^{m_l}b_j^l),\quad l=1,\ 2.$$

Обозначим через c_k^1 и c_k^2 асимптотические дуги — границы треугольной области, построенной к неасимптотической дуге γ_k из Γ_1, где $c_k^1\in G^1$, $c_k^2\in G^2$, $k=1,\ldots,m$, а через $c_k^{1'}$ $(c_k^{2'})$ проекцию c_2^1 (c_k^2) на Γ_1^1 (Γ_1^2), полученную при помощи системы G^2 (G^1). Очевидно $c_k^{1'}$ $(c_k^{2'})$ при этом проектировании может быть образом всей дуги c_k^1 (c_k^2) или ее части, а не выключено и быть пустым множеством.

Рассматриваем часть $\Gamma_1^*=\Gamma_1^{1*}\cup\Gamma_1^{2*}$ границы Γ_1 поверхности S_a (S_δ, S_b), где (см. (13) и рис. 1)

$$\Gamma_1^{l*}=\Gamma_1^l\cap[(\bigcup_{k=1}^{m}(c_k^l\cup c_k^{l'}))\cup(\bigcup_{i=1}^{s_l}a_i^{l'})],\quad l=1,\ 2.$$

Очевидно

$$\Gamma_1\setminus\Gamma_1^*=(\bigcup_{j=1}^{t_1}d_j^1)\cup(\bigcup_{j=1}^{t_2}d_j^2)\cup(\bigcup_{i=1}^{S_1}a_i^1)\cup(\bigcup_{i=1}^{S_2}a_i^2)\cup(\bigcup_{k=1}^{m}\gamma_k),$$

где d_j^1, $j=1,\ldots,t_1$ (d_j^2, $j=1,\ldots,t_2$) — дуги из Γ_1^1 (Γ_1^2), которые получаются при помощи b_j^1, $j=1,\ldots,m_1$ (b_j^2, $j=1,\ldots,m_2$) и $\cup_{k=1}^{m}(c_k^1\cup c_k^{1'})$ $(\cup_{k=1}^{m}(c_k^2\cup c_k^{2'})$, т. е.

$$\bigcup_{j=1}^{t_l}d_j^l=(\bigcup_{i=1}^{m_l}b_j^l)\setminus\{(\bigcup_{j=1}^{m_l}b_j^l)\cap[\bigcup_{k=1}^{m}(c_k^l\cup c_k^{l'})]\},\quad l=1,\ 2.$$

При предположении, что поле U б. м. изгибания принадлежит классу C^1 на гладких кусках поверхности и классу C на всей поверхности, имеют место:

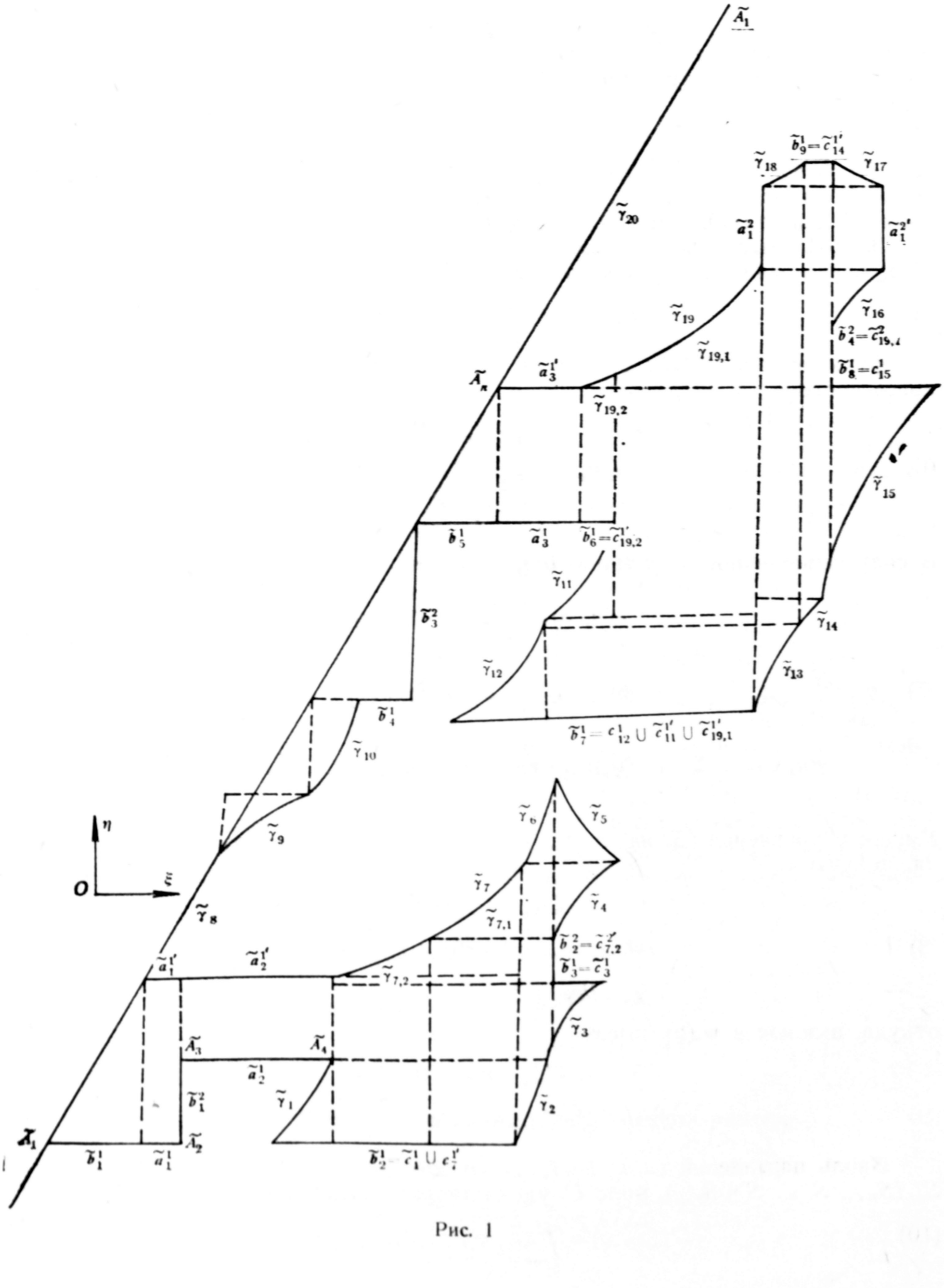
$\tilde{A}_1$
$\tilde{b}_9^1=\tilde{c}_{14}^{1'}$
$\tilde{\gamma}_{18}$
$\tilde{\gamma}_{17}$
$\tilde{\gamma}_{20}$
$\tilde{a}_1^2$
$\tilde{a}_1^{2'}$
$\tilde{\gamma}_{16}$
$\tilde{\gamma}_{19}$
$\tilde{b}_4^2=\tilde{c}_{19,1}^2$
$\tilde{\gamma}_{19,1}$
$\tilde{b}_8^1=c_{15}^1$
$\tilde{A}_n$
$\tilde{a}_3^{1'}$
$\tilde{\gamma}_{19,2}$
$\tilde{\gamma}_{15}$
$\tilde{b}_5^1$
$\tilde{a}_3^1$
$\tilde{b}_6^1=\tilde{c}_{19,2}^{1'}$
$\tilde{\gamma}_{11}$
$\tilde{b}_3^2$
$\tilde{\gamma}_{14}$
$\tilde{\gamma}_{12}$
$\tilde{\gamma}_{13}$
$\tilde{b}_4^1$
$\tilde{b}_7^1=c_{12}^1\cup\tilde{c}_{11}^{1'}\cup\tilde{c}_{19,1}^{1'}$
$\tilde{\gamma}_{10}$
$\tilde{\gamma}_6$
$\tilde{\gamma}_5$
η
$\tilde{\gamma}_9$
O
ξ
$\tilde{\gamma}_7$
$\tilde{\gamma}_8$
$\tilde{\gamma}_4$
$\tilde{\gamma}_{7,1}$
$\tilde{b}_2^2=\tilde{c}_{7,2}^{2'}$
$\tilde{a}_1^{1'}$
$\tilde{a}_2^{1'}$
$\tilde{\gamma}_{7,2}$
$\tilde{b}_3^1=\tilde{c}_3^1$
$\tilde{A}_3$
$\tilde{A}_4$
$\tilde{\gamma}_3$
$\tilde{a}_2^1$
$\tilde{\gamma}_1$
$\tilde{b}_1^2$
$\tilde{\gamma}_2$
$\tilde{A}_1$
$\tilde{A}_2$
$\tilde{b}_1^1$
$\tilde{a}_1^1$
$\tilde{b}_2^1=\tilde{c}_1^1\cup c_7^{1'}$

Рис. 1

Теорема 2. *Поверхность S_a (S_δ), граница Γ_1 (Γ_1) которой является допустимой второго типа, жестка, если поле U б. м. изгибания удовлетворяет краевому условию*

$$U|_{\Gamma_1 \setminus \Gamma_1^*}=0. \tag{4}$$

Теорема 3. *Поверхность S_b, граница Γ_1 которой является допустимой второго типа, а Γ_2 — допустимой первого типа, жестка, если поле U б. м. изгибания удовлетворяет краевому условию* (4).

3. Доказательство теоремы 1. На поясе S_{0u_1} ($S_{u_0u_1}$, $S_{u_3u_1}$, $S \setminus S_{u_1u_2}$) поле U б. м. изгибания имеет представление [3]

$$U=\alpha(u, v)\,.\,e+\beta(u, v)\,.\,a+\gamma(u, v)\,.\,a', \tag{5}$$

где функции $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ удовлетворяют на регулярных кусках пояса системе

$$\begin{gathered}\zeta'\alpha_u+r'\beta_u=0,\\ \zeta'\alpha_v+r'(\beta_v-\gamma)+r\gamma_u=0,\\ \beta+\gamma_v=0.\end{gathered} \tag{6}$$

В силу периодичности функции $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ по v имеем

$$\begin{gathered}\alpha(u, v)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv}\varphi_k(u),\\ \beta(u, v)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv}\chi_k(u),\\ \gamma(u, v)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikv}\psi_k(u), \quad \text{где} \quad \varphi_{-k}=\bar{\varphi}_k, \quad \chi_{-k}=\bar{\chi}_k, \ \psi_{-k}=\bar{\psi}_k.\end{gathered} \tag{7}$$

Умножая уравнения (6) на e^{-ikv}, $-\infty<k<\infty$, и интегрируя по v от 0 до 2π, получаем

$$\begin{gathered}\zeta'\varphi_k'+r'\chi_k'=0,\\ ik\zeta'\varphi_k+ikr'\chi_k-r'\psi_k+r\psi_k'=0,\\ \chi_k+ik\psi_k=0, \quad -\infty<k<\infty,\end{gathered} \tag{8}$$

откуда, выключая $\psi_k(u)$, имеем

$$\begin{gathered}\zeta'\varphi_k'+r'\chi_k'=0,\\ r\chi_k'+r'(k^2-1)\chi_k+k^2\zeta'\varphi_k=0, \quad k\neq 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Вдоль параллелей $u=\bar{u}_i$, $i=1, \ldots, p$, которые являются ребрами пояса S_{0u_1}($S_{u_0u_1}$, $S_{u_4u_1}$, $S \setminus S_{u_1u_2}$), поле U удовлетворяет условиям

$$U^+(\bar{u}_i, v)=U^-(\bar{u}_i, v), \quad i=1, \ldots, p, \tag{10}$$

где $U^+(\overline{u}_i, v)(U^-(\overline{u}_i, v))$ — значение поля $U(u, v)$ на $S_{\overline{u}_i \overline{u}_{i+1}}(S_{\overline{u}_{i+1}\overline{u}_i})$ вдоль $u=\overline{u}_i$. Из (7) видно, что равенства (10) эквивалентны равенствам

(10′) $\varphi_k^+(\overline{u}_i)=\varphi_k^-(\overline{u}_i)$, $\chi_k^+(\overline{u}_i)=\chi_k^-(\overline{u}_i)$, $\psi_k^+(\overline{u}_i)=\psi_k^-(\overline{u}_i)$, $i=1, \ldots, p$, $-\infty<k<\infty$.

Для решений системы (9) при предположении, что функции $r(u)$, $\zeta(u)$ $\in C^1[\widetilde{u}_0, u']$, $[\widetilde{u}_0, u']\subset(0, U_e]$, и поле $U(u, v)\in C^1(S_{\widetilde{u}_0 u'})$, имеет место [7].

Л е м м а 1 (Т. М и н а г а в а, Т. Р а д о). *Пусть $r(u)>0$ при $u\in[\widetilde{u}_0, u')$, $\zeta'(u)\neq 0$ при $u\in(\widetilde{u}_0, u')$ и если $\zeta'(\widetilde{u}_0)=0$, то существует число $\delta>0$, такое, что в $[\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_0+\delta]\subset[\widetilde{u}_0, u']$ функция $|\zeta'(u)|$ неубывающая. Тогда, если*

$$\chi_k(u)\,|_{u=\widetilde{u}_0}=\varphi_k(u)\,|_{u=\widetilde{u}_0}=0, \quad \text{то} \quad \chi_k(u)\equiv\varphi_k(u)\equiv 0 \ \text{ в } [\widetilde{u}_0, u'].$$

Пусть $c_{\alpha_1}: u=\alpha_1$, $u_1\leqq\alpha_1<u_2$ и $c_{\beta_1}: u=\beta_1$, $u_1<\beta_1\leqq u_2$ ($c_{\gamma_1}: u=\gamma_1$, $u_3\leqq\gamma_1<u_4$ и $c_{\delta_1}: u=\delta_1$, $u_3<\delta_1\leqq u_4$) являются самой левой и самой правой параллелью пояса $S_{u_1u_2}$ ($S_{u_3u_4}$), на которой лежат точки границы Γ_1 (Γ_2). При помощи нулей функции $\zeta'(u)$ и точек излома меридиана c разлагаем интервалы $[0, \widetilde{u}_0]$ и $[\widetilde{u}_0, \alpha_1]$ для S_a ($[u_0, \widetilde{u}_0]$ и $[\widetilde{u}_0, \alpha_1]$ для S_δ, $[\delta_1, \widetilde{u}_0]$ и $[\widetilde{u}_0, \alpha_1]$ для S_b; $[0, \alpha_1]$, $[\beta_1, \widetilde{u}_0]$ и $[\widetilde{u}_0, U_c]$, если $\widetilde{u}_0\in[u_2, U_c]$, и $[0, \widetilde{u}_0]$, $[\widetilde{u}_0, \alpha_1]$ и $[\beta_1, U_c]$, если $\widetilde{u}_0\in[0, u_1]$, для S_Γ) на конечное число подинтервалов.

В силу (7) имеем $U=\Sigma_{k=0}^{\infty}U_k$, где $U_k=(\varphi_k.e+\chi_k.a+\psi_k.a')e^{ikv}+(\varphi_{-k}.e+\chi_{-k}.a+\psi_{-k}.a')e^{-ikv}$. Так как (см. [3])

$$U_0=\overline{c}_0\,.\,e+\overline{C}_0 r(u)\,.\,a', \quad \overline{c}_0=\text{const}, \quad \overline{C}_0=\text{const},$$

то из условий (3) и (10) следует $U_0(u, v)\equiv 0$ на $S_{0\alpha_1}$ ($S_{u_0\alpha_1}$, $S_{\delta_1\alpha_1}$, $S\setminus S_{\alpha_1\beta_1}$). Кроме того, ввиду условий (3) и (10′), после последовательного применения леммы 1 получаем $U_k(u, v)\equiv 0$, $k\geq 1$. Следовательно, для поля U б. м. изгибания имеем [7] $U(u, v)\equiv 0$ на $S_{0\alpha_1}$ ($S_{u_0\alpha_1}$, $S_{\delta_1\alpha_1}$, $S\setminus S_{\alpha_1\beta_1}$).

Пояс $S_{u_1u_2}$ поверхности (2) получается, когда $(u, v)\in[u_1, u_2]\times[0, 2\pi)$. Для ясности будем рассматривать поверхность S_{12}^{∞}, которая получается, когда $(u, v)\in D_{12}=[u_1, u_2]\times(-\infty, \infty)$. Для гауссовой кривизны K и обеих систем асимптотических линий G^1 и G^2 поверхности S_{12}^{∞} имеем соответственно

$$K=\frac{\zeta'(r'\zeta''-r''\zeta')}{r}, \tag{11}$$

$$G^1: v-B(u)=\xi, \quad G^2: v+B(u)=\eta, \tag{12}$$

где

$$B(u)=\int_{u_1}^{u}A(u)du, \quad A(u)=\left(\frac{r''\zeta'-r'\zeta''}{r\zeta'}\right)^{1/2}. \tag{12′}$$

На поверхности S_{12}^{∞} делаем двукратно гладкую замену переменных

$$\Lambda: \begin{array}{l} v=\frac{1}{2}(\xi+\eta) \\ B(u)=\frac{1}{2}(\eta-\xi), \ (\xi, \eta)\in D_{\xi\eta}, \end{array} \tag{13}$$

где полоса $D_{\xi\eta}$ ограничена прямыми $g_1:\eta-\xi=0$, $g_2:\eta-\xi=2B(u_2)$. Так как функция $B(u)$ возрастает в $[u_1, u_2]$, то соответствие (13) между полосами D_{12} и $D_{\xi\eta}$ биективное. Кроме того, из

$$u_\xi=-\frac{1}{2A(u)},\quad u_\eta=\frac{1}{2A(u)},\quad v_\xi=\frac{1}{2},\quad v_\eta=\frac{1}{2} \tag{14}$$

имеем

$$\frac{D(u,\ v)}{D(\xi,\ \eta)}=-\frac{1}{2A(u)}\neq 0 \quad \text{в} \quad D_{\xi\eta}. \tag{15}$$

Следовательно, изображение (13) полосы D_{12} в полосе $D_{\xi\eta}$ является C^2-дифеоморфизмом.

Относительно новых параметров (ξ, η) имеем $S_{12}^{\infty}:\bar{x}=\bar{x}(\xi,\ \eta)$, $\bar{x}(\xi,\ \eta)\in C^2(D_{\xi\eta})$, $U(\xi,\ \eta)\in C^1(D_{\xi\eta})$. Рассматриваем скалярные функции

$$a=U\bar{x}_\xi,\quad b=U\bar{x}_\eta,\quad c=Ul. \tag{16}$$

Известно [14, 5], что функции $a(\xi, \eta)$, $b(\xi, \eta)$ и $c(\xi, \eta)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} a_\xi&=\Gamma_{11}^1 a+\Gamma_{11}^2 b+Lc,\\ b_\eta&=\Gamma_{22}^1 a+\Gamma_{22}^2 b+Nc,\\ a_\eta+b_\xi&=2\Gamma_{12}^1 a+2\Gamma_{12}^2 b+2Mc, \end{aligned} \tag{17}$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля второго рода, а L, M и N — коэффициенты второй фундаментальной формы поверхности. В нашем случае первые два уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_\xi&=\Gamma_{11}^1 a+\Gamma_{11}^2 b,\\ b_\eta&=\Gamma_{22}^1 a+\Gamma_{22}^2 b, \end{aligned} \tag{18}$$

где ввиду

$$g_{11}=\frac{1}{4A^2}(A^2r^2+1),\quad g_{12}=\frac{1}{4A^2}(A^2r^2-1),\quad g_{22}-\frac{1}{4A^2}(A^2r^2+1) \tag{19}$$

имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1&=\frac{1}{4A^2r}(r^2r'A^3+rA'-2r'A),\\ \Gamma_{11}^2&=-\frac{1}{4A^2r}(r^2r'A^3+rA'+2r'A),\\ \Gamma_{22}^1&=\frac{1}{4A^2r}(r^2r'A^3+rA'+2r'A),\\ \Gamma_{22}^2&=\frac{1}{4A^2r}(2r'A-r^2r'A^3-rA'). \end{aligned} \tag{20}$$

Для решений $a(\xi, \eta)$, $b(\xi, \eta)$ системы (18) имеют место (см. [5])

Лемма 2. *Если прямоугольник* $R=[\xi_0, \xi_1]\times[\eta_0, \eta_1]$ *принадлежит* $D_{\xi\eta}$ *и* $a|_{\widetilde{L}}=b|_{\widetilde{L}}=0$, *где* $\widetilde{L}$ — *объединение двух соседних сторон* R, *то* $a\equiv0$, $b\equiv0$ *в* R.

Лемма 3. *Пусть* $\widetilde{c}$ — *простая непрерывная кривая, однозначно* проектирующаяся на оси 0ξ, 0η *и пусть* $\widetilde{R}$ — *треугольная область в* $D_{\xi\eta}$, *которая ограничена кривой* $\widetilde{c}$ *и двумя отрезками, параллельными соответственно осям* 0ξ *и* 0η. *Тогда*: 1) *если* $a|_{\widetilde{c}}=b|_{\widetilde{c}}=0$, *то* $a\equiv0$, $b\equiv0$ *в* $\widetilde{R}$; 2) *если* $a|_{\widetilde{L}}=b|_{\widetilde{L}}=0$, *где* $\widetilde{L}=\partial\widetilde{R}\setminus\widetilde{c}$, *то* $a\equiv0$, $b=0$ *в* $\widetilde{R}$.

Отметим, что из $a\equiv0$, $b\equiv0$ в $R(\widetilde{R})$ следует (см (17)) $c\equiv0$ в $R(\widetilde{R})$, а из (16) — $U\equiv0$ в $R(\widetilde{R})$. Дальше будем пользоваться этим фактом существенно.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1, следует доказать, что поле U б. м. изгибания равняется нулю и на куске $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}=S_a\cap S_{\alpha_1\beta_1}$ поверхности S_a ($\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}=S_\delta\cap S_{\alpha_1\beta_1}$ поверхности S_δ, $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\cup\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1}=(S_b\cap S_{\alpha_1\beta_1})\cup(S_b\cap S_{\gamma_1\delta_1})$ поверхности S_b, $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}=S_r\cap S_{\alpha_1\beta_1}$ поверхности S_Γ). Для этой цели будем пользоваться леммами 2 и 3.

Пусть каждая вершина границы Γ_1 для S_a (Γ_1 для S_δ, Γ_1 и Γ_2 для S_b, $\cup_{i=1}^{q}\partial S_i$ для S_Γ), которая лежит на параллели c_{α_1} (c_{α_1}, c_{α_1} и c_{δ_1}, c_{α_1} и $c\,\beta_1$), такая, что обе дуги Γ_1 (Γ_1, Γ_1 и Γ_2, $\cup_{i=1}^{q}\partial Si$), выходящие из нее, являются асимптотическими (см. рис. 2). Покрываем параллель c_{α_1} (c_{α_1}, c_{α_1} и c_{δ_1}, c_{α_1} и c_{β_1}) при помощи конечного числа ее поддуг c^j, $j=1, \ldots, s$, полученных через асимптотические линии, выходящие из вершин границы, и асимптотические линии из еще нескольких (если нужно) ее гладких точек. Рассматриваем эти асимптотические треугольники Δ^j к дугам c^j, которые принадлежат $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}$ ($\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}$, $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}$ и $\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1}$, $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}$). Для каждого такого асимптотического треугольника применяем лемму 3. Обозначим через Π_{α_1} (Π_{α_1}, Π_{α_1} и Π_{δ_1}, Π_{α_1} и Π_{β_1}) объединение всех этих треугольников. Тогда

$$U|_{\Pi_{\alpha_1}}\equiv0 \quad (U|_{\Pi_{\alpha_1}}\equiv0, \quad U|_{\Pi_{\alpha_1}\cup\Pi_{\delta_1}}\equiv0, \quad U|_{\Pi_{\alpha_1}\cup\Pi_{\beta_1}}\equiv0). \tag{21}$$

Далее, при помощи сторон Δ^j покрываем кусок $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus\Pi_{\alpha_1}$ ($\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus\Pi_{\alpha_1}$, $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus\Pi_{\alpha_1}$ и $\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1}\setminus\Pi_{\delta_1}$, $\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus(\Pi_{\alpha_1}\cup\Pi_{\beta_1})$) асимптотическими треугольниками (неасимптотические стороны последних являются неасимптотическими дугами границы Γ_1(Γ_1, Γ_1 и Γ_2, $\cup_{i=1}^{q}\partial S_i$)) и применяем лемму 3. Получаем

$$\begin{aligned} &U|_{\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus\Pi_{\alpha_1}}\equiv0 \quad \text{для} \quad S_a(U|_{\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus\Pi_{\alpha_1}}\equiv0 \quad \text{для} \quad S_\delta, \\ &U|_{(\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus\Pi_{\alpha_1})\cup(\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1}\setminus\Pi_{\delta_1})}\equiv0 \quad \text{для} \quad S_b, \quad U|_{\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus(\Pi_{\alpha_1}\cup\Pi_{\beta_1})}\equiv0 \quad \text{для} \quad S_\Gamma). \end{aligned} \tag{22}$$

Из (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned} &U|_{\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}}\equiv0 \text{ для } S_a(U|_{\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}}\equiv0 \quad \text{для} \quad S_\delta). \\ &U|_{\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\cup\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1}}\equiv0 \text{ для } S_b, \; U|_{\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}}\equiv0 \quad \text{для} \quad S_\Gamma). \end{aligned} \tag{23}$$

Если на параллели c_{α_1}(c_{α_1}, c_{α_1} и c_{δ_1}, c_{α_1} и c_{β_1}) имеется хотя бы одна вершина границы Γ_1 (Γ_1, Γ_1 и Γ_2, $\cup_{i=1}^{q}\partial S_i$), для которой хотя бы одна из

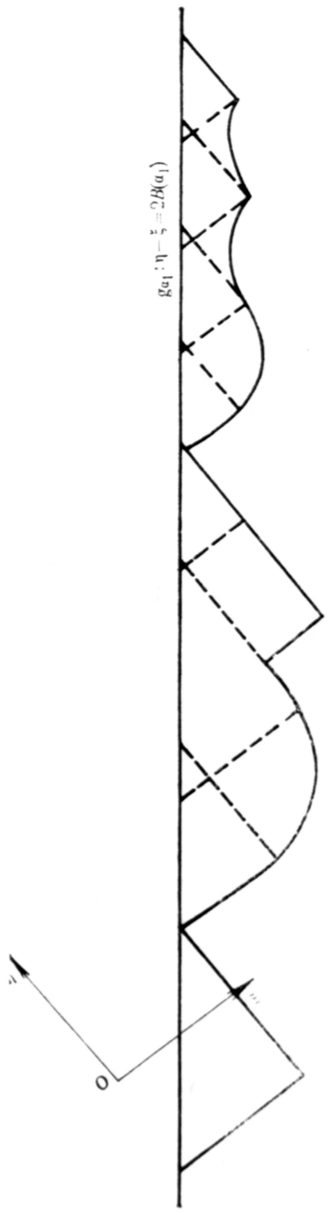

Рис. 2

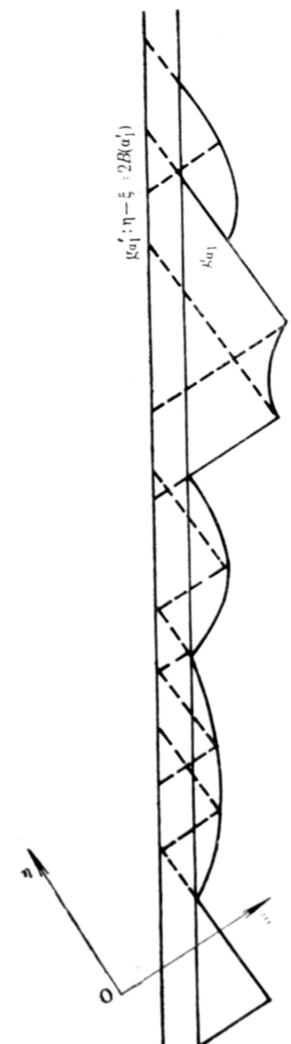

Рис. 3

двух дуг Γ_1 (Γ_1, Γ_1 и Γ_2, $\cup_{i=1}^{q}\partial S_i$), выходящая из нее, не является асимптотической, то применяем прежние рассуждения для $\widetilde{S}_{\alpha_1'\beta_1}$ ($\widetilde{S}_{\alpha_1'\beta_1}$, $\widetilde{S}_{\alpha_1'\beta_1}$ и $\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1'}$, $\widetilde{S}_{\alpha_1'\beta_1'}$), где параллель $u=\alpha_1'<\alpha_1$ ($u=\alpha_1'<\alpha_1$, $u=\alpha_1'<\alpha_1$ и $u=\delta_1'>\delta_1$, $u=\alpha_1'<\alpha_1$ и $u=\beta_1'>\beta_1$) такая, что гауссовая кривизна поверхности $\widetilde{S}_{\alpha_1'\beta_1}$ ($\widetilde{S}_{\alpha_1'\beta_1}$, $\widetilde{S}_{\alpha_1'\beta_1}$ и $\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1'}$, $\widetilde{S}_{\alpha_1'\beta_1'}$) отрицательная (см. рис. 3). Этим теорема 1 доказана.

4. Доказательство теорем 2 и 3 мало отличается от доказательства теоремы 1. Поэтому мы его только наметим. Рассматриваем те неасимптотические дуги γ_l, $l=1,\ldots,p$, границы Γ_1, которые не лежат на параллели $u=\alpha_1$. Строим к ним асимптотические треугольники Δ^l и применяем лемму 3. Получаем $U|\cup_{l=1}^{p}\Delta^l=0$. Потом при помощи асимптотических линий разобьем часть $\widetilde{\widetilde{S}}_{\alpha_1\beta_1}=\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}\setminus((\cup_{l=1}^{p}\Delta^l)\cap\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1})$ подходящим образом на асимптотические треугольники и прямоугольники (см. рис. 1). Применяя к ним в подходящем порядке леммы 2 и 3, получаем

$$U|_{\widetilde{\widetilde{S}}_{\alpha_1\beta_1}}=0 \text{ и, следовательно, } U|_{\widetilde{S}_{\alpha_1\beta_1}}=0.$$

Дальше лемма 1 дает $U|_{S_a}=0$ ($U|_{S_\delta}=0$, $U|_{S_b\setminus\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1}}=0$), а теорема 1 — $U|_{\widetilde{S}_{\gamma_1\delta_1}}=0$.

Замечание 1. Теоремы 2 и 3 утверждают жесткость поверхности S_a (S_δ, S_b), когда часть границы Γ_1 (граница Γ_1 является допустимой второго типа) закреплена. Иногда, в зависимости от вида Γ_1, может иметь жесткость и когда закреплена меньшая часть границы, чем указанная в теоремах 2 и 3. Точнее, можно освободить от краевого условия некоторые поддуги неасимптотических дуг γ_k, $k=1,\ldots,m$, границы Γ_1, и поверхность S_a (S_δ, S_b) опять будет жесткой. Это возможно для такой поддуги γ_l, $l=1,\ldots,t$, границы $\cup_{k=1}^{m}\gamma_k$, для которой существует пара закрепленных поддуг γ_{l_1} и γ_{l_2} из $\cup_{k=1}^{m}\gamma_k$, такие, что проекция дуги γ_{l_1} на Γ_1 при помощи системы G_1 и проекция дуги γ_{l_2} на Γ_1 при помощи системы G_2 совпадают с γ_l (см. на рис. 1 дуги $\widetilde{\gamma_2}$, $\widetilde{\gamma_5}$, γ_{13} и $\widetilde{\gamma_{17}}$).

Замечание 2. Если граница Γ_1 является допустимой первого типа, то она является и допустимой второго типа. В теоремах 2 и 3, когда граница Γ_1 является допустимой первого типа, надо задавать краевое условие (4) на всей Γ_1.

Результаты настоящей работы докладованы 16. 12. 1982 г. на Национальной конференции по математике и механике, которая состоялась в Софии.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Liebmann. Über die Verbiegung der geschlossenen Ringfläche. *Göttinger Nachr.*, 1901, 39—53.
2. H. Liebmann. Über die Verbiegung von Rotationsflächen. Leipzig Ber., **53**, 1901, 215—234.
3. S. Cohn-Vossen. Unstarre geschlossene Flächen. *Math. Ann.*, **102**, 1929, 10—29 (см. также Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., 1959).

4. E. Rembs. Zur Verbiegung von Flächen im Große: . *Math. Z.* **56**, 1952, 3, 271—279.
5. T. Minagawa, T. Rado. On the infinitesimal rigidity of surfaces. *Osaka Math. J.* **4**, 1952, 2, 241-285.
6. Ш. С. Мецховришвили. О бесконечно малых изгибаниях торообразной оболочки. *Сообщ. АН Груз. ССР*, **18**, 1957, 521—527.
7. T. Minagawa and T. Rado. On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. *Math. Z.*, **59**, 1953, 151-163.
8. Н. И. Бакиевич. Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа, возникающие при изучении б. м. изгибаний поверхностей вращения. *Успехи матем. наук*, **15**, 1960, 1, 171—176.
9. И. Х. Сабитов. О жесткости „гофрированных" поверхностей вращения. *Матем. зам.* **14**, 1973, 4, 517—522.
10. Н. Г. Перлова, И. Х. Сабитов. Жесткость второго порядка желобов вращения класса C^2. *Вестн. Моск. ун-та*, **5**, 1975, 47—52.
11. И. Х. Сабитов. О б. м. изгибаниях желобов вращения I. *Мат. сб.*, **98** (140), 1(9), 1975, 113—129.
12. И. Х. Сабитов. О б. м. изгибаниях желобов вращения II. *Мат. сб.*, **99** (141), 1, 1976, 49—57.
13. Сунь Хэ-шэн. О единственности решения вырождающихся уравнений и жесткости поверхностей. *Доклады АН СССР*, **122**, 1958, 5, 770—773.
14. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. М., 1959.

Единый центр математики и механики
1090 П. Я. 373

Поступила 8. 8. 1983 г.
В переработанном виде 15. 10. 1984 г.