Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

МАРИЯ А. АРОЛСКА-ХЕКИМОВА, ГАЛИНА Х. САРАФОВА

В работе обоснован асимптотический метод решения задачи о существовании периодических решений линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными и с импульсным воздействием. Для решения этой задачи найдена подходящая модификация метода пограничных функций А. Б. Васильевой (1963).

I. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием являются математической моделью процессов и явлений, которые в своем развитии подвергаются кратковременным возмущениям. Изучение этих уравнений ведет свое начало в работах В. Д. Мильмана и А. Д. Мышкиса [1, 2].

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\varepsilon\dot{x}=A_1(t)x+B_1(t)y+f_1(t), \quad t\neq t_i, \\ &\dot{y}=A_2(t)x+B_2(t)y+f_2(t), \quad t\neq t_i, \\ &\Delta x\,|_{t=t_i}=P^{(i)}x(t_i)+a_i, \\ &\Delta y\,|_{t=t_i}=S^{(i)}y(t_i)+b_i, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t_i\in R$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots, t_i<t_{i+1}$; $A_k(t)$, $B_k(t)$, $(k=1,2)$, $P^{(i)}$, $S^{(i)}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $-(m\times m)$-матрицы; $f_k(t)$, a_i, b_i, $(k=1,2)$, $(i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ — m-мерные векторы $\Delta x\,|_{t=t_i}=x(t_i+0)-x(t_i-0)$, $\Delta y\,|_{t=t_i}=y(t_i+0)-v(t_i-0)$, $x(t_i)=x(t_i-0)$, $y(t_i)=y(t_i-0)$ $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Систему

$$\begin{aligned} &0=A_1(t)x+B_1(t)y+f_1(t), \quad t\neq t_i \\ &\dot{y}=A_2(t)x+B_2(t)y+f_2(t), \quad t\neq t_i \\ &\Delta y\,|_{t=t_i}=S^{(i)}y(t_i)+b_i \end{aligned} \tag{2}$$

будем называть вырожденной системой, соответствующей системе (1).

Будем использовать следующие обозначения:

1. Для m-мерного вектора $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $(m\times m)$ матрицы $A=\{a_{ij}\}$ полагаем

$$|x|=\max_{1\leq i\leq m}|x_i|, \ |A|=\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|.$$

2. Символом $\tilde{C}_{\omega,m}$ будем обозначать множество всех ω-периодических, кусочно непрерывных m-мерных вектор-функций $W(t)$ с точками разрыва первого рода в точках t_i; $w(t_i)=w(t_i-0)$, $(i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ с нормой $\|w\|=\sup_t|w(t)|$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 63—75.

3. Символом $\widetilde{C}^{(1)}_{\omega, m}$ будем обозначать множество всех функций $w(t) \in \widetilde{C}_{\omega, m}$, имеющих непрерывные производные на каждом интервале вида $(t_i, t_{i+1}]$, $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, причем для каждого i существует $\dot{w}(t_i+0)$.

4. Через z будем обозначать одновременно x и y, т. е если записано некоторое соотношение для z, то выполняются такие соотношения и для x, и для y.

Будем говорить, что выполнены условия (А), если выполняются следующие условия:

А1. Матрицы $A_k(t)$, $B_k(t)$, $(k=1,2)$ — ω-периодические и имеют непрерывные производные до $(n+1)$-ого порядка при $t \in \mathrm{R}$.

А2. Матрица $A_1(t)$ имеет вид

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & 0 \\ 0 & A_{22}(t) \end{pmatrix},$$

причем собственные значения $(k \times k)$ матрицы $A_{11}(t)$ удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\,\lambda(t) < 0$, а собственные значения $((m-k) \times (m-k))$ матрицы $A_{22}(t)$ — неравенству $\mathrm{Re}\,\lambda(t) > 0$ $(0 \leq k \leq m)$.

А3. Матрицы $P^{(i)}$, $S^{(i)}$, векторы a_i, b_i и точки $t_i (i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ удовлетворяют условиям периодичности $P^{(i+p)} = P^{(i)}$, $S^{(i+p)} = S^{(i)}$, $a_{i+p} = a_i$, $b_{i+p} = b_i$, $t_{i+p} = t_i + \omega$, где p — фиксированное натуральное число.

А4. Матрицы $E + S^{(i)}$, $E + P^{(i)}_{11}$, $E + P^{(i)}_{22}$, $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ не особые. Здесь $P^{(i)}_{11}$, $P^{(i)}_{22}$ определены из матрицы

$$P^{(i)} = \begin{pmatrix} P^{(i)}_{11} & P^{(i)}_{12} \\ P^{(i)}_{21} & P^{(i)}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

причем $P^{(i)}_{11}$, $P^{(i)}_{12}$, $P^{(i)}_{21}$, $P^{(i)}_{22}$ соответственно $(k+k)$—, $(k \times (m-k))$—, $((m-k) \times k)$—$((m-k) \times (m-k)$ — матрицы.

А5. Функции $f_k(t) \in \widetilde{C}^{(1)}_{\omega, m}$, $(k=1,2)$.

А6. Линейная однородная система с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot{\xi} = (B_2(t) - A_2(t)\, A_1^{-1}(t)\, B_1(t))\, \xi, \quad t \neq t_i \\ \Delta \xi \,|_{t=t_i} = S^{(i)} \xi(t_i) \end{gathered} \tag{4}$$

имеет только нулевое ω-периодическое решение.

При выполнении условий (А) будем решать задачу о существовании ω-периодического решения системы (1) и нахождении его асимптотического разложения по степеням параметра ε. При решении этой задачи будем рассматривать различные кусочно непрерывные функции и матрицы с точками разрыва первого рода в точках t_i. Для определенности будем считать, что все они непрерывны слева в точках t_i $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

При исследованиях важную роль будет играть ω-периодическое решение вырожденной системы (2). Систему (2) можем записать в виде

$$x(t) = \varphi(t, y), \quad t \neq t_i \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) = [B_2(t) - A_2(t)\, A_1^{-1}(t)\, B_1(t)]\, y + F(t), \quad t \neq t_i \\ \Delta y \,|_{t=t_i} = S^{(i)} y(t_i) + b_i, \end{gathered} \tag{6}$$

где

(7)
$$\varphi(t,y) = -A_1^{-1}(t)B_1(t)y - A_1^{-1}(t)f_1(t)$$
$$F(t) = f_2(t) - A_2(t)A_1^{-1}(t)f_1(t).$$

Очевидно, при каждом фиксированном $y(t)\in \widetilde{C}^{(1)}_{\omega,m}$ $\varphi(t,y)\in \widetilde{C}^{(1)}_{\omega,m}$. Кроме того, $F(t)\in \widetilde{C}^{(1)}_{\omega,m}$.

Через $V(t,s)$, $(V(s,s)=E)$ обозначим фундаментальную матрицу системы (4).

Из [3] известно, что при условии А6 система (6) имеет единственное ω-периодическое решение $\bar{y}(t)\in \widetilde{C}^{(1)}_{\omega,m}$. При $t\geqq 0$ $\bar{y}(t)$ можно представить в виде

(8)
$$\bar{y}(t) = V(t,0)\,[E - V(\omega,0)]^{-1}\,[\int_0^\omega V(t,s)F(s)\,ds$$
$$+\sum_{0\leqq t_\nu<\omega} V(\omega,t_\nu+0)b_\nu] + \int_0^t V(t,s)F(s)\,ds + \sum_{0\leqq t_\nu<t} V(t,t_\nu+0)\,b_\nu.$$

Таким образом вырожденная система (2) имеет единственное ω-периодическое решение $\bar{x}(t) = (\varphi(t,\bar{y}(t)),\ \bar{y}(t))$.

II. Алгоритм построения асимптотического разложения ω-периодического решения $\{x(t,\varepsilon),\ y(t,\varepsilon)\}$ системы (1). Допустим, что система (1) имеет ω-периодическое решение $\{x(t,\varepsilon),\ y(t,\varepsilon)\}$. Будем искать формальное асимптотическое разложение этого решения в виде

(9)
$$z(t,\varepsilon) = \bar{z}(t,\varepsilon) + \pi^{(i)}z(\tau_i,\varepsilon) + Q^{(i)}z(\sigma_i,\varepsilon),\quad t_i<t\leqq t_{i+1},$$

где

(10)
$$\bar{z}(t,\varepsilon) = \bar{z}_0(t) + \varepsilon\bar{z}_1(t) + \ldots + \varepsilon^k\bar{z}_k(t) + \ldots,$$

(11)
$$\pi^{(i)}z(\tau_i,\varepsilon) = \pi_0^{(i)}z(\tau_i) + \varepsilon\pi_1^{(i)}z(\tau_i) + \ldots + \varepsilon^k\pi_k^{(i)}z(\tau_i) + \ldots,$$

(12)
$$Q^{(i)}z(\sigma_i,\varepsilon) = Q_0^{(i)}z(\sigma_i) + \varepsilon Q_1^{(i)}z(\sigma_i) + \ldots + \varepsilon^k Q_k^{(i)}z(\sigma_i) + \ldots,$$
$$\tau_i = (t-t_i)/\varepsilon,\ \sigma_i = (t-t_{i+1})/\varepsilon,\ t_i<t\leqq t_{i+1},\ (i=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Отметим, что коэффициенты в разложениях (11) и (12) называются пограничными [4]. Они должны удовлетворять условиям

(13)
$$\pi_k^{(i)}z(+\infty)=0,\ Q_k^{(i)}z(-\infty)=0,\ i=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ k=0,1,2,\ldots.$$

Подставляя (9) в (1), получим систему

(14)
$$\varepsilon\dot{\bar{x}} + d\pi^{(i)}x/d\tau_i + dQ^{(i)}x/d\sigma_i = A_1(t)\bar{x}(t,\varepsilon) + A_1(t_i+\varepsilon\tau_i)$$
$$\times\pi^{(i)}x(\tau_i,\varepsilon) + A_1(t_{i+1}+\varepsilon\sigma_i)\,Q^{(i)}x(\sigma_i,\varepsilon) + B_1(t)\,\bar{y}(t,\varepsilon)$$
$$+B_1(t_i+\varepsilon\tau_i)\,\pi^{(i)}y(\tau_i,\varepsilon) + B_1(t_{i+1}+\varepsilon\sigma_i)\,Q^{(i)}y(\sigma_i,\varepsilon) + f_1(t),\quad t_i<t\leqq t_{i+1};$$
$$\varepsilon\dot{\bar{y}} + d\pi^{(i)}y/d\tau_i + dQ^{(i)}y/d\sigma_i = \varepsilon A_2(t)\,\bar{x}(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t_i+\varepsilon\tau_i)$$
$$\times\pi^{(i)}x(\tau_i,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t_{i+1}+\varepsilon\sigma_i)\,Q^{(i)}x(\sigma_i,\varepsilon) + \varepsilon B_2(t)\,\bar{y}(t,\varepsilon)$$
$$+\varepsilon B_2(t_i+\varepsilon\tau_i)\,\pi^{(i)}y(\tau_i,\varepsilon) + \varepsilon B_2(t_{i+1}+\varepsilon\sigma_i)\,Q^{(i)}y(\sigma_i,\varepsilon) + \varepsilon f_2(t),\quad t_i<t\leqq t_{i+1};$$
$$\bar{x}(t_i+0,\varepsilon) + \pi^{(i)}x(0,\varepsilon) + Q^{(i)}x((t_i-t_{i+1})/\varepsilon,\varepsilon) = (P^{(i)}+E)$$

$$\times[\bar{x}(t_i-0,\varepsilon)+\pi^{(i-1)}x((t_i-t_{i-1})/\varepsilon,\varepsilon)+Q^{(i-1)}x(0,\varepsilon)+a_i,$$

$$\bar{y}(t_i+0,\varepsilon)+\pi^{(i)}y(0,\varepsilon)+Q^{(i)}y((t_i-t_{i+1})/\varepsilon,\varepsilon)=(S^{(i)}+E) \tag{15}$$

$$\times[\bar{y}(t_i-0,\varepsilon)+\pi^{(i-1)}y((t_i-t_{i-1})/\varepsilon,\varepsilon)+Q^{(i-1)}y(0,\varepsilon)]+b_i.$$

В (14), (15) подставим вместо $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\pi^{(i)}x$, $\pi^{(i)}y$, $Q^{(i)}x$, $Q^{(i)}y$ разложения (10), (11 и (12) и разложим $A_k(t_i+\varepsilon\sigma_i)$, $A_k(t_{i+1}+\varepsilon\sigma_i)$, $B_k(t_i+\varepsilon\tau_i)$, $B_k(t_{i+1}+\varepsilon\sigma_i)$, $(k=1,2)$ в ряды по степеням ε. Приравняя коэффициенты перед одинаковыми степенями ε (в отдельности зависящие от t, τ_i и σ_i), получим системы для коэффициентов разложений (10), (11) и (12).

При $k=0$ получим, что $(\bar{x}_0(t),\bar{y}_0(t))$ должны удовлетворять вырожденной системе (2). Положим

$$\bar{x}_0(t)=\bar{x}(t),\ \bar{y}_0(t)=\bar{y}(t). \tag{16}$$

Для функций $\pi_0^{(i)}z(\tau_i)$, $Q_0^{(i)}z(\sigma_i)$ получим системы

$$d\pi_0^{(i)}x/d\tau_i=A_1(t_i)\,\pi_0^{(i)}x(\tau_i)+B_1(t_i)\,\pi_0^{(i)}y(\tau_i),\ \ d\pi_0^i y/d\tau_i=0 \tag{17}$$

и

$$dQ_0^{(i)}x/d\sigma_i=A_1(t_{i+1})\,Q_0^{(i)}x(\sigma_i)+B_1(t_{i+1})\,Q_0^{(i)}y(\sigma_i),\ \ dQ_0^{(i)}y/d\sigma_i=0. \tag{18}$$

Из (17) и (18), учитывая (13), находим, что

$$\pi_0^{(i)}y(\tau_i)\equiv 0,\ \ Q_0^{(i)}y(\sigma_i)\equiv 0. \tag{19}$$

Учитывая еще условие А2 для $\pi_0^{(i)}x(\tau_i)$ и $Q_0^{(i)}x(\sigma_i)$, получим системы

$$d\pi_{0,1}^{(i)}x/d\tau_i=A_{11}(t_i)\,\pi_{0,1}^{(i)}x(\tau_i), \tag{20}$$

$$d\pi_{0,2}^{(i)}x/d\tau_i=A_{22}(t_i)\,\pi_{0,2}^{(i)}x(\tau_i), \tag{21}$$

$$dQ_{0,1}^{(i)}x/d\sigma_i=A_{11}(t_{i+1})\,Q_{0,1}^{(i)}x(\sigma_i), \tag{22}$$

$$dQ_{0,2}^{(i)}x/d\sigma_i=A_{22}(t_{i+1})\,Q_{0,2}^{(i)}x(\sigma_i), \tag{23}$$

где через $\pi_{0,1}^{(i)}x(\tau^i)$ обозначен вектор из первых k компонент вектора $\pi_0^{(i)}x(\tau_i)$, а через $\pi_{0,2}^{(i)}x(\tau_i)$ — вектор из остальных $(m-k)$ компонент вектора $\pi_0^{(i)}x(\tau_i)$. Аналогичен смысл и обозначений $Q_{0,1}^{(i)}x(\sigma_i)$, $Q_{0,2}^{(i)}x(\sigma_i)$, а также вообще смысл дополнительных индексов 1 и 2 к векторам в дальнейших формулах.

Начальные условия для систем (20) — (23) определим из нулевого приближения (15), учитывая (13), (16) и (19). Получим

$$\pi_{0,2}^{(i)}x(0)=0,\ \ Q_{0,1}^{(i)}x(0)=0. \tag{24}$$

Тогда из (21) и (22) следует, что

$$\pi_{0,2}^{(i)}x(\tau_i)\equiv 0,\ \ Q_{0,1}^{(i)}x(\sigma_i)\equiv 0. \tag{25}$$

Для $Q_{0,2}^{(i)}x(o)$ находим при $i=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

$$Q_{0,2}^{(i)}x(o)=(P_{22}^{(i+1)}+E)^{-1}[\bar{x}_{0,2}(t_{i+1}+0)-(P_{21}^{(i+1)}+E)\,\bar{x}_{0,1}(t_{i+1}) \tag{26}$$

$$-a_{i+1,2}]-\bar{x}_{0,2}(t_{i+1}).$$

Для $\pi_{0,1}^{(i)}x(o)$ находим при $i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\pi_{0,1}^{(i)}x(0)=(P_{11}^{(i)}+E)\bar{x}_{0,1}(t_i)+(P_{1,2}^{(i)}+E)\,[\bar{x}_{0,2}(t_i) + Q_{0,2}^{(i-1)}x(o)]+a_{i,1}-\bar{x}_{0,1}(t_i+0), \tag{27}$$

где $Q_{0,2}^{(i-1)}x(o)$ определено через (26).

Решения систем (20), (23) с начальными условиями соответственно (26) и (27) имеют вид

$$\pi_{0,1}^{(i)}x(\tau_i)=\pi_{0,1}^{(i)}x(o)\,e^{A_{11}(t_i)\tau_i},\ \ \tau_i\geqq 0, \tag{28}$$

$$Q_{0,2}^{(i)}x(\sigma_i)=Q_{0,2}^{(i)}x(o)\,e^{A_{22}(t_{i+1})\sigma_i},\ \ \sigma_i\leqq 0. \tag{29}$$

Из условий A1—A3 следует, что существуют независящие от i постоянные $C>0$, $\varkappa>0$, такие, что

$$\begin{gathered}\|\pi_0^{(i)}x(\tau_i)\|\leqq C\exp(-\varkappa\tau_i),\ \ \tau_i\geqq 0,\\ \|Q_0^{(i)}x(\sigma_i)\|\leqq C\exp(\varkappa\sigma_i),\ \ \sigma_i\leqq 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Кроме того, для всех $i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\pi_0^{(i+p)}x(\tau)=\pi_0^{(i)}x(\tau),\\ Q_0^{(i+p)}x(\sigma)=Q_0^{(i)}x(\sigma).\end{gathered} \tag{31}$$

Для определения коэффициентов в разложениях (10), (11) и (12) перед $\varepsilon^k\,(k\geqq 1)$ подходим аналогичным образом. Получим системы

$$\begin{gathered}\dot{\bar{x}}_{k-1}(t)=A_1(t)\,\bar{x}_k(t)+B_1(t)\,\bar{y}_k(t)\\ \dot{\bar{y}}_k(t)=A_2(t)\bar{x}_k(t)+B_2(t)\bar{y}_k(t)\\ \Delta y_k\,|_{t=t_i}=S^{(i)}y_k(t_i)+(S^{(i)}+E)\,Q_k^{(i-1)}y(0)-\pi_k^{(i)}y(0),\end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered}d\pi_k^{(i)}x(\tau_i)/d\tau_i=A_1(t_i)\,\pi_k^{(i)}x(\tau_i)+B_1(t_i)\,\pi_k^{(i)}y(\tau_i)+T_k^{(i)}(\tau_i)\\ d\pi_k^{(i)}y(\tau_i)/d\tau_i=R_k^{(i)}(\tau_i),\end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered}dQ_k^{(i)}x(\sigma_i)/d\sigma_i=A_1(t_{i+1})\,Q_k^{(i)}x(\sigma_i)+B_1(t_{i+1})\,Q_k^{(i)}y(\sigma_i)+G_k^{(i)}(\sigma_i)\\ dQ_k^{(i)}y\,(\sigma_i)/d\sigma_i=H_k^{(i)}\,(\sigma_i),\end{gathered} \tag{34}$$

где

$$T_k^{(i)}(\tau_i)=\sum_{s=1}^{k}\tau_i^s\,[d^sA_1\,(t_i)/dt^s\,\pi_{k-s}^{(i)}(\tau_i)+d^sB_1\,(t_i)/dt^s\,\pi_{k-s}^{(i)}y(\tau_i)]/s\,!\,,$$

$$R_k^{(i)}\,(\tau_i)=\sum_{s=0}^{k-1}\tau_i^s\,[d^sA_2\,(t_i)/dt^s\,\pi_{k-s-1}^{(i)}x\,(\tau_i)+d^sB_2(t_i)/dt^s\,\pi_{k-s-1}^{(i)}y(\tau_i)]/s\,!\,,$$

$$G_k^{(i)}(\sigma_i)=\sum_{l=1}^{k}\sigma_i^s\,[d^sA_1(t_{i+1})/dt^s\,Q_{k-s}^{(i)}x(\sigma_i)+d^sB_1(t_{i+1})/dt^s\,Q_{k-s}^{(i)}y(\sigma_i)]/s\,!\,, \tag{35}$$

$$H_k^{(i)}(\sigma_i)=\sum_{s=0}^{k-1}\sigma_i^s[\,d^sA_2\,(t_{i+1})/dt^s\,Q_{k-s-1}^{(i)}x(\sigma_i)+d^sB_2(t_{i+1})/dt^s\,Q_{k-s-1}^{(i)}y(\sigma_i)]/s\,!\,.$$

Начальные условия для $\pi_k^{(i)}y(\tau_i)$, $Q_k^{(i)}y(\sigma_i)$ определим в соответствии с (13) следующим образом

$$\pi_k^{(i)}y(0) = -\int_0^{+\infty} R_k^{(i)}(s)\,ds, \quad Q_k^{(i)}y(0) = -\int_0^{-\infty} H_k^{(i)}(s)\,ds. \tag{36}$$

Для $\pi_k^{(i)}y(\tau_i)$ и $Q_k^{(i)}y(\sigma_i)$ из вторых уравнений систем (33) и (34) и из (36) получим

$$\pi_k^{(i)}y(\tau_i) = -\int_{\tau_i}^{+\infty} R_k^{(i)}(s)\,ds, \quad Q_k^{(i)}y(\sigma_i) = -\int_{\sigma_i}^{-\infty} H_k^{(i)}(s)\,ds. \tag{37}$$

Подставим (36) в (32). Система (32) примет вид

$$\begin{gathered}\bar{x}_k(t) = \varphi_k(t, \bar{y}_k(t)), \quad t \neq t_i \\ \dot{\bar{y}}_k(t) = [B_2(t) - A_2(t)\,A_1^{-1}(t)\,B_1(t)]\,\bar{y}_k + F_k(t), \quad t \neq t_i \\ \Delta\bar{y}_k\,|_{t=t_i} = S^{(i)}\bar{y}_k(t_i) + \gamma_k^{(i)},\end{gathered} \tag{38}$$

где

$$\varphi_k(t, \bar{y}_k(t)) = -A_1^{-1}(t)\,B_1(t)\,\bar{y}_k(t) + A_1^{-1}(t)\,\dot{\bar{x}}_{k-1}(t),$$

$$F_k(t) = A_2(t)\,A_1^{-1}(t)\,\dot{\bar{x}}_{k-1}(t),$$

$$\gamma_k^{(i)} = -(S^{(i)} + E)\int_0^{+\infty} H_k^{(i-1)}(s)\,ds + \int_0^{+\infty} R_k^{(i)}(s)\,ds.$$

Система (38) является системой типа (5), (6) и, следовательно, она имеет единственное ω-периодическое решение $\{\bar{x}_k(t), \bar{y}_k(t)\}$, имеющее вид

$$\begin{aligned}\bar{x}_k(t) &= \varphi_k(t, \bar{y}_k(t)) \\ \bar{y}_k(t) &= V(t,0)\,[E - V(\omega, 0)]^{-1}\,\Big[\int_0^{\omega} V(t,s)\,F_k(s)\,ds \\ &+ \sum_{0 \leq t_\nu < \omega} V(\omega, t_\nu + 0)\,\gamma_k^{(\nu)}\Big] + \int_0^t V(t,s)\,F_k(s)\,ds + \sum_{0 \leq t_\nu < t} V(t, t_\nu + 0)\,\gamma_k^{(\nu)}.\end{aligned} \tag{39}$$

Определим начальные условия для $\pi_k^{(i)}x(\tau_i)$ и $Q_k^{(i)}x(\sigma_i)$ из k-того приближения (15), учитывая (13). Положим

$$\begin{aligned}\pi_{k,1}^{(i)}x(o) &= (P_{11}^{(i)} + E)\,\bar{x}_{k,1}(t_i) + (P_{12}^{(i)} + E)\,[\bar{x}_{k,2}(t_i) + Q_{k,2}^{(i-1)}x(o)] - \bar{x}_{0,1}(t_i + 0) \\ \pi_{k,2}^{(i)}x(o) &= -\int_0^{+\infty} \{\exp[A_{22}(t_i)\,(\tau_i - s)]\}\,[B_1(t_i)\,\pi_k^{(i)}y(s) + T_k^{(i)}(s)]_1\,ds\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}Q_{k,1}^{(i)}x(o) &= -\int_0^{-\infty} \{\exp[A_{11}(t_{i+1})\,(\sigma_i - s)]\}\,[B_1(t_{i+1})\,Q_k^{(i)}y(s) + G_k^{(i)}(s)]_1\,ds \\ Q_{k,2}^{(i)}x(o) &= (P_{22}^{(i+1)} + E)^{-1}\,[\bar{x}_{k,2}(t_{i+1} + 0) - (P_{21}^{(i+1)} + E)\,\bar{x}_{k,1}(t_{i+1})] - \bar{x}_{k,2}(t_{i+1}).\end{aligned} \tag{41}$$

Из системы (34), учитывая условие А2, для $Q_k^{(i)}x(\sigma_i)$ получим систему

$$dQ_{k,1}^{(i)}x/d\sigma_i = A_{11}(t_{i+1})\,Q_{k,1}^{(i)}x(\sigma_i) + [B_1(t_{i+1})\,Q_k^{(i)}y(\sigma_i) + G_k^{(i)}(\sigma_i)]_1$$

$$dQ_{k,2}^{(i)}x/d\sigma_i = A_{22}(t_{i+1})\,Q_{k,2}^{(i)}x(\sigma_i) + [B_1(t_{i+1})\,Q_k^{(i)}y(\sigma_i) + G_k^{(i)}(\sigma_i)]_2$$

с начальным условием (41). Она имеет единственное решение $Q_k^{(i)}x(\sigma_i)$ при $\sigma_i \leqq 0$, имеющее вид

(42)
$$Q_{k,1}^{(i)}x(\sigma_i) = -\int_{\sigma_i}^{-\infty} \{\exp[A_{11}(t_{i+1})(\sigma_i - s)]\}\,[B_1(t_{i+1})\,Q_k^{(i)}y(s) + G_k^{(i)}(s)]_1\,ds$$

$$Q_{k,2}^{(i)}x(\sigma_i) = Q_{k,2}^{(i)}(o)\exp[A_{22}(t_{i+1})\,\sigma_i] + \int_0^{\sigma_i}\{\exp[A_{22}(t_{i+1})(\sigma_i - s)]\}$$
$$\times[B_1(t_{i+1})\,Q_k^{(i)}y(s) + G_k^{(i)}(s)]_2\,ds.$$

Наконец решаем систему (33) с начальными условиями (40), где $Q_{k,2}^{(i-1)}x(0)$ опреелено из (41). Получим при $\tau_i \geqq 0$

(43)
$$\pi_{k,1}^{(i)}x(\tau_i) = \pi_{k,1}^{(i)}x(0)\exp[A_{11}(t_i)\tau_i] + \int_0^{\tau_i}\{\exp[A_{11}(t_i)(\tau_i - s)]\}$$
$$\times[B_1(t_i)\,\pi_k^{(i)}y(s) + T_k^{(i)}(s)]_1\,ds$$

$$\pi_{k,2}^{(i)}x(\tau_i) = -\int_{\tau_i}^{+\infty}\{\exp[A_{22}(t_i)(\tau_i - s)]\}\,[B_1(t_i)\,\pi_k^{(i)}y(s) + T_k^{(i)}(s)]_2\,ds\,.$$

Таким образом все коэффициенты разложений (10), (11) и (12) при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ вполне определены. Кроме того, очевидно, выполнены условия периодичности

(44)
$$\pi_k^{(i+p)}z(\tau) = \pi_k^{(i)}z(\tau),\ \ \tau \geqq 0,$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$
$$Q_k^{(i+p)}z(\sigma) = Q_k^{(i)}z(\sigma),\ \ \sigma \leqq 0.$$

Из (35) следует, что аналогичными условиями периодичности удовлетворяют и $T_k^{(i)}(\tau)$ $R_k^{(i)}(\tau)$, $G_k^{(i)}(\sigma)$ и $H_k^{(i)}(\sigma)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, для пограничных функций $\pi_k^{(i)}z(\tau_i)$, $Q_k^{(i)}z(\sigma_i)$ при $k = 0, 1, \ldots, n$; $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ справедливы оценки

(45)
$$\|\pi_k^{(i)}z(\tau_i)\| \leqq C\exp(-\varkappa\tau_i),\ \ \tau_i \geqq 0,$$
$$\|Q_k^{(i)}z(\sigma_i)\| \leqq C\exp(\varkappa\sigma_i),\ \ \sigma_i \leqq 0,$$

где положительные постоянные C и $\varkappa$ не зависят от i.

Из (45) следует сходимость всех несобственных интегралов, участвующих в формулах для $\pi_k^{(i)}z(\tau_i)$ и $Q_k^{(i)}z(\tau_i)$ $k = 1, 2, \ldots, n$.

Введем обозначения

$$z_n^{(i)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k\,[\bar{z}_k(t) + \pi_k^{(i)}z(\tau_i) + Q_k^{(i)}z(\sigma_i)]\,,$$

$$Z_n(t, \varepsilon) = z_n^{(i)}(t, \varepsilon),\quad t_i < t \leqq t_{i+1}$$

Очевидно, $Z_n(t, \varepsilon) \in \widetilde{C}_{\omega, 2m}$.

III. Существование и асимптотическое представление ω-периодического решения системы (1). Рассмотрим сингулярно возмущенную линейную систему

$$
(46)\qquad \begin{aligned} \varepsilon \dot{r} &= A_1(t)r + \psi(t), \quad t \neq t_i \\ \Delta r\,|_{t=t_i} &= P^{(i)} r(t_i) + c_i. \end{aligned}
$$

Будем решать задачу о существовании и нахождении оценки периодических решений системы (46) при выполнении следующих условий (В):

В1. Матрица $A_1(t)$ — ω-периодическая, непрерывная при $t \in R$ и удовлетворяет условию А2.

В2. Матрицы $P^{(i)}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ удовлетворяют условию периодичности $P^{(i+p)} = P^{(i)}$. Кроме того, если $P^{(i)}$ имеет представление (3), то матрицы $(P_{11}^{(i)} + E)$ и $(P_{22}^{(i)} + E)$ — неособые.

В3. Функция $\psi(t) \in \widetilde{C}_{\omega, m}$, а постоянные m-мерные векторы c_i $(i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ удовлетворяют условию $c_{i+p} = c_i$.

Система (46) распадается на следующие две системы

$$
(47)\qquad \begin{aligned} \varepsilon \dot{r}_1 &= A_{11}(t) r_1 + \psi_1(t), \quad t \neq t_i \\ \Delta r_1\,|_{t=t_i} &= P_{11}^{(i)} r_1(t_i) + P_{12}^{(i)} r_2(t_i) + c_{i,1} \end{aligned}
$$

и

$$
(48)\qquad \begin{aligned} \varepsilon \dot{r}_2 &= A_{22}(t) r_2 + \psi_2(t), \quad t \neq t_i \\ \Delta r_2\,|_{t=t_i} &= P_{22}^{(i)} r_2(t_i) + P_{21}^{(i)} r_1(t_i) + c_{i,2}\,. \end{aligned}
$$

Обозначим через $Y_i(t, s, \varepsilon)$ $(Y_i(s, s, \varepsilon) = E)$ $(i=1, 2)$ фундаментальную матрицу однородной системы без импульсов

$$
(49)\qquad \varepsilon \dot{\xi}_i = A_{ii} \xi_i\,.
$$

В [6] доказано, что при выполнении условия В1 матрицы $Y_i(t, s, \varepsilon)$, $(i=1, 2)$ удовлетворяют при достаточно малых значениях параметра ε неравенствам

$$
(50)\qquad \begin{aligned} |Y_1(t, s, \varepsilon)| &\leq K_0 \exp[-\varkappa(t-s)/\varepsilon], \quad 0 \leq s \leq t \leq \omega, \\ |Y_2(t, s, \varepsilon)| &\leq K_0 \exp[\varkappa(t-s)/\varepsilon], \quad 0 \leq t \leq s \leq \omega, \end{aligned}
$$

где $K_0 > 0$, $\varkappa > 0$ — постоянные.

Положим

$$
(51)\qquad U_1(t, s, \varepsilon) = \begin{cases} Y_1(t, s, \varepsilon), \quad t_i < s \leq t \leq t_{i+1}, \\ Y_1(t, t_i, \varepsilon)\,[E + P_{11}^{(i)}]\,Y_1(t_i, s, \varepsilon), \quad t_{i-1} < s \leq t_i < t \leq t_{i+1}, \\ Y_1(t, t_i, \varepsilon)\,[\prod\limits_{j=i}^{k+1} (E + P_{11}^{(j)})\,Y_1(t_j, t_{j-1}, \varepsilon)], \\ \times (E + P_{11}^{(k)})\,Y_1(t_k, s, \varepsilon), \quad t_{k-1} < s < t_k < t_i < t \leq t_{i+1}, \end{cases}
$$

$$
(52)\qquad U_2(t, s, \varepsilon) = \begin{cases} Y_2(t, s, \varepsilon), \quad t_i < t \leq s \leq t_{i+1} \\ Y_2(t, t_i, \varepsilon)\,[E + P_{22}^{(i)}]^{-1}\,Y_2(t_i, s, \varepsilon), \quad t_{i-1} < t \leq t_i < s \leq t_{i+1} \\ Y_2(t, i_i, \varepsilon)\,[\prod\limits_{j=i}^{k-1} (E + P_{22}^{(j)})^{-1}\,Y_2(t_j, t_{j+1}, \varepsilon)] \\ \times (E + P_{22}^{(k)})^{-1}\,Y_2(t_k, s, \varepsilon), \quad t_{i-1} < t \leq t_i < t_k < s \leq t_{k+1}. \end{cases}
$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что матрица $U_j(t,s,\varepsilon)$, $(j=1,2)$ является фундаментальной матрицей однородной системы

$$\varepsilon\dot{\eta}_j=A_{jj}\eta_j,\quad t\neq t_i \qquad (53)$$
$$\Delta\eta_j|_{t=t_i}=P_{jj}^{(i)}\eta_j.$$

Лемма 1. *При выполнении условий* B1 *и* B2 *существуют такие положительные числа* ε_0 *и* K, *что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *матрицы* $U_j(t,s,\varepsilon)$, $(j=1,2)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$|U_1(t,s,\varepsilon)|\leq K\exp[-\varkappa(t-s)/\varepsilon],\quad 0\leq s\leq t\leq\omega, \qquad (54)$$

$$|U_2(t,s,\varepsilon)|\leq K\exp[\varkappa(t-s)/\varepsilon],\quad 0\leq t\leq s\leq\omega. \qquad (55)$$

Доказательство (54) дано в [5], а оценка (55) доказывается аналогичным образом при помощи (50) и (52).

Из оценок (54) и (55) следует, что при достаточно малых значениях параметра ε система (53) $(j=1,2)$ имеет только нулевое ω-периодическое решение.

Лемма 2. [5] *При выполнении условий* (B) *существует такое* $\varepsilon_0>0$, *что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *система* (47) *при* $P_{12}^{(i)}\equiv0$ $(i=0,\pm1,\pm2,\dots)$ *имеет единственное* ω-*периодическое решение* $\tilde{r}_1(t,\varepsilon)\in\tilde{C}_{\omega,k}$. *Это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|\tilde{r}_1(t,\varepsilon)\|\leq K_1\max\{\|\psi_1\|,\ \sup_i|c_{i,1}|\}, \qquad (56)$$

где $K_1>0$ — *постоянная, и может быть представлено в виде*

$$\tilde{r}_1(t,\varepsilon)=U_1(t,0,\varepsilon)\tilde{C}_1+1/\varepsilon\{\int_0^t U_1(t,s,\varepsilon)\psi_1(s)\,ds\}+\sum_{0\leq t_\nu<t}U_1(t,t_\nu+0,\varepsilon)c_{\nu,1},\quad t\geq0,$$

где постоянная $\tilde{C}_1$ *определяется из условия* $\tilde{r}_1(0,\varepsilon)=\tilde{r}_1(\omega,\varepsilon)$ *и имеет вид*

$$\tilde{C}_1=[E-U_1(\omega,0,\varepsilon)]^{-1}\{1/\varepsilon[\int_0^\omega U_1(\omega,s,\varepsilon)\psi_1(s)\,ds]+\sum_{0\leq t_\nu<\omega}U_1(\omega,t_\nu+0,\varepsilon)c_{\nu,1}\}.$$

Лемма 3. *При выполнении условий* (B) *существует такое* $\varepsilon_0>0$, *что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *система* (48) *при* $P_{21}^{(i)}\equiv0$ $(i=0,\pm1,\pm2,\dots)$ *имеет единственное* ω-*периодическое решение* $\tilde{r}_2(t,\varepsilon)\in\tilde{C}_{\omega,m-k}$. *Это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|\tilde{r}_2(t,\varepsilon)\|\leq K_2\max\{\|\psi_2(t)\|,\ \sup_i|c_{i,2}|\}, \qquad (57)$$

где K_2 — *положительная постоянная.*

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2. Решение $\tilde{r}_2(t,\varepsilon)$ имеет вид

$$\tilde{r}_2(t,\varepsilon)=U_2(t,\omega,\varepsilon)[E-U_2(0,\omega,\varepsilon)]^{-1}\{1/\varepsilon[\int_\omega^0 U_2(0,s,\varepsilon)\psi_2(s)\,ds]$$

$$-\sum_{0\leq t_\nu<\omega}U_2(0,t_\nu+0,\varepsilon)(E+P_{22}^{(\nu)})^{-1}c_{\nu,2}\}+1/\varepsilon[\int_\omega^t U_2(t,s,\varepsilon)\psi_2(s)\,ds]$$

$$-\sum_{t\leq t_\nu<\omega}U_2(t,t_\nu+0,\varepsilon)(E+P_{22}^{(\nu)})^{-1}c_{\nu,2},\quad t\leq\omega.$$

Замечание 1. Без ограничения общности задачи, можем считать, что $t_i \neq 0, \omega$ $(i=0, \pm 1, \dots)$, поскольку если $t_i=0\,(\omega=t_{i+p})$ для некоторого i, то решения $\tilde{r}_j(t, \varepsilon)$ $(j=1,2)$ построим соответственно при $t \geqq a$, $t \leqq a+\omega$, где $a \neq t_i$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Кроме того будем считать, что $0<t_1<t_2<\dots<t_p<\omega$.

Замечание 2. При дальнейших исследованиях приходится конечное число раз уменьшивать постоянную ε_0. Договоримся везде обозначать эту постоянную одним и тем же символом ε_0.

Для нахождения ω-периодического решения систем (47) и (48) при произвольных $P_{12}^{(i)}$ и $P_{21}^{(i)}$ поступим следующим образом. Применим лемму 2 для системы (47), в которой на $r_2(t_1), r_2(t_2), \dots, r_2(t_p)$ смотрим как на параметры. Получим ω-периодическое решение $r_1(t, \varepsilon, r_2(t_1), \dots, r_2(t_p))$ системы (47). В системе (48) подставим вместо $r_1(t_i)$ $r_1(t_i, \varepsilon, r_2(t_1), \dots, r_2(t_p)$. Для полученной системы применим лемму 3 и найдем ω-периодическое решение $r_2(t, \varepsilon, r_2(t_1), \dots, r_2(t_p)$. Определим значения параметров $r_2(t_1), \dots, r_2(t_p)$ из алгебраической системы

$$r_2(t_i, \varepsilon, r_2(t_1), \dots, r_2(t_p))=r_2(t_i), \; i=1,2,\dots, p, \tag{58}$$

являющейся линейной неоднородной системой относительно неизвестных $r_2(t_1), \dots,$ $r_2(t_p)$. Учитывая замечание 1 и оценки (54) и (55), получим, что определитель $\Delta(\varepsilon)$ этой системы может быть представлен в виде $\Delta(\varepsilon)=E+\Delta_1(\varepsilon)$, где $\Delta_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, система (58) имеет при достаточно малых значениях параметра ε единственное решение $r_2^0(t_1), r_2^0(t_2), \dots, r_2^0(t_p)$. Тогда функция $r_1(t,\varepsilon)=r_1(t, \varepsilon, r_2^0(t_1),$ $\dots, r_2^0(t_p))$ — ω-периодическое решение системы (47), функция $r_2(t,\varepsilon)=r_2(t, \varepsilon, r_2^0(t_1),$ $\dots, r_2^0(t_p))$ — ω-периодическое решение системы (48), а $r(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} r_1(t,\varepsilon) \\ r_2(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$ — единственное ω-периодическое решение системы (46). Кроме того, из (56) и (57) следует неравенство

$$\| r(t_1\varepsilon)\| \leqq K_3 \max\{\|\psi(t)\|, \; \sup_i |c_i|\}. \tag{59}$$

Итак, доказали следующую лемму:

Лемма 4. *При выполнении условий* (B) *существует такое число* $\varepsilon_0>0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система* (46) *имеет единственное* ω-*периодическое решение* $r(t,\varepsilon)$. *Это решение удовлетворяет неравенству* (59), *где* K_3 — *положительная постоянная.*

Теорема 1. *При выполнении условий* (A) *существуют такие положительные постоянные* M *и* ε_0, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система* (1) *имеет единственное* ω-*периодическое решение* $z(t,\varepsilon)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\| z(t,\varepsilon)-Z_n(t,\varepsilon)\| \leqq M\varepsilon^{n+1} \tag{60}$$

при $t \in \mathrm{R}$.

Доказательство. В системе (1) делаем замену неизвестных функций по формулам

$$u=x-X_n(t,\varepsilon), \; v=y-Y_n(t,\varepsilon). \tag{61}$$

Получим систему

$$\begin{gathered} \varepsilon\dot{u}=A_1(t)u+B_1(t)v+g_1(t,\varepsilon), \quad t \neq t_i, \\ \dot{v}=[B_2(t)-A_2(t)\,A_1^{-1}(t)\,B_1(t)]\,v+D(t)\,[A_1(t)\,u+B_1(t)\,v]+g_2(t,\varepsilon), \; t \neq t_i \\ \Delta u\,|_{t=t_i}=P^{(i)}u(t_i)+\alpha_i(\varepsilon), \\ \Delta v\,|_{t=t_i}=S^{(i)}v(t_i)+\beta_i(\varepsilon), \end{gathered} \tag{62}$$

где

$$D(t) = A_2(t) A_1^{-1}(t),$$

$$g_1(t, \varepsilon) = A_1(t) X_n(t, \varepsilon) + B_1(t) Y_n(t, \varepsilon) - \varepsilon dX_n/dt + f_1(t),$$

(63) $$g_2(t, \varepsilon) = A_2(t) X_n(t, \varepsilon) + B_2(t) Y_n(t, \varepsilon) - dY_n/dt + f_2(t),$$

$$\alpha_i(\varepsilon) = (P^{(i)} + E)\left[\sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s \pi_s^{(i-1)} x((t_i - t_{i-1})/\varepsilon) - \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s Q_s^{(i)} x((t_i - t_{i+1})/\varepsilon)\right],$$

$$\beta_i(\varepsilon) = (S^{(i)} + E)\left[\sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s \pi_s^{(i-1)} y((t_i - t_{i-1})/\varepsilon) - \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s Q_s^{(i)} y((t_i - t_{i+1})/\varepsilon)\right].$$

Из соотношений (16), (17), (18), (32), (33), (34), (35), (40), (41) и (45) следует, что при достаточно малых значениях параметра ε справедливы неравенства

$$|D(t)| \leq N_0, \quad |g_1(t, \varepsilon)| \leq N_1 \varepsilon^{n+1},$$

(64) $$|g_2(t, \varepsilon)| \leq N_2 \varepsilon^n [\exp(-\varkappa(t - t_i)/\varepsilon) + \exp(\varkappa(t - t_{i+1})/\varepsilon), \ t_i < t \leq t_{i+1},$$

$$|\alpha_i(\varepsilon)| \leq N_3 \varepsilon^{n+1}, \ |\beta_i(\varepsilon)| \leq N_4 \varepsilon^{n+1}, \ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где N_k, $k = \overline{0,4}$ — положительные постоянные.

Рассмотрим множество

$$T_\rho = \{w: \ w \in \tilde{C}_{\omega, m}, \ \|w\| \leq \rho\} \text{ для } \rho > 0.$$

При $w \in T_\rho$ из леммы 4 следует, что система

(65) $$\varepsilon \dot{h} = A_1(t) h + B_1(t) w + g_1(t, \varepsilon), \ t \neq t_i$$
$$\Delta h|_{t=t_i} = P^{(i)} h(t_i) + \alpha_i(\varepsilon)$$

имеет единственное ω- периодическое решение $h(t, w, \varepsilon) \in \tilde{C}_{\omega,m}$. Из соотношений (59) и (64) следует, что существуют такие постоянные $\varepsilon_0 > 0$, $L_{10} > 0$ и $L_{11} > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедливы неравенства

(66) $$\|h(t, w, \varepsilon)\| \leq L_{10} \|w\| + L_{11} \varepsilon^{n+1}, \ w \in T_\rho,$$

(67) $$\|h(t, w_1, \varepsilon) - h(t, w_2, \varepsilon)\| \leq L_{10} \|w_1 - w_2\|, \ w_1, w_2 \in T_\rho.$$

Рассмотрим оператор φ_ε, который каждой функции $w \in T_\rho$ ставит в соответствие ω-периодическое решение $\varphi_\varepsilon w$ системы

(68) $$\dot{\tilde{v}} = [B_2(t) - A_2(t) A_1^{-1}(t) B_1(t)] \tilde{v} + D(t) [A_1(t) h(t, w, \varepsilon) + B_1(t) w(t)] + g_2(t, \varepsilon),$$
$$\Delta \tilde{v}|_{t=t_i} = S^{(i)} \tilde{v}(t_i) + \beta_i(t).$$

Решение $\varphi_\varepsilon w$ системы (68) может быть представлено в виде

(69) $$\varphi_\varepsilon w = \int_0^t V(t, s) D(s) [A_1(s) h(s) + B_1(s) w(s)] ds + G_2(t, h, \varepsilon),$$

где $V(t, s)$ — фундаментальная матрица системы (4), а через $G_2(t, h, \varepsilon)$ обозначили функцию

$$G_2(t,h,\varepsilon)=V(t,0)[E-V(\omega,0)]^{-1}\{\int_0^{\omega}V(\omega,s)[D(s)(A_1(s)h(s)$$

(70)
$$+B_1(s)w(s))+g_2(s,\varepsilon)]\,ds+\sum_{0\leqq t_\nu<\omega}V(\omega,t_\nu+0)\beta_\nu(\varepsilon)\}$$

$$+\int_0^t V(t,s)g_2(s,\varepsilon)\,ds+\sum_{0\leqq t_\nu<t}V(t,t_\nu+0)\beta_\nu(\varepsilon).$$

Из (69), учитывая, что $h(t,w,\varepsilon)$ является решением системы (65), получим

(71)
$$\varphi_\varepsilon w=\varepsilon\int_0^t V(t,s)D(s)\dot h(s)\,ds-\int_0^t V(t,s)D(s)g_1(s,\varepsilon)\,ds+G_2(t,h,\varepsilon),$$

где через $\dot h(t)$ при $t=t_i$ обозначили $\dot h(t_i-0)$.

Запишем первое слагаемое в правой стороне стороне (71) в виде

(72)
$$\varepsilon\int_0^t V(t,s)D(s)\dot h(s)\,ds=\varepsilon\int_0^{t_1}V(t,s)D(s)\dot h(s)\,ds$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}}V(t,s)D(s)\dot h(s)\,ds+\varepsilon\int_{t_k}^{t}V(t,s)D(s)\dot h(s)\,ds.$$

После интегрирования по частям из (72) получим

$$\varepsilon\int_0^t V(t,s)D(s)\dot h(s)\,ds=\varepsilon D(t)h(t)-\varepsilon V(t,0)D(0)h(0)$$

(73)
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{k}[V(t,t_i)D(t_i)-V(t,t_i+0)D(t_i)(E+P^{(i)})]h(t^i)$$

$$-\varepsilon\sum_{i=1}^{k}V(t,t_i+0)D(t_i)\alpha_i(\varepsilon)-\varepsilon\int_0^t[\partial(V(t,s)D(s))/\partial s]h(s)\,ds,$$

Из (64), (73) и из ограниченности $V(t,s)$, $\partial(V(t,s)D(s))/\partial s$, $0\leqq s\leqq t\leqq\omega$, имеем

(74)
$$\left|\varepsilon\int_0^t V(t,s)D(s)\dot h(s)\,ds\right|\leqq\varepsilon N_5\|h\|+N_6\varepsilon^{n+2},\ t\in[0,\omega],\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0].$$

Для второго слагаемого (71) из (64) получим

(75)
$$\left|\int_0^t V(t,s)D(s)g_1(s,\varepsilon)\,ds\right|\leqq N_7\varepsilon^{n+1},\ t\in[0,\omega],\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0].$$

Чтобы оценить $G_2(t,h,\varepsilon)$, используем неравенство (74) при $t=\omega$ и оценки (64). Получим

(76)
$$|G_2(t,h,\varepsilon)|\leqq N_8\varepsilon\|h\|+N_9\varepsilon^{n+1},$$

при $t\in[0,\omega]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $N_8, N_9=\mathrm{const}>0$.

Из (71), (74), (75) и (76) получим

(77)
$$\|\varphi_\varepsilon w\|\leqq\varepsilon N_{10}\|h\|+N_{11}\varepsilon^{n+1},$$

при $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, $N_{10}, N_{11}=\mathrm{const}>0$.

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\| \varphi_\varepsilon w_1 - \varphi_\varepsilon w_2 \| \leqq N\varepsilon \| h_1 - h_2 \| \tag{78}$$

при $w_1, w_2 \in T_\rho$, $h_1 = h(t, w_1, \varepsilon)$, $h_2 = h(t, w_2, \varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $N = \text{const}$.

Из оценок (66), (67), (77) и (78) следует, что при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ оператор φ_ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ является оператором сжатия в T_ρ. Обозначим через $v_\omega(t, \varepsilon)$ единственную его неподвижную точку. Тогда функция $u_\omega(t, \varepsilon) = \{h(t, v_\omega(t, \varepsilon), \varepsilon), v_\omega(t, \varepsilon)\}$ является единственным ω-периодическим решением системы (62) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Положим $\rho = C\varepsilon$, где $C > 0$ достаточно большое, но фиксированное число. Из (66) и (77) получим оценку

$$\| u_\omega(t, \varepsilon) \| \leqq M\varepsilon^{n+1}, \quad \| v_\omega(t, \varepsilon) \| \leqq M\varepsilon^{n+1} \tag{79}$$

при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $M = \text{const} > 0$.

Из (79), учитывая (61), получим утверждение теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что функция $Z_n(t, \varepsilon)$ является асимптотическим приближением решения $z(t, \varepsilon)$ системы (1) по параметру ε при $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 3. Из оценок (45) следует, что при выполнении условий (A), функция $Z_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \bar{z}_k(t)$ является асимптотическим приближением решения $z(t, \varepsilon)$ системы (1) на каждом сегменте вида $[t_i + \delta_i, t_{i+1} - \delta_2]$, где $\delta_i > 0$, $\delta_i < (t_{i+1} - t_i)/_2$, $= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Мильман, А. Д Мышкис. Об устойчивости движения при наличии толчков. *Сиб. мат ж.*, 12, 1960, 233—237.
2. В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис. Случайные толчки в линейных динамических системах. Сб. „Прибл. методы решений диф. ур.", Киев, Изд. АН УССР, 1963, 64—81.
3. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, ИЗД КГУ, 1980.
4. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
5. М. А. Аролска. Периодични решения на линейни системи диференциални уравнения с малък параметър пред производната и с импулсно въздействие. *Научни тр. Пловд. унив.*, 19, кн. 1, 1981, 93—107.
6. L. Flato, N. Levinson. Periodic solutions of singularly perturbed systems. *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, 1953, 943—950.

Пловдивски университет „П. Хилендарски"

4000 Пловдив, Болгария

Поступила 8.7.1985