# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# СТРУКТУРА $T$-ИДЕАЛА, ПОРОЖДЕННОГО ТОЖДЕСТВОМ ХОЛЛА ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ I

РУСАЛИН СТ. НИКОЛАЕВ

Описывается модульная структура $T$-идеала, порожденного тождеством Холла $[[x_1, x_2]^2, x_3]=0$ и доказывается шпехтовость многообразия $\mathscr{H}$ ассоциативных алгебр без единицы, определенного этим тождеством. В первой части изучается структура модулей $V_n=\Gamma_n\cap T(\mathfrak{A})/\Gamma_n\cap T(\mathscr{H})$, где $\mathfrak{A}$ — многообразие ассоциативных алгебр, определенное собственными полилинейными тождествами пятой степени матричной алгебры $M_2$.

Рассматриваемые в работе алгебры определены над полем $K$ характеристики нуль. Известно, что в матричной алгебре второго порядка $M_2$ выполняется тождество Холла

$$[[x_1, x_2]^2, x_3]=0 \tag{1}$$

Пусть $\mathscr{H}$ — многообразие ассоциативных алгебр без единицы, определенное этим тождеством. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Многообразие $\mathscr{H}$ является шпехтовым.*

Тем самым получается обобщение результатов Ю. Размыслова [1] и Г. Генова [2] — В. Латышева [3] о шпехтовости многообразия $\mathfrak{M}=\operatorname{var}M_2$.

Доказательство теоремы основывается на описании модульной структуры $T$-идеала $T(\mathscr{H})$, которое получается в двух шагах: исходя из того, что модульная структура $T$-идеала $T(\mathfrak{M})$ известна (В. С. Дренски [4]), изучаются сперва фактор-модули $V_n=\Gamma_n\cap T(\mathfrak{A})/\Gamma_n\cap T(\mathscr{H})$, а потом фактор-модули $U_n=\Gamma_n\cap T(\mathfrak{M})/\Gamma\cap T(\mathfrak{A})$, $n\geqq 2$, где $\mathfrak{A}$ — многообразие ассоциативных алгебр без единицы, определенное собственными полилинейными тождествами пятой степени алгебры $M_2$.

**Предварительные сведения и обозначения.** Через $K\langle X\rangle$ обозначим свободную ассоциативную алгебру с единицей и счетным множеством свободных образующих $x_1, x_2 \dots$. Пространство всех полилинейных многочленов степени $n$ из $K\langle X\rangle$, записанных на буквах $x_1, x_2, \dots, x_n$, обозначим $P_n$; $\Gamma_n$ будет подпространством $P_n$, натянутым на полилинейные произведения коммутаторов, т. е. пространством собственных полилинейных многочленов от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Известно ([5]), что $T$-идеал $T(A)$ тождеств любой $PI$-алгебры $A$ порождается своими полилинейными элементами, а если $A$-алгебра с единицей — собственными полилинейными тождествами алгебры $A$.

Для данного многообразия $\mathfrak{B}$ обозначим через $F(\mathfrak{B})$ его относительно свободную алгебру $K\langle X\rangle/T(\mathfrak{B})$, а через $P_n(\mathfrak{B})$ (соотв. $\Gamma_n(\mathfrak{B})$) — образ линейного пространства $P_n$ (соотв. $\Gamma_n$) при естественном гомоморфизме $K\langle X\rangle\to F(\mathfrak{B})$.

Пусть $S_n$ — симметрическая группа степени $n$, действующая на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Линейное пространство $P_n$ естественным образом рассматривается как $KS_n$-модуль: для многочлена $f(x_1, \dots, x_n)\in P_n$ и $\sigma\in S_n$ положим $\sigma f=f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Если для многообразий $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ выполняется включение $\mathfrak{B}_2\subset\mathfrak{B}_1$, то $T(\mathfrak{B}_1)\subset T(\mathfrak{B}_2)$ и существуют естественный гомоморфизм алгебр $F(\mathfrak{B}_1)\to F(\mathfrak{B}_2)$ и гомоморфизмы линейных пространств $P_n(\mathfrak{B}_1)\to P_n(\mathfrak{B}_2)$, $n\geqq 2$, которые являются также модульными гомоморфизмами.

*СЕРДИКА Българско математическо списание. Том. 13, 1987, с. 258—266.*

Ввиду полной приводимости $KS_n$-модулей, изучение $P_n(\mathfrak{B})$ (соотв. $\Gamma_n(\mathfrak{B})$) сводится к изучению его неприводимых компонент, что дает возможность использовать технику диаграмм Юнга.

Пусть $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ — разбиение естественного числа $n$, т. е. $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_k > 0$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=n$. Соответствующая диаграмма Юнга $D=[\lambda]$ состоит из $n$-клеток, размещенных в $k$ строках, где $i$-я строка содержит $\lambda_i$ клеток. Любое заполнение клеток диаграммы $D$ числами $1, 2, \ldots, n$ называется таблицей Юнга. Через $d_\alpha=D_\alpha[\lambda]$, $\alpha \in S_n$ обозначим таблицу, полученную заполнением клеток первого столбца (длины $l_1$) числами $\alpha(1), \ldots, \alpha(l_1)$, второго столбца (длины $l_2$) числами $\alpha(l_1+1), \ldots, \alpha(l_1+l_2)$ и т. д. Для таблицы $d$ через $e(d)$ обозначим симметризатор Юнга $\Sigma(-1)^\tau \pi\tau$, где $\pi$ пробегает подстановки в строках, а $\tau$ — в столбцах таблицы $d$. Для многочлена $f \in P_n$ и таблицы $d$ рассмотрим многочлен $f_d=e(d)f$ и подмодуль $S_n$-модуля $P_n$, порожденный многочленом $f_d$: $M(d, f)=KS_n f_d$. Тогда выполнены следующие утверждения ([6]):

1. Если элемент $f_d \neq 0$, то модуль $M(d, f)$ неприводим.
2. Любой неприводимый подмодуль $P_n$ имеет вид $M(d, f)$ для подходящих $d$ и $f$.
3. Ненулевые модули $M(D_\alpha[\lambda], f)$ и $M(D_\beta[\mu], g)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\lambda=\mu$.

Значительное упрощение вычислений получается, если рассматривать не только $S_n$-модули $M(d, f)$, но и соответствующие $GL_n$-модули $\bar{M}(d, f)$ в $K\langle X\rangle$, порожденные элементами $f_d$, а именно ([4]): обозначим через $\bar{f}_d$, полную симметризацию многочлена $f_d$, получающуюся заменой всех букв $x_i$, индексы $i$ которых лежат в одной строке таблицы $d$, одной и той же буквой. Ясно, что многочлены $f_d$ и $\bar{f}_d$ эквивалентны как тождества — полная линеаризация $\operatorname{lin}\bar{f}_d$ многочлена $\bar{f}_d$ пропорциональна многочлену $f_d$. Следовательно, $GL_n$-модуль $\bar{M}(d, f)$ порождается также элементом $\bar{f}_d$, и, очевидно, $S_n$-модуль $M(d, f)$ неприводим тогда и только тогда когда неприводим $GL_n$-модуль $\bar{M}(d, f)$.

Правонормированный коммутатор определяется индуктивно:

$$[x_1, x_2]=x_1x_2-x_2x_1\,;$$

$$\text{для } n\geqq 2\,[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]=[[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Коммутатор $[x_1, x_2, \ldots, x_2]$ длины $k+1$ будем обозначать короче $[x_1, x_2^{(k)}]$. Как обычно $x_1 \circ x_2=x_1x_2+x_2x_1$.

Если $\deg_x f(x, \ldots)=k$, линеаризацию многочлена $f$ относительно $x$, при которой в качестве новых переменных появляются $u_1, u_2, \ldots, u_k$, будем обозначать так: $\operatorname{lin} f \mid x \to u_1, \ldots, u_k$.

Многочлен вида $\Sigma(-1)^\sigma \ldots (-1)^\tau f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots; x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots)$ будем записывать короче $f(\sigma(1), \sigma(2), \ldots; \tau(1), \tau(2), \ldots)$. Если многочлен $f(x_1, \ldots, x_{k+1}; y_2, \ldots, y_l, \ldots)$, $l\leqq k$ кососимметричен относительно букв $x_1, \ldots, x_{k+1}$, после замены $x_{k+1}$ на $y_1$, кососимметризации по $y_1, \ldots, y_l$ и замены $y_i$ на $x_i$, $i=1, \ldots, l$ получится нуль. Эту процедуру будем обозначать, следуя А. П. Попова [7]

$$Assym\, f(x_1, \ldots, x_{k+1}; y_2, \ldots, y_l; \ldots)=0.$$

Через $s_n$ будем обозначать стандартный многочлен степени $n$:

$$s_n(x_1, \ldots, x_n)=\Sigma(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)=0$ — тождество (некоторой алгебры), соответствующее диаграмме $[\lambda]$ порядка $n$, т. е. для подходящего многочлена $\varphi \in P_n$ и таблицы $d=D_\alpha[\lambda]$

выполняется $f = e(d)\varphi$. Все следствия степени $n+1$ из тождества $f=0$ получаются одним из следующих способов [(7)]:

а) умножаем многочлен $f$ на переменную $x_{n+1}$;

б) в многочлене $f$ положим $x_i = [x_i, x_{n+1}]$ или $x_i = x_i \circ x_{n+1}$, $1 \leq i \leq n$, после чего действуем на полученные многочлены симметризаторами Юнга $e(d')$, соответствующими всем таблицам $d' = D'[\lambda]$ порядка $n+1$, где диаграммы $D'$ получаются следующим образом из диаграммы $D$: удаляем из диаграммы $D$ одну клетку допустимым образом (т. е. учитывая требование о монотонности цепочки, образуемой длинами строк диаграммы); полученную диаграмму порядка $n-1$ умножаем тензорно на диаграмму $[1^2]$, или $[2]$, согласно правилу Литлвуда—Ричардсона ([6], § 16).

**Структура модулей $V_n$.** В. С. Дренски [4] доказал, что пространства $\Gamma_n(\mathfrak{M})$, $n \geq 2$ имеют следующую структуру: любой диаграмме с двумя или тремя строками соответствует ровно один ненулевый неприводимый подмодуль $\Gamma(\mathfrak{M})$; остальным диаграммам соответствуют только нулевые подмодули $\Gamma_n(\mathfrak{M})$.

Для $n \leq 4$ очевидно, что модули $V_n$ — нулевые.

Предложение 1. $V_5 = M(D, f_1) \oplus M(D, f_2) \oplus M(D, f_3)$, где

$$\bar{f}_1 = [\sigma(1), \sigma(2)]\,[\sigma(3), x_1^{(2)}] - [\sigma(1), x_1^{(2)}]\,[\sigma(2), \sigma(3)], \quad D = [3,1^2]$$

$$\bar{f}_2 = [\sigma(1), \sigma(2)]\,[\sigma(3), \sigma(4), x_1], \quad D = [2, 1^3]$$

$$\bar{f}_3 = [\sigma(1), \sigma(2), x_1]\,[\sigma(3), \sigma(4)], \quad D = [2, 1^3]$$

Доказательство. При доказательстве этого и следующих предложений будем работать с симметризациями базисных элементов пространств $\Gamma_n$, которые для краткости будем называть порождающими.

Согласно результатам работы А. П. Попова и П. Т. Чековой [8] о разложении $S_5$-модуля $\Gamma_5$ в сумму неприводимых компонент, порождающими являются следующие многочлены:

$$u_0 = [x_2, x_1^{(4)}], \quad D = [4, 1]$$

$$u_1 = [x_2, x_1]\,[x_2, x_1^{(2)}] \qquad u_1^* = [x_2, x_1^{(2)}]\,[x_2, x_1], \qquad D = [3, 2]$$

$$u_2 = [\sigma(1), \sigma(2)]\,[\sigma(3), x_1^{(2)}] \qquad u_2^* = [\sigma(1), x_1^{(2)}]\,[\sigma(2), \sigma(3)], \qquad D = [3, 1^2]$$

$$u_3 = [\sigma(1), \sigma(2)]\,[x_2, x_1, \sigma(3)] \qquad u_3^* = [x_2, x_1, \sigma(1)]\,[\sigma(2), \sigma(3)], \qquad D = [2^2, 1]$$

$$u_4 = [\sigma(1), \sigma(2)]\,[\sigma(3), \sigma(4), x_1] \qquad u_4^* = [\sigma(1), \sigma(2), x_1]\,[\sigma(3), \sigma(4)], \qquad D = [2, 1^3].$$

В многообразии $\mathscr{H}$ выполнены тождества $u_1 + u_1^* = 0$, получающиеся из тождества (1) при $x_3 = x_1$, и $u_3 + u_3^* = 0$, получающееся из $\operatorname{lin}[[x_1, x_2]^2, x_3] \mid x_1 \to x_1, u;\ x_2 \to x_2, v$ после кососимметризации по $(x_1, x_2, x_3)$ и по $(u, v)$ и замены $u = x_1$, $v = x_2$. Кроме этих тождеств, в многообразии $\mathfrak{M}$ выполнены еще следующие следствия из стандартного тождества $s_4 = 0$:

$u_2 - u_2^* = 0$, получающееся из $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}[\sigma(1), \sigma(2)]\,[\sigma(3), \sigma(4)]$ после замены $x_4$ на $[x_4, x_1]$;

$u_4 = u_4^* = 0$: коммутированием $c_4$ с $x_1$ получаем $u_4 + u_4^* = 0$, а после замены $x_4 = x_4 y$ кососимметризации по $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и замены $y$ на $x_1$ заключаем, что $u_4^* = 0$. Эти тождества не являются следствиями тождества (1), так как для диаграмм $[3, 1^2]$ и $[2, 1^3]$ из него получаются только нулевые многочлены. Этим предложение доказано — многочлены $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ и $\bar{f}_3$ совпадают с многочленами $u_2 - u_2^*$, $u_4$ и $u_4^*$.

Предложение 2. $V_6 = M(D, f_4) \oplus M(D, f_5) \oplus M(D, f_6) \oplus M(D, f_7)$, где

$$\bar{f}_4 = [\sigma(1), \sigma(2), x_1][\sigma(3), \sigma(4), x_1], \quad D = [3, 1^3]$$

$$\bar{f}_5 = [x_2, x_1][\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)], \quad D = [2^2, 1^2]$$

$$\bar{f}_6 = [\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1][\sigma(3), \sigma(4)], \quad D = [2^2, 1^2]$$

$$\bar{f}_7 = [\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), x_1, \sigma(5)], \quad D = [2, 1^4].$$

Доказательство. Учитывая результаты работы [8], относящиеся к разложению $S_6$-модуля $\Gamma_6$ и выполненные в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathscr{H}$ тождества пятой степени, которые получили в предыдущем случае, имеем следующую таблицу:

| диаграмма | порождающие элементы | тождества в многообразии $\mathfrak{M}$ | тождества в многообразии $\mathscr{H}$ |
|---|---|---|---|
| $[4, 2]$ | $a_1 = [x_2, x_1][x_2, x_1^{(3)}]$ | $a_1 = a_1^* = -b_1$ | $a_1 = a_1^* = -b_1$ |
| | $a_1^* = [x_2, x_1^{(3)}][x_2, x_1]$ | | |
| | $b_1 = [x_2, x_1^{(2)}]^2$ | | |
| $[4, 1^2]$ | $a_2 = [\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1^{(3)}]$ | $a_2 = -a_2^* = -b_2$ | $a_2 = -a_2^* = -b_2$ |
| | $a_2^* = [\sigma(1), x_1^{(3)}][\sigma(2), \sigma(3)]$ | | |
| | $b_2 = [\sigma(1), \sigma(2), x_1][\sigma(3), x_1^{(2)}]$ | | |
| $[3^3]$ | $a_3 = [x_2, x_1]^3$ | $4a_3 = b_3$ | $4a_3 = b_3$ |
| | $b_3 = [x_2, x_1, \sigma(1)][x_2, x_1, \sigma(2)]$ | | |
| $[3, 2, 1]$ | $a_4 = [\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1^{(2)}, \sigma(3)]$ | $a_4 = -a_4^* = -2c_4^*$ | $a_4 = -a_4^* = -2c_4^*$ |
| | $a_4^* = [x_2, x_1^{(2)}, \sigma(1)][\sigma(2), \sigma(3)]$ | $b_4 = c_4 = -b_4^*$ | $b_4 = c_4 = -b_4^*$ |
| | $b_4 = [\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1, \sigma(3), x_1]$ | $= -c_4^*$ | $= -c_4^*$ |
| | $b_4^* = [x_2, x_1, \sigma(1), x_1][\sigma(2), \sigma(3)]$ | | |
| | $c_4 = [\sigma(1), \sigma(2), x_1][x_2, x_1, \sigma(3)]$ | | |
| | $c_4^* = [x_2, x_1, \sigma(1)][\sigma(2), \sigma(3), x_1]$ | | |
| $[3, 1^3]$ | $a_5 = [\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1^{(2)}, \sigma(4)]$ | $a_5 = a_5^* = c_5$ | $a_5 = a_5^* = 0$ |
| | $a_5^* = [\sigma(1), x_1^{(2)}, \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)]$ | $= d_5 = 0$ | $c_5 + d_5 = 0$ |
| | $c_5 = \frac{1}{2}[\sigma(1), \sigma(2)] \circ [\sigma(3), \sigma(4), x_1^{(2)}]$ | | |
| | $d_5 = [\sigma(1), \sigma(2), x_1][\sigma(3), \sigma(4), x_1]$ | | |
| $[2^3]$ | $a_6 = [\sigma(1), \sigma(2)][\tau(1), \tau(2), \sigma(3), \tau(3)]$ | $a_6 = -b_6$ | $a_6 = -b_6$ |
| | $b_6 = [\sigma(1), \sigma(2), \tau(1)][\tau(2), \tau(3), \sigma(3)]$ | | |
| $[2^2, 1^2]$ | $a_7 = [x_2, x_1][\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)]$ | $a_7 = a_7^*$ | $a_7 = a_7^*$ |
| | $a_7^* = [\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1][\sigma(3), \sigma(4)]$ | $= b_7 = c_7 = 0$ | $4a_7 + 16a_7^* - c_7 = 0$ |

$$b_7=[\sigma(1),\ \sigma(2)]\,[\sigma(3),\ \sigma(4)][x_2,\ x_1]$$

$$c_7=[\sigma(1),\ \sigma(2),\ \tau(1)]\,[\sigma(3),\ \sigma(4),\ \tau(2)]$$

$[2, 1^4]$ $$a_8=[\sigma(1),\sigma(2)]\,[\sigma(3),\ \sigma(4),\ x_1,\sigma(5)] \qquad a_8=a_8^*=0 \qquad a_8=-a_8^*$$

$$a_8^*=[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1,\ \sigma(3)]\,[\sigma(4),\ \sigma(5)].$$

Это доказывает предложение, так как очевидно $\bar{f}_4=d_5$, $\bar{f}_5=a_7$, $\bar{f}_6=a_7^*$ и $\bar{f}_7=a_8$.

Предложение 3. *$V_7=M(D, f_8)$, где*

$$\bar{f}_8=[\sigma(1),\ \sigma(2)]\,[\sigma(3),\ \tau(1)]\,[\sigma(4),\ \sigma(5),\ \tau(2)], \quad D=[2^2,\ 1^3].$$

Доказательство. А. П. Попов [9] нашел порождающие элементы $S_7$-модуля $\Gamma_7$. Для наших целей, однако, нужно иметь и представления других многочленов из $\Gamma_7$, соответствующих рассматриваемым диаграммам седьмой степени, через порождающие. Получая эти представления, фактически мы повторим частично результаты А. Попова.

Согласно сказанному выше о том, как получаются следствия из тождеств данной степени, и правилу Литллвуда—Ричардсона, в пространстве $\Gamma_7$ есть следствия из тождеств $\bar{f}_i=0$, $i=4, 5, 6, 7$, соответствующие следующим диаграммам седьмой степени: $[5, 1^2]$, $[4, 2, 1]$, $[4, 1^3]$, $[3^2, 1]$, $[3, 2^2]$, $[3, 2, 1^2]$, $[3, 1^4]$, $[2^3, 1]$, $[2^2, 1^3]$, $[2, 1^5]$. Так как для некоторых из этих диаграмм число многочленов, которые придется представить через порождающие, слишком велико, мы дадим подробно результаты только для некоторых диаграмм, где хорошо иллюстрируется использованная техника.

Диаграмма $[4, 1^3]$. Порождающие многочлены здесь следующие:

$$\varphi_1=[\sigma(1),\ \sigma(2)]\,[\sigma(3),\ \sigma(4),\ x_1^{(3)}]\,; \quad \varphi_3=[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1^{(3)}]\,[\sigma(3),\ \sigma(4)]\,;$$

$$\varphi_2=[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ \sigma(4),\ x_1^{(2)}]\,; \quad \varphi_4=[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1^{(2)}]\,[\sigma(3),\ \sigma(4),\ x_1]\,;$$

$$\varphi_5=[\sigma(1),\ x_1]\,[\sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ \sigma(4),\ x_1]\,; \quad \varphi_6=[\sigma(1),\ x_1]\,[\sigma(2),\ \sigma(3),\ x_1]\,[\sigma(4),\ x_1]\,;$$

$$\varphi_7=[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ x_1]\,[\sigma(4),\ x_1].$$

Остальные многочлены из пространства $\Gamma_7$, соответствующие этой диаграмме, выражаются через порождающие при помощи непосредственных вычислений. Так, например,

$$[\sigma(1),\ \sigma(2)]\,[\sigma(3),\ x_1]\,[\sigma(4),\ x_1^{(2)}]=-2[\sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ x_1]\,[\sigma(4),\ x_1^{(2)}]$$

$$=[\sigma(1),\ x_1]\,[\sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ \sigma(4),\ x_1]=\varphi_5\,;$$

$$[\sigma(1),\ x_1]\,[\sigma(2),\ \sigma(3)]\,[\sigma(4),\ x_1^{(2)}]=2[\sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ x_1]\,[\sigma(4),\ x_1^{(2)}]$$

$$=-[\sigma(1),\ x_1]\,[\sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ \sigma(4),\ x_1]=-\varphi_5\,;$$

$$[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ x_1^{(2)},\ \sigma(4)]=[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ x_1,\ \sigma(4),\ x_1]$$

$$-[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1]\,[\sigma(3),\ x_1,\ [\sigma(4),\ x_1]]=\frac{1}{2}\,\varphi_2-2\varphi_7$$

и т. д. Используя эти представления, получаем систему уравнений для порождающих следующим образом: в $\operatorname{lin}(a_2,\ a_2^*,\ b_2)\,|\,x_1\to x_1,\ u,\ w,\ z$ положим $x_1=[x_4,\ x_1]$, а в $\operatorname{lin}(a_4, \ldots, c_4^*)\,|\,x_1\to x_1,\ u,\ w;\ x_2\to x_2,\ v-v=[x_4,\ z]$. Кососимметризуем по $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ и заменим $u$, $w$ и $z$ на $x_1$. Из тождественных соотношений между многочленами $a_2$, $a_2^*$ и $b_2$ и между многочленами $a_4$, $a_4^*$, $b_4$, $b_4^*$, $c_4$, $c_4^*$, выполненных в многообразии $\mathscr{H}$, следует

$$\varphi_5-2\varphi_6+\varphi_7=0;\quad \varphi_5-3\varphi_6+2\varphi_7=0;$$

$$2\varphi_1+2\varphi_3-\varphi_2-\varphi_4-10\varphi_5+28\varphi_6-10\varphi_7=0;$$

$$2\varphi_1+2\varphi_3-\varphi_2-\varphi_4-12\varphi_5+24\varphi_6-12\varphi_7=0;$$

$$\varphi_2+\varphi_4-12\varphi_5-12\varphi_7=0;\quad \varphi_1-\varphi_2+\varphi_4-12\varphi_5+6\varphi_6=0;$$

$$2\varphi_1-3\varphi_2+4\varphi_4-38\varphi_5+14\varphi_6+4\varphi_7=0.$$

Ранг полученной системы равен 7. Следовательно, диаграмме $[4, 1^3]$ соответствует только нулевый подмодуль $\Gamma_7(\mathscr{H})$.

Диаграмма $[3^2, 1]$. Порождающие здесь следующие:

$$\psi_1=[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1)][x_2, x_1, \sigma(3), \tau(2)];\quad \psi_1^*=[x_2, x_1, \sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \sigma(3), \tau(2)];$$

$$\psi_2=[x_2, x_1][\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1, \sigma(3)];\quad \psi_3=[\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1][x_2, x_1, \sigma(3)];$$

$$\psi_2^*=[x_2, x_1][x_2, x_1, \sigma(1)]\sigma(2), \sigma(3)];\quad \psi_3^*=[\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1, \sigma(3)][x_2, x_1];$$

$$\psi_2^{**}=[x_2, x_1, \sigma(1)][x_2, x_1][\sigma(2), \sigma(3)];\quad \psi_3^{**}=[x_2, x_1, \sigma(1)][\sigma(2), \sigma(3)][x_2, x_1].$$

Получим с помощью „оператора" *Assym* представления некоторых других многочленов из $\Gamma_7$, соответствующих рассматриваемой диаграмме, через порождающие. Обозначим $[\sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \tau(2)][x_2, x_1, \sigma(3)]=a$, $[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \tau(1)][x_2, x_1, \tau(2)]=b$, $[\sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \sigma(3)][x_2, x_1, \tau(2)]=c$.

Из $\quad Assym[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)][x_2, x_1, y_2]=0$,
$Assym[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), y_2][x_2, x_1, \sigma(4)]=0$ и
$Assym[\sigma(1), y_2][\sigma(2), \sigma(3)][x_2, x_1, \sigma(4)]=0$
следует $2a-b=-2\psi_3$, $b+c=0$, $c-2a=2\psi_2$, или

$$[\sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \tau(2)][x_2, x_1, \sigma(3)]=-\frac{1}{2}(\psi_2+\psi_3);$$

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \tau(1)][x_2, x_1, \tau(2)]=-[\sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \sigma(3)][x_2, x_1, \tau(2)]=\psi_3-\psi_2.$$

Дальше $[\sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \rho(1)][\tau(2), \rho(2), \sigma(3)]=-[\sigma(1), x_1][\sigma(2), x_2][x_2, x_1, \sigma(3)]-[\sigma(1)$ $x_2][\sigma(2), x_1][x_1, x_2, \sigma(3)]=-[\sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \tau(2)][x_2, x_1, \sigma(3)]=\frac{1}{2}(\psi_2+\psi_3)$.

Из тождества $u_3+u_3^*=0$, умноженном на $[x_2, x_1]$, слева и справа получаем уравнения

$$\psi_2+\psi_2^*=0,\quad \psi_3^*+\psi_3^{**}=0.$$

В $\lin(a_4, \ldots, c_4^*)\,|\,x_1\to x_1, u, w;\ x_2\to x_2, v$ кососимметризуем по $(u, v)$ и по $(x_1, x_2, x_3)$ и положим $u=x_1$, $v=x_2$, $w=[x_2, x_1]$. Из выполненных в многообразии $\mathscr{H}$ тождеств $b_4+b_4^*=0$, $c_4+c_4^*=0$, $a_4+2c_4^*=0$ и $b_4+c_4^*=0$ получаем

$$4\psi_2-\psi_2^*-5\psi_2^{**}+5\psi_3+\psi_3^*-4\psi_3^{**}=0;$$

$$\psi_1-\psi_1^*+\psi_2+\psi_2^{**}-\psi_3-\psi_3^{**}=0;$$

$$2\psi_1-8\psi_1^*-10\psi_2+23\psi_2^{**}+13\psi_3-3\psi_3^*-23\psi_3^{**}=0;$$

$$\psi_1-4\psi_1^*-5\psi_2^*+9\psi_2^{**}+9\psi_3-4\psi_3^*-9\psi_3^{**}=0.$$

В $\lin(4a_7+16a_7^*-c_7=0)\,|\,x_1\to x_1, u;\ x_2\to x_2, v$ кососимметризуем как выше и положим $u=x_1$, $v=x_2$, $x_4=[x_2, x_1]$. Получаем уравнение

$$\psi_1+\psi_1^*-4\psi_2-4\psi_2^*-16\psi_2^{**}-16\psi_3=0.$$

Полученная система уравнений имеет ранг 7, т. е. диаграмме $[3^2, 1]$ соответствует только один ненулевый неприводимый подмодуль $\Gamma_7(\mathscr{H})$.

Аналогично показывается, что всем остальным диаграммам седьмой степени, число строк которых меньше или равно трем, соответствует ровно по одному ненулевому неприводимому подмодулю $\Gamma_7(\mathscr{H})$, а диаграммам, у которых число строк больше или равно четырем, соответствуют только нулевые подмодули, за исключением диаграммы $[2^2, 1^3]$, которой, в отличие от многообразия $\mathfrak{M}$, отвечает один ненулевый неприводимый подмодуль $\Gamma_7(\mathscr{H})$.

Следующие многочлены порождают диаграмму $[2^2, 1^3]$

$$\eta_1=[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)][x_2, x_1, \sigma(5)]; \quad \eta_2=[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \tau(1)][\sigma(4), \sigma(5), \tau(2)];$$

$$\eta_1^*=[\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1, \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5)]; \quad \eta_2^*=[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), \tau(1)][\sigma(5), \tau(2)];$$

$$\eta_1^{**}=[x_2, x_1, \sigma(1)][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5)]; \quad \eta_2^{**}=[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1)][\sigma(3), \sigma(4)][\sigma(5), \tau(2)].$$

Из $Assym\,[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4)][\sigma(5), \sigma(6), y_2]=0$ получаем

$$[\sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5), \tau(2)]=-\eta_1-\eta_2.$$

Аналогично имеем

$$[\sigma(1), \tau(1)][\sigma(2), \sigma(3), \tau(2)][\sigma(4), \sigma(5)]=-\eta_1^*+\eta_2^*;$$

$$[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1)][\sigma(3), \tau(2)][\sigma(4), \sigma(5)]=\eta_1^{**}-\eta_2^{**}.$$

Согласно тождеству Якоби, $[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1), \sigma(3)]=-[\sigma(1), \sigma(2), [\sigma(3), \tau(1)]]$, т. е.

$$[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1)][\sigma(3), \sigma(4), \tau(2), \sigma(5)]=\eta_1^{**}-2\eta_2^{**};$$

$$[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5), \tau(2)]=-\eta_1-2\eta_2.$$

Из равенства $[\ldots, \sigma(1), \sigma(2)]=\frac{1}{2}[\ldots, [\sigma(1), \sigma(2)]]$ следует

$$[\sigma(1), \sigma(2)][x_2, x_1, \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)]=\frac{1}{2}(\eta_1-\eta_1^*);$$

$$[x_2, x_1, \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5)]=\frac{1}{2}(\eta_1^*-\eta_1^{**}).$$

Так как $[\sigma(3), \sigma(4), \tau(1), \tau(2), \sigma(5)]=-2[\sigma(3), [x_2, x_1], \sigma(4), \sigma(5)]$,

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), \tau(1), \tau(2), \sigma(5)]=-\eta_1+\eta_1^*;$$

$$[\sigma(1), \sigma(2), \tau(1), \tau(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5)]=-\eta_1^*+\eta_1^{**}.$$

Остальные многочлены из пространства $\Gamma_7$, соответствующие диаграмме $[2^2, 1^3]$ выражаются через участвующие в полученных равенствах.

В $\mathrm{lin}\,(a_5^*, c_5, d_5)\,|\,x_1 \to x_1, u, w$ положим $w=[x_5, v]$, в $\mathrm{lin}\,(a_6, b_6)\,|\,x_1 \to x_1, u;\ x_2 \to x_2, v;\ x_3 \to x_3,\ t-t=[x_4, x_5]$. $\mathrm{lin}\,(a_7, b_7, c_7)\,|\,x_1 \to x_1, u;\ x_2 \to x_2$, $v$ прокоммутируем с $x_5$, а $\mathrm{lin}\,(a_8, a_8^*)\,|\,x_1 \to x_1$, $u$ прокоммутируем с $v$. После кососимметризации по $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ и по $(u, v)$ и замены $u=x_1$, $v=x_2$, из соответствующих тождеств между порождающими диаграмм шестой степени, выполненных в многообразии $\mathscr{H}$, получаем уравнения

$$\eta_1+4\eta_1^*-4\eta_1^{**}+2\eta_2-\eta_2^*+\eta_2^{**}=0;$$

$$16\eta_1+11\eta_1^*-5\eta_1^{**}+11\eta_2-22\eta_2^*-11\eta_2^{**}=0;$$

$$\eta_1+2\eta_1^*+\eta_1^{**}+2\eta_2-4\eta_2^*-2\eta_2^{**}=0;$$

$$2\eta_1+13\eta_1^*+6\eta_1^{**}-\eta_2-\eta_2^*-2\eta_2^{**}=0;$$

$$2\eta_1+\eta_1^*-\eta_1^{**}+\eta_2-2\eta_2^*-\eta_2^{**}=0.$$

Следовательно, $\eta_1=\eta_1^*=\eta_1^{**}=0$, $\eta_2=\eta_2^*=-\eta_2^{**}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что все другие уравнения для многочленов $\eta_i$, которые можно получить как следствия из выполненных в многообразии $\mathscr{H}$ тождеств между порождающими пятой и шестой степени, являются следствиями уже полученных выше уравнений.

Этим предложение доказано.

Предложение 4. *Для любого $n\geqq 8$, $S_n$-модуль $V_n$ нулевый.*

Доказательство. Согласно правилу Литллвуда—Ричардсона, следствия восьмой степени из ненулевых в многообразии $\mathscr{H}$ порождающих диаграмм $[2^2, 1^3]$ соответствуют следующим диаграммам: $[4, 2, 1^2]$, $[4, 1^4]$, $[3^2, 1^2]$, $[3, 2^2, 1]$, $[3, 2, 1^3]$, $[3, 1^5]$, $[2^4]$, $[2^3, 1^2]$, $[2^2, 1^4]$ и $[2, 1^6]$. Так как эти порождающие — произведения трех коммутаторов, то и следствия из них, которые мы рассмотрим, будут произведениями не менее трех коммутаторов. Список таких порождающих для упомянутых диаграмм (кроме диаграммы $[2^2, 1^4]$) получен А. Каспаряном [10]. То, что они аннулируются в многообразии $\mathscr{H}$, доказывается аналогично предыдущему предложению. Значительное сокращение проводимых вычислений достигается, если предварительно вывести некоторые следствия из выполненных в многообразии $\mathscr{H}$ тождеств седьмой степени, которые мы уже нашли. С помощью этих следствий удается легко получить нужное число уравнений для порождающих, в большинстве случаев даже не обращаясь к представлениям других многочленов восьмой степени через порождающие. Заметим, что многочлен $f$ является тождеством алгебры A тогда и только тогда, когда $e(d)f=0$ в алгебре $A$ для любой диаграммы $D$, а порождающие всех диаграмм седьмой степени, число строк которых больше 3, равны нулю в многообразии $\mathscr{H}$, за исключением порождающих диаграммы $[2^2, 1^3]$. Таким образом, чтобы доказать эти тождества, достаточно показать, что они аннулируются симметризатором Юнга диаграммы $[2^2, 1^3]$. Этим способом доказываются, например, тождества

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), u][\sigma(4), \sigma(5), u]=0; \quad [\sigma(1), u][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5), u]=0;$$

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), u][\sigma(5), u]=0; \quad [\sigma(1), u][\sigma(2), \sigma(3), u][\sigma(4), \sigma(5)]=0;$$

$$[\sigma(1), \sigma(2), u][\sigma(3), \sigma(4)][\sigma(5), u]=0; \quad [\sigma(1), \sigma(2), u][\sigma(3), u][\sigma(4), \sigma(5)]=0;$$

$$[\sigma(1), u][\sigma(2), u][\sigma(3), \sigma(4), u]=0; \quad [\sigma(1), u][\sigma(2), \sigma(3), u][\sigma(4), u]=0;$$

$$[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), u^{(2)}][\sigma(4), u]=0; \quad [\sigma(1), u^{(2)}][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), u]=0;$$

$$[\sigma(1), u][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), u^{(2)}]=0; \quad [\sigma(1), u][\sigma(2), u^{(2)}][\sigma(3), \sigma(4)]=0;$$

$$[\sigma(1), u^{(2)}][\sigma(2), u][\sigma(3), \sigma(4)]=0.$$

С их помощью рассмотрим диаграмму $[4, 1^4]$. Ее порождающие следующие:

$$\alpha_1=[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1][\sigma(4), x_1][\sigma(5), x_1]; \quad \alpha_8=[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), x_1][\sigma(4), \sigma(5), x_1^{(2)}];$$

$$\alpha_2=[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), x_1][\sigma(5), x_1^{(2)}]; \quad \alpha_9=[\sigma(1), \sigma(2)][\sigma(3), \sigma(4), x_1^{(2)}][\sigma(5), x_1];$$

$$\alpha_3=[\sigma(1), \sigma(2), x_1][\sigma(3), \sigma(4)][\sigma(5), x_1^{(2)}]; \quad \alpha_{10}=[\sigma(1), \sigma(2), x_1^{(2)}][\sigma(3), \sigma(4)][\sigma(5), x_1];$$

$$\alpha_4=[\sigma(1), \sigma(2), x_1][\sigma(3), x_1^{(2)}][\sigma(4), \sigma(5)]; \quad \alpha_{11}=[\sigma(1), x_1][\sigma(2), \sigma(3)][\sigma(4), \sigma(5), x_1^{(2)}];$$

$\alpha_5=[\sigma(1),\ \sigma(2)]\,[\sigma(3),\ x_1^{(2)}]\,[\sigma(4),\ \sigma(5),\ x_1]$; $\quad \alpha_{12}=[\sigma(1),\ x_1]\,[\sigma(2),\ \sigma(3),\ x_1^{(2)}]\,[\sigma(4),\ \sigma(5)]$;

$\alpha_6=[\sigma(1),\ x_1^{(2)}]\,[\sigma(2),\ \sigma(3)]\,[\sigma(4),\ \sigma(5),\ x_1]$; $\quad \alpha_{13}=[\sigma(1),\ \sigma(2),\ x_1^{(2)}]\,[\sigma(3),\ x_1]\,[\sigma(4),\ \sigma(5)]$.

$\alpha_7=[\sigma(1),\ x_1^{(2)}]\,[\sigma(2),\ \sigma(3),\ x_1]\,[\sigma(4),\ \sigma(5)]$;

Коммутируем первые шесть из написанных выше тождеств с $x_1$; остальные семь коммутируем с $x_5$ и кососимметризуем по $(x_1, \dots, x_5)$. Заменяем везде $u$ на $x_1$ и получаем систему уравнений

$$\alpha_3-\alpha_5+\alpha_6-\alpha_8=0; \qquad \alpha_2+\alpha_5-\alpha_7-\alpha_{12}=0;$$
$$\alpha_2+\alpha_5-\alpha_6-\alpha_{11}=0; \qquad \alpha_3-\alpha_4-\alpha_7+\alpha_{10}=0;$$
$$\alpha_2-\alpha_4-\alpha_7+\alpha_9=0; \qquad \alpha_3-\alpha_4+\alpha_6-\alpha_{13}=0;$$
$$\alpha_2-\alpha_3+\alpha_5-\alpha_6=0; \qquad 4\alpha_1+\alpha_4+\alpha_{12}=0;$$
$$\alpha_2-\alpha_4+\alpha_5-\alpha_7=0; \qquad 4\alpha_1+\alpha_6+\alpha_{10}=0;$$
$$4\alpha_1+\alpha_2-\alpha_8=0; \qquad 4\alpha_1+\alpha_7+\alpha_{13}=0;$$
$$4\alpha_1-\alpha_5-\alpha_9=0$$

Ранг этой системы равен числу порождающих: 13.

Аналогично, с использованием и других тождеств написанного выше вида, доказывается, что порождающие всех упомянутых диаграмм восьмой степени, которые являются произведениями не менее трех коммутаторов, аннулируются в многообразии $\mathscr{H}$.

Пусть теперь многочлен $f\in V_9$. Тогда $f$ является следствием либо многочлена из $V_8$, и, следовательно, равен нулю, либо многочлена из $V_7$. В последнем случае $f$ равен произведению некоторого многочлена $\varphi\in V_7$ на двойной коммутатор. Так как модуль $V_7$ порождается многочленом $f_8$, можем считать, что $\varphi=f_8$. Но многочлен $\bar f_8$ получается из многочлена шестой степени $[\sigma(1),\ \sigma(2)]\,[\sigma(3),\ u]\,[\sigma(4),\ u]$ линеаризацией по $u$: $u\to u_1,\ u_2$, заменой $u_2=[x_5,\ v]$, кососимметризацией по $(x_1, \dots, x_5)$ и по $(u_1, v)$ и заменой $u_1$ на $x_1$, $v$ на $x_2$. Следовательно, линеаризации произведений $\bar f_8\cdot[u,\ v]$ и $[u,\ v]\cdot\bar f_8$ являются значениями многочлена из $V_8$, т. е. равны нулю в многообразии $\mathscr{H}$. Отсюда, согласно теореме о расклонении ([6]), получаем, что для любого $n\geqq 8$ модули $V_n$ — нулевые.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Размыслов. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика*, **12**, № 1, 1973, 83—113.
2. Г. Генов. Некоторые шпехтовые многообразия ассоциативных алгебр. *Плиска*, **2**, 1981, 30—40.
3. В. Н. Латышев. Частично упорядоченные множества и нематричные тождества ассоциативных алгебр. *Алгебра и логика*, **15**, 1976, 53—70.
4. В. С. Дренски. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сб.* **115** (157), № 1 (5), 1931, 98—115.
5. W. Specht. Gesetze in Ringen I, *Math. Z.*, **52**, 1950, 557—569.
6. Г. Джеймс. Теория представлений симметрических групп. М., 1982.
7. А. П. Попов. Тождества тензорного квадрата алгебры Грассмана. *Алгебра и логика*, **21** № 4, 1984, 442—471.
8. А. П. Попов, П. Т. Чекова. Многообразия ассоциативных алгебр с единицей, решетка подмногообразий которых дистрибутивна. *Год. Соф. унив.*, **77**, кн. 1, 1983.
9. A. P. Popov. Module structure of space of proper polynomials of degree seven. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **38**, 1985, No 3, 295—298.
10. А. Каспарян. Полиноми тъждества в матричните алгебри. (Дипл. раб.) С., 1984

*Высший машинно-электротехнический институт, Кафедра математики, Варна — 9010, Болгария*

*Поступила 25. 2. 1986*