Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ МИНИМАКСНОЙ ОЦЕНКИ В ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

РОСИЦА ДОДУНЕКОВА

Исследуются свойства линейных минимаксных оценок для параметров частично наблюдаемого процесса (ξ, η) диффузионного типа.

Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ заданы независимые стандартные винеровские процессы w и $\widetilde{w}$ и случайный процесс (ξ_t, η_t), $0 \leqq t \leqq T$ со стохастическим дифференциалом

$$(1)\qquad \begin{aligned} d\xi_t &= (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t) + \ldots + \lambda_n P_n(t))dt + dw_t, \\ d\eta_t &= \xi_t dt + d\widetilde{w}_t, \end{aligned}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ — неизвестный параметр из R^n и $\xi_0 = \eta_0 = 0$. Будем предпола гать, что функции $P_i(i)$, $i = 1, 2, \ldots n$ линейно независимые, известные и $P_i(t) \in L_2[0, T]$ Далее мы предполагаем, что из двух компонент рассматриваемого процесса наблюдается лишь процесс η, а процесс ξ недоступен наблюдению. Задача состоит в следующем: изучить свойства линейной минимаксной оценки, построенной по наблюдению процесса η, для линейной комбинации $(\lambda, X) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, где x_i — произвольные фиксированные числа $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$.

Пусть $\mathscr{F}_T^\eta$ — пополненная сигма-алгебра, порожденная траекториями $\{\eta_t, 0 \leqq t \leqq T\}$. Любую $\mathscr{F}_T^\eta$-измеримую случайную величину будем называть оценкой для (λ, X). В качестве меры близости между произвольной оценкой $\lambda_T(\eta)$ и величиной (λ, X) будем рассматривать среднеквадратический риск $\boldsymbol{E}\{|\lambda_T(\eta) - (\lambda, X)|^2\}$.

Обозначим через M класс линейных оценок вида

$$\lambda_T(\eta) = \int_0^T l(t) d\eta_t,$$

где весовая функция $l(t)$ берется из пространства $L_2[0, T]$.

Определение 1. *Оценка $\lambda_T^*(\eta) \in M$ называется линейной минимаксной для (λ, T), если выполняется равенство*

$$(2)\qquad \sup_{\lambda \in R^n} \boldsymbol{E}\{|\lambda_T^*(\eta) - (\lambda, X)|^2\} = \inf_{\lambda_T(\eta) \in M} \sup_{\lambda \in R^n} \boldsymbol{E}\{|\lambda_T(\eta) - (\lambda, X)|^2\}.$$

Когда в правой части (2) инфимум берется по всем оценкам и $\lambda_T(\eta)$ — оценка, на которой этот инфимум достигается, то эта оценка называется минимаксной для (λ, X).

Из определения ясно, что для нахождения оценки $\lambda_T^*(\eta)$ достаточно ограничиться рассмотрением оценок $\lambda_T(\eta)$, удовлетворяющих условию конечности супремума, т. е.,

$$\sup_{\lambda \in R^n} E\{|\lambda_T(\eta)-(\lambda, X)|^2\}<\infty.$$

Пусть теперь $\lambda_T(\eta)$ — линейная оценка с весовой функцией l. Пользуясь равенством

$$E\{(\int_0^T l(t)w_t dt)^2\}=\int_0^T (\int_t^T l(s)ds)^2\,dt,$$

которое легко проверить с помощью формулы Ито, подсчитываем, что

$$E\{|\lambda_T(\eta)-(\lambda, X)|^2\}=(\sum_{i=1}^n \lambda_i (\int_0^T l(t)\int_0^t P_i(s)dsdt-x_i))^2$$
$$+\int_0^T l^2(t)dt+\int_0^T (\int_t^T l(s)ds)^2 dt.$$

Отсюда и из условия конечности супремума следует, что должны выполняться следующие равенства:

$$\int_0^T l(t)Q_i(t)dt=x_i, \quad i=1, 2, \dots n$$

(мы обозначили $Q_i(t)=\int_0^t P_i(s)ds$).

Следовательно, если линейная минимаксная оценка $\lambda_T^*(\eta)$ существует, то ее весовая функция является решением задачи

$$\int_0^T l^2(t)dt+\int_0^T (\int_t^T l(s)ds)^2\,dt \to \inf,$$

(3)

$$\int_0^T l(t)Q_i(t)dt=x_i, \quad i=1, 2, \dots n; \quad l\in L_2[0, T].$$

Ниже мы сформулируем без доказательства лемму о решении этой задачи, отметив лишь, что ее доказательство основывается на результатах в [2]. Обозначим

$$(f_1, f_2)_T=\int_0^T f_1(t)f_2(t)dt, \quad f_1, f_2 \in L_2[0, T],$$

и введем матрицу $\Gamma=(\gamma_{ij})$, $i, j=1, 2, \dots n$, где

$$\gamma_{ij}=((ch(t))^{-1}\int_0^t ch(s)P_i(s)ds,\ (ch(t))^{-1}\int_0^t ch(s)P_j(s)ds)_T.$$

Пусть $\tilde\psi=(\tilde\psi_1, \tilde\psi_2, \dots \tilde\psi_n)$ — решение системы уравнений

$$\Gamma\psi=X, \tag{4}$$

где $X=(x_1, x_2, \dots x_n)$. (Это решение существует и единственно, так как $\det\Gamma>0$ и X — ненулевой вектор.) Определим функции

$$\varphi_i(t)=\int_0^t e^s P_i(s)ds, \quad i=1, 2, \dots n, \ t \in [0, T].$$

Лемма 1. *Решение задачи (3) единственно и задается равенством*

$$l^*(t)=\sum_{i=1}^{n} \tilde{\psi}_i(e^{-t}\varphi_i(t)-e^t\int_t^T e^{-2s}\varphi_i(s)ds, \quad t \in [0, T]. \tag{5}$$

При этом минимальное значение в (3) равно $(\Gamma^{-1}X, X)$.

Теорема 1. *Линейная минимаксная оценка* $\lambda_T^*(\eta)$ *для* (λ, X) *в задаче* (1) *существует и единственна. Соответствующая оптимальная весовая функция* l^* *задается равенством* (5). *Оценка* $\lambda_T^*(\eta)$ *несмещенная и ее дисперсия равна* $(\Gamma^{-1}X, X)$.

Доказательство. Положим

$$\lambda_T^*(\eta) = \int_0^T l^*(t)d\eta_t, \tag{6}$$

где l^* определяется равенством (5). Если $\lambda_T(\eta)$ — произвольная линейная оценка с весовой функцией $l(t)$, $t \in [0, T]$ и эта оценка удовлетворяет условию конечности супремума, то

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda \in R^n} \boldsymbol{E}\{|\lambda_T(\eta)-(\lambda, X)|^2\}\\ &=\int_0^T l^2(t)dt+\int_0^T(\int_t^T l(s)ds)^2dt\\ &\geqq \int_0^T (l^*(t))^2dt+\int_0^T(\int_t^T l^*(s)ds)^2dt\\ &=\sup_{\lambda \in R^n} \boldsymbol{E}\{|\lambda_T^*(\eta)-(\lambda, X)|^2\},\end{aligned}$$

что доказывает минимаксность оценки $\lambda_T^*(\eta)$ из (6). Единственность линейной минимаксной оценки следует из приведенной выше леммы 1. Из представления

$$\lambda_T^*(\eta)=(\lambda, X)+\int_0^T(\int_t^T l^*(s)ds)dw_t+\int_0^T l^*(t)d\tilde{w}_t$$

следует, что

$$\boldsymbol{E}\lambda_T^*(\eta)=(\lambda, X),$$

$$\boldsymbol{D}\lambda_T^*(\eta)=\int_0^T(\int_t^T l^*(s)ds)^2dt+\int_0^T(l^*(t))^2dt=(\Gamma^{-1}X, X).$$

Этим теорема 1 доказана.

Если в определении 1 положим $x_k=1$, $x_i=0$, $i\neq k$, где k — фиксированно, $1\leq k \leq n$, то тогда $(\lambda, X)=\lambda_k$. В этом случае обозначим линейную минимаксную оценку для параметра λ_k чрез $\lambda_k^*(\eta)$.

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\lambda_T^*(\eta)=\sum_{k=1}^{n} x_k\lambda_k^*(\eta).$$

Для доказательства достаточно заметить, что решение $\widetilde{\psi}$ системы (4) представляется в виде $\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\psi}^{(k)}$, где $\widetilde{\psi}^{(k)}$ — решение (4) в случае, когда координата с номером k в векторе X равна 1, а все остальные координаты вектора X равны 0.

Следствие 2. *Выполняется равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{E}\{|\lambda_k^*(\eta)-\lambda_k|^2\}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{kk}(\det\Gamma)^{-1},$$

где Γ_{kk} — алгебраическое дополнение элемента γ_{kk} матрицы Γ.

Теорема 2. *Вектор линейных минимаксных оценок*

$$\lambda^*=(\lambda_1^*(\eta),\ \lambda_2^*(\eta),\ldots\lambda_n^*(\eta))$$

является оценкой максимального правдоподобия для вектора $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n)$, построенной по наблюдениям $\{\eta_t,\ 0\leqq t\leqq T\}$.

Доказательство. Пусть μ_η, $\eta_{\widetilde{w}}$ — меры, порожденные процессами η и, $\widetilde{w}$ в измеримом пространстве (C_T, B_T) непрерывных на интервале $[0, T]$ функций, равных нулю при $t=0$. Так как ξ есть непрерывный в среднеквадратическом смысле гауссовский процесс, то по теореме 7.15 из [1] меры μ_η и $\mu_{\widetilde{w}}$ абсолютно непрерывные и производная Радона—Никодима имеет вид

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_{\widetilde{w}}}(\eta)=\exp\{\int_0^T m_t(\eta)d\eta_t-\frac{1}{2}\int_0^T m_t^2(\eta)\,dt\},$$

где $m_t(\eta)=\boldsymbol{E}(\xi_t\,|\,\mathscr{F}_t^\eta)$.

Тогда оценка максимального правдоподобия для λ определяется как решение системы уравнений

$$\frac{d}{d\lambda_j}\{\int_0^T m_t(\eta)d\eta_t-\frac{1}{2}\int_0^T m_t^2(\eta)dt\}=0,\quad 1\leq j\leq n. \tag{7}$$

Сначала найдем $m_t(\eta)$. Из гауссовости системы (ξ_t, η_t), $0\leqq t\leqq T$, по теореме 12.1 из [1] величина $m_t(\eta)$ и условная среднеквадратическая ошибка $\gamma_t=\boldsymbol{E}[(\xi_t-m_t)^2\,|\,\mathscr{F}_t^\eta]$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} dm_t&=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i(t))dt+\gamma_t(d\eta_t-m_t dt),\\ \dot{\gamma}_t&=1-\gamma_t^2, \end{aligned}\tag{8}$$

с начальными условиями $m_0=0$, $\gamma_0=0$. Функция $\gamma_t=th(t)$ является решением второго уравнения в (8). Применяя формулу Ито можно показать, что функция

$$m_t=\exp\{-\int_0^t\gamma_s ds\}\times\{\int_0^T\exp[\int_0^s\gamma_u du](\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i(s))ds+\int_0^t\gamma_s\exp[\int_0^s\gamma_u du]d\eta_s\}$$

является решением первого уравнения в (8). Для системы уравнений правдоподобия (7) получаем

$$\int_0^T (ch(t))^{-1} \int_0^t ch(s)P_j(s)ds(d\eta_t - m_t dt) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

Подставляя вектор линейных минимаксных оценок в левую часть полученной системы и пользуясь теоремой Фубини для стохастических интегралов (теорема 5.15 из [1]), завершаем доказательство теоремы 2.

Теорема 3. *Линейная минимаксная оценка для величины* (λ, X) *в задаче* (1) *является минимаксной в классе всех оценок для* (λ, X).

Доказательство оптимальности оценки $\lambda_T^*(\eta)$ содержится в [4], и здесь мы не будем его излагать. Однако, важно отметить, что теорема 3 дает достаточно основания применять линейную оценку $\lambda_T^*(\eta)$ в практических моделях, описываемых схемой (1), а явный вид весовой функции $l^*(t)$, $t \in [0, T]$, входящей в оценку $\lambda_T^*(\eta)$ делает это применение возможным.

Следующий результат касается асимптотических свойств вектора минимаксных оценок. Следуя [3], введем

Определение 2. *Пусть* $\lambda_T(\eta) = (\lambda_T^{(1)}(\eta), \lambda_T^{(2)}(\eta), \ldots \lambda_T^{(n)}(\eta))$ — *произвольная оценка для вектора* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$. *Она называется равномерно состоятельной для* λ *при* $T \to \infty$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *имеет место соотношние*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sup_{\lambda \in R^n} \boldsymbol{P}\{|\lambda_T^{(i)}(\eta) - \lambda_i| > \varepsilon\} \to 0 \text{ при } T \to \infty.$$

Теорема 4. *Вектор линейных минимаксных оценок является равномерно состоятельной оценкой для* λ *тогда и только тогда, когда*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(\Gamma) \to \infty, \text{ при } T \to \infty,$$

где $\mu_i(\Gamma)$ — *собственные числа матрицы* Γ.

Доказательство. Необходимость. Пусть для $1 \leq i \leq n$ имеем

$$\lambda_i^*(\eta) \xrightarrow{P} \lambda_i, \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Так так $\lambda_i^*(\eta) \sim \mathcal{N}(\lambda_i, \Gamma_{ii}(\det\Gamma)^{-1})$ (ввиду теоремы 1 и следствия к ней), то при $T \to \infty$,

$$\Gamma_{ii}(\det\Gamma)^{-1} \to 0, \quad \sum_{i=1}^n \Gamma_{ii}(\det\Gamma)^{-1} \to 0,$$

т. е. для матрицы Γ^{-1} имеем $\sum_{i=1}^n \mu_i(\Gamma^{-1}) \to 0$ и значит $\mu_i(\Gamma) \to \infty$, $1 \leq i \leq n$, при $T \to \infty$.

Достаточность. Очевидно, если

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(\Gamma) \to \infty, \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

то

$$\lambda_i^*(\eta) \xrightarrow{P} \lambda_i, \quad \text{когда} \quad T \to \infty.$$

Имеем

$$\max_{1\leq i\leq n}\sup_{\lambda\in R^n} \boldsymbol{P}\{|\lambda_i^*(\eta)-\lambda_i|>\varepsilon\}$$

$$\leq(1/\varepsilon^2)\max_{1\leq i\leq n}\sup_{\lambda\in R^n}\boldsymbol{E}\{|\lambda_i^*(\eta)-\lambda_i|^2\}$$

$$=(1/\varepsilon^2)\max_{1\leq i\leq n}\Gamma_{ii}(\det\Gamma)^{-1}$$

$$\leq(1/\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ii}(\det\Gamma)^{-1}\to 0 \quad \text{при} \quad T\to\infty,$$

что и доказывает равномерную состоятельность оценки λ^*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. М., 1974.
2. В. Й. Аркин. О бесконечномерном аналоге задач невыпуклого программирования. *Кибернетика*, № 2, 1967, 87—93.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский. Асимптотическая теория оценивания. М., 1979.
4. Р. Д. Додунекова. Минимаксен подход на оценяване в задачи по непълни данни. Кандидатска дисертация. С., 1984.

Софийский университет
Факультет математики и информатики
1126 София, Болгария

Поступила 2. 7. 1984
В переработанном виде 3. 8. 1987