Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР, 1

ВЕСЕЛИН С. ДРЕНСКИ

Многие свойства любого многообразия $\mathfrak{U}$ ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 зависят от поведения последовательности коразмерностей $c_n(\mathfrak{U})$, $n=1, 2, \ldots$ В работе исследуются многообразия со следующим экстремальным свойством: $\lim_{n\to\infty} (c_n(\mathfrak{U})^{1/n}$ существует и для любого собственного подмногообразия $\mathfrak{P}$ выполнено $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{H}))^{1/n} > \limsup (c_n(\mathfrak{V}))^{1/n}$. Основной результат утверждает, что этим свойством обладают многообразия $\mathfrak{W}_k=\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}_k=\mathfrak{N}_k\mathfrak{L}_2$, определенные соответственно тождествами $[x_1, x_2] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}]=0$ и $[x_1, x_2, x_3] \ldots [x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}]=0$. Аналогичное тверждение доказано и для многообразия алгебр Ли $\mathfrak{N}_k\mathfrak{a} \cap \mathfrak{A}^3$.

1. Введение. В [1] А. Регев поставил начало систематического исследования последовательности коразмерностей T-идеалов и применение коразмерностей в теории PI-алгебр. Пусть U является T-идеалом свободной алгебры $K\langle X\rangle$ над полем K характеристики 0 и $\mathfrak{U}$ — соответствующее многообразие алгебр. Существует число d такое, что для коразмерностей выполнено $c_n(\mathfrak{U})\leqq d^n$. Довольно часто знание асимптотического поведения последовательности $c_n(\mathfrak{U})$ важнее эксплицитной формулы для вычисления $c_n(\mathfrak{U})$. Точнее, свойства идеала U зависят от поведения последовательности $(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}$[2]. Пока неизвестно всегда ли существует предел $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{A}))^{1/n}$, хотя во всех известных случаях этот предел является целым числом. В этой работе мы интересуемся многообразиями $\mathfrak{U}$, удовлетворяющими следующему экстремальному свойству: $\lim (c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}$ существует и

$$\lim_{n\to\infty} (c_n(\mathfrak{U}))^{1/n} > \limsup (c_n(\mathfrak{A}))^{1/n}$$

для всех собственных подмногообразий $\mathfrak{V}$. Например, $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}=4$ для матричного многообразия второго порядка $\mathfrak{U}=\operatorname{var} M_2$ и $\limsup (c_n(\mathfrak{V}))^{1/n}\leqq 2$, если $\mathfrak{V}\nsubseteq\mathfrak{U}$ [3, 4]; из [4] легко следует, что в случае многообразий унитарных алгебр $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{V}))^{1/n}$ равно 1 или 2. Из результатов Э. Форманека [5] и А. Регева [6] можно вывести, что подобным свойством обладают матрицы любого порядка (см. замечание 3.8 ниже). Как следствие из основного результата А. Стояновой-Венковой [7] получается, что многообразие унитарных алгебр, определенное тождеством $[x_1, x_2, x_3] [x_4, x_5]=0$, тоже является экстремальным относительно коразмерностей. С другой стороны, пусть многообразие $\mathfrak{W}_d$ определено одним левонормированным коммутатором $[x_1, \ldots, x_{d+1}]=0$. Тогда цепочка $\mathfrak{L}_2\subset\mathfrak{L}_3\subset \cdots$ удовлетворяет равенству $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{L}_d))^{1/n}=2$ [4].

Мы рассматриваем ассоциативные алгебры без 1 над полем нулевой характеристики. Обозначим через W_k идеал всех полиномиальных тождеств алгебры верхних треугольных матриц порядка k. Для соответствующего многообразия $\mathfrak{W}_k$ известно [8], что $\mathfrak{W}_k=\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{W}_k$ определено тождеством $[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}]=0$. Каждая конечнопорожденная алгебра, удовлетворяющая нематричному тождеству, принадлежит многообразию $\mathfrak{W}_k$ для некоторого k. В первой части этой работы мы

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 320—332.

установим, что $\mathfrak{W}_k$ является экстремальным. Легко видеть, что $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{W}_k))^{1/n}=k$. Мы докажем $\lim\sup(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}\leq k-1$ для всех собственных подмногообразий $\mathfrak{U}$. Этот результат можно переформулировать на языке производящих функций. Пусть $c(\mathfrak{U}, t)=\Sigma c_n(\mathfrak{U})t^n$ производящая функция последовательности коразмерностей многообразия $\mathfrak{U}$. Тогда $(\lim\sup(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n})^{-1}$ равно радиусу сходимости $r(\mathfrak{U})$ степенного ряда $c(\mathfrak{U}, t)$. Рассматриваемое свойство эквивалентно следующему: $r(\mathfrak{W}_k)=k^{-1}$ и $r(\mathfrak{U})\geqq(k-1)^{-1}$ для $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{W}_k$, $\mathfrak{U}\neq\mathfrak{W}_k$.

Основная идея доказательства экстремальности $\mathfrak{W}_k$ работает и для многообразия $\mathfrak{V}_k=\mathfrak{N}_k\mathfrak{L}_2$, определенного тождеством $[x_1, x_2, x_3]\cdots[x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}]=0$. Оказывается, что $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{V}_k))^{1/n}=2k$, а $\lim\sup(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}\leq 2k-1$ для $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{V}_k$, $\mathfrak{U}\neq\mathfrak{V}_k$. Когда $k=1$, это хорошо известно и легко следует из [9, 10].

А. Кемер [11] описал первичные многообразия (относительно свободные алгебры которых первичны по отношению T-идеалов). Многообразия, порожденные соответственно матрицами порядка k и внешней (или грассмановой) алгеброй входят в список, найденный Кемером. Результаты [7] и данной работы позволяют поставить следующую проблему:

Пусть $\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_k$ — первичные многообразия с T-идеалами $Q_1,\ldots,Q_k$ соответственно. Является ли экстремальным многообразие $\mathfrak{Q}$, определенное тождествами из $Q=Q_1\ldots Q_k$?

В случае алгебр Ли аналогом идеала W_k является идеал $(L'(X))^k$ в свободной алгебре Ли $L(X)$, определяющий многообразие $\mathfrak{N}_{k-1}\mathfrak{A}$. С. Мищенко [12] и И. Воличенко независимо показали, что $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}))^{1/n}=2$ и что последовательность коразмерностей любого подмногообразия $\mathfrak{A}$ обладает полиномиальным ростом. Поэтому $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}=0$ или 1. К сожалению, $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ не является экстремальным при $k>3$, потому что

$$\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}))^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^3))^{1/n}.$$

Все же, оказывается, что рассматриваемому свойству удовлетворяет многообразие $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^3$.

И. Воличенко [13] заметил, что для многообразия алгебр Ли $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$ не существует константы d такой, что $c_n(\mathfrak{W}\mathfrak{W}_2)\leq d^n$. С другой стороны, Гришков доказал, что для действительного числа a и для многообразия $\mathfrak{U}$ существует c, такое, что $c_n(\mathfrak{U})\leqq c_n!/a^n$. В конце работы мы доказываем, что $c_n(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k)>\Gamma((1-\varepsilon)n)$ для любого ε, $0<\varepsilon<1$ и для достаточно больших n и k. Имея в виду, что размерность линейного пространства лиевых полилинейных многочленов равна $(n-1)!$, отсюда мы получаем, что в принципе нельзя найти оценку коразмерностей, которая намного лучше оценки Гришкова,

Доказательства результатов представленной работы используют идеи В. Латышева [14], И. Воличенко и А. Залесского [15], теорию представлений симметрических групп и асимптотические оценки А. Регева [6]. Некоторые другие экстремальные свойства многообразий $\mathfrak{W}_k$ и $\mathfrak{V}_k$ установлены В. Латышевым [14] и И. Воличенко и А. Залесским [15].

Автор благодарен Л. Л. Аврамову, Ш. А. Амицуру и С. П. Мищенко за полезные обсуждения.

2. Предварительные сведения. Все алгебры, которые мы рассматриваем, являются ассоциативными, не обязательно с единицей и над полем K характеристики 0. Обозначим P_n линейное пространство всех полилинейных (относительно $x_1,\ldots, x_n$) элементов свободной алгебры $K\langle X\rangle$, $X=\{x_1, x_2,\ldots\}$. Пусть Γ_n—множество элементов f из P_n, для которых $\partial f/\partial x_i=0$, $i=1,\ldots, n$, где $\partial/\partial x_i$ является формальным дифференцированием.

Для каждого T-идеала U в $K\langle X\rangle$ обозначим той же готической буквой $\mathfrak{U}$ многообразие алгебр, определенное тождествами из U. Идеал U полностью определяется элементами из $P_n\cap U$, $n=1, 2, \ldots$. Если рассматривать алгебры с 1, то U порождается многочленами из $\Gamma_n\cap U$, $n=2, 3, \ldots$. Когда $f(x_1, \ldots, x_n)\in\Gamma_n$, следствия из тождества $f(x_1, \ldots, x_n)=0$ одни и те же в случаях алгебр с и без единицы. Пусть $P_n(\mathfrak{U})=P_n/(P_n\cap U)$ множество полилинейных элементов в относительно свободной алгебре $F(\mathfrak{U})=K\langle X\rangle/U$ многообразия $\mathfrak{U}$. Последовательность полилинейных коразмерностей определяется равенством $c_n(\mathfrak{U})=\dim P_n(\mathfrak{U})$, $n=1, 2, \ldots$. Для удобства вычислений будем предполагать, что $c_0(\mathfrak{U})=1$, т. е. присоединим формально 1 к свободной алгебре $F(\mathfrak{U})$. Будем рассматривать производящую функцию последовательности коразмерностей

$$c(\mathfrak{U}, t)=\sum_{n\geq 0} c_n(\mathfrak{U}), t^n$$

и экспоненциальную производящую функцию

$$\tilde{c}(\mathfrak{U}, t)=\sum_{n\geq 0} c_n(\mathfrak{U})\, t^n/n!.$$

Когда $\mathfrak{U}$ — многообразие унитарных алгебр, мы обозначим $\Gamma_n(\mathfrak{U})=\Gamma_n/(\Gamma_n\cap U)$ множество собственных (или коммутаторных) элементов из $P_n(\mathfrak{U})$, кроме того $\gamma_n(\mathfrak{U})=\dim\Gamma_n(\mathfrak{U})$. Если $\{h_i(x_1, \ldots, x_s)\mid i=1, \ldots, \gamma_s(\mathfrak{U})\}$ базис линейного пространства $\Gamma_s(\mathfrak{U})$, то по лемме 2.4 из [4] базис $P_n(\mathfrak{U})$ состоит из всех полилинейных многочленов

$$x_{i_1}\ldots x_{i_{n-s}}h_i(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),\ i_1<\cdots<i_{n-s},\ j_1<\cdots<j_s,\ s=0, 1, \ldots, n.$$

В следствии 2.5 [4] находится зависимость между $c(\mathfrak{U}, t)$ и $\gamma(\mathfrak{U}, t)=\Sigma\gamma_n(\mathfrak{U})t^n$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\tilde{c}(\mathfrak{U}, t)$ и $\tilde{\gamma}(\mathfrak{U}, t)=\Sigma\gamma_n(\mathfrak{U})\,t^n/n!$ связаны равенством $\tilde{c}(\mathfrak{U}, t)=e^t\tilde{\gamma}(\mathfrak{U}, t)$.

Симметрическая группа $\mathrm{Sym}(n)$ действует на P_n посредством

$$\sigma(x_{i_1}\ldots x_{i_n})=x_{\sigma(i_1)}\ldots x_{\sigma(i_n)},\quad \sigma\in\mathrm{Sym}(n),\quad x_{i_1}\ldots x_{i_n}\in P_n$$

и P_n является левым $\mathrm{Sym}(n)$-модулем. Существует модульный изоморфизм между групповой алгеброй $K.\mathrm{Sym}(n)$ и P_n, который задается с

$$\Sigma a_\tau\,\tau\rightarrow\Sigma a_\tau\, x_{\tau(1)}\ldots x_{\tau(n)},\quad a_\tau\in K,\quad \tau\in\mathrm{Sym}(n).$$

Подножество $P_n\cap U$ является подмодулем P_n. Следовательно, $P_n(\mathfrak{U})$ наследует действие $\mathrm{Sym}(n)$ на P_n. Неприводимые $\mathrm{Sym}(n)$-модули описываются разбиениями и диаграммами Юнга [16, 17]. Для каждого разбиения $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ числа n, $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$, обозначим соответственно $[\lambda]$ и $M(\lambda)$ диаграмму Юнга и неприводимый $\mathrm{Sym}(n)$-модуль, отвечающие λ. Размерность $M(\lambda)$ задается формулой крюков

$$(1)\quad \dim M(\lambda)=n!\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j-i+j)\Big(\prod_{k=1}^{n}(n-k+\lambda_k)!\Big)^{-1}=n!\,\Pi(\lambda_i+\lambda_j'+1-i-j)^{-1},$$

где λ_j' длина j-того столбца диаграммы $[\lambda]$.

Существует и правое действие симметрической группы $\mathrm{Sym}(n)$ на множестве однородных элементов степени n в $K\langle X\rangle$:

$$(x_{i_1}\ldots x_{i_n})\tau^{-1}=x_{i_{\tau(1)}}\cdots x_{i_{\tau(n)}},\quad \tau\in\mathrm{Sym}(n).$$

Пусть $a_j=\lambda'_j$ и $\widetilde{S}_\lambda(x_1,\ldots,x_{a_1})=S_{a_1}(x_1,\ldots,x_{a_1})\cdots S_{a_d}(x_1,\ldots,x_{a_d})$, где $S_a(x_1\ldots,x_a)=\Sigma(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(a)}$ является стандартным многочленом. Каждый подмодуль $M(\lambda)\subset P_n$ порождается линеаризацией ненулевого многочлена $\widetilde{S}_\lambda(x_1,\ldots,x_{a_1})\Sigma\alpha_\sigma\tau^{-1}$, $\alpha_\tau\in K$, $\tau\in\mathrm{Sym}(n)$. В частности, пусть M множество полилинейных элементов из P_n, которые кососимметричные по каждой из групп переменных $\{x_1,\ldots,x_{a_1}\}$, $\{x_{a_1+1},\ldots,x_{a_1+a_2}\}$, $\ldots$, $\{x_{n-a_d+1},\ldots,x_n\}$. Тогда $M(\lambda)\subset P_n$ является подмодулем $\mathrm{Sym}(n)$-модуля, порожденного множеством M. Относительно свойств последовательности коразмерностей $\mathfrak{U}$ и $\mathrm{Sym}(n)$-характеров $P_n(\mathfrak{U})$ см. книгу Л. Роуена [18] и обзоры Э. Форманека [19, 20].

Алгебра $F(\mathfrak{U})$ обладает полиградировкой, которая для каждого одночлена из $F(\mathfrak{U})$ отчитывает степень каждой переменной $x_1, x_2,\ldots$. Формальный степенной ряд $M(\mathfrak{U})=H(F(\mathfrak{U}),\ t_1,\ t_2,\ldots)=\Sigma\dim F^{(m_1,\ldots,m_n)}t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n}$, $m_i\geqq 0$, $n\geqq 0$, называется рядом Гильберта градированного векторного пространства $F(\mathfrak{U})$ и является симметрической функцией бесконечного числа переменных [5]. Ряд $H(\mathfrak{U})$ полностью определяет структуру $P_n(\mathfrak{U})$ как $\mathrm{Sym}(n)$-модуль. В частности, $c_n(\mathfrak{U})$ равно коэффициенту перед $t_1\ldots t_n$ в $H(\mathfrak{U})$. Мы будем использовать следующий технический результат. [20, теорема 2]:

Предложение 2.1. *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ многообразия алгебр с 1 и пусть $W=UV$ Тогда*

$$H(\mathfrak{W})=C(\mathfrak{U})+H(\mathfrak{V})+(t_1+t_2+\cdots-1)H(\mathfrak{U})H(\mathfrak{V}). \tag{2}$$

Доказательство. Из равенства

$$H(K\langle X\rangle/U,\ t_1,\ t_2,\ldots)+H(U,\ t_1,\ t_2,\ldots)$$
$$=H(K\langle X\rangle,\ t_1,\ t_2,\ldots)=(1-(t_1+t_2+\ldots))^{-1}$$

следует, что (2) эквивалентно тождеству

$$H(U,\ t_1,\ t_2,\ldots)H(V,t_1,\ t_2,\ldots)=H(UV,\ t_1,\ t_2,\ldots)H(K\langle X\rangle,\ t,\ t_2,\ldots).$$

Свободная алгебра $K\langle X\rangle$ является FIR-кольцом и каждый однородный идеал в $K\langle X\rangle$ обладает свободной системой однородных порождающих как левый (или правый) $K\langle X\rangle$-модуль. Следовательно, существует полиоднородные многочлены $u_1,\ u_2,\cdots$ и $v_1,\ v_2,\ldots$, такие, что

$$U=\Sigma u_iK\langle X\rangle,\quad V=\Sigma K\langle X\rangle v_j$$

и суммы являются прямыми. Поэтому

$$H(U,\ t_1,\ t_2,\ldots)=\Sigma t^{|u_i|}H(K\langle X\rangle,\ t_1,\ t_2,\ldots),$$
$$H(V,\ t_1,\ t_2,\ldots)=\Sigma t^{|v_j|}H(K\langle X\rangle,\ t_1,\ t_2,\ldots),$$

где $t^{|u_i|}=t_1^{p_1}\ldots t_n^{p_n}$ и $\deg_{x_s}u_i=p_s$, аналогично для $t^{|v_j|}$. Из равенств $UV=\Sigma u_i(K\langle X\rangle)^2v_j$ и $(K\langle X\rangle)^2=K\langle X\rangle$ следует, что $UV=\Sigma u_iK\langle X\rangle v_j$, $H(UV,\ t_1,\ t_2,\ldots)=\Sigma t^{|u_i|}t^{|v_j|}H(K\langle X\rangle,$ $t_1,\ t_2,\ldots)$ и это дает требуемый результат.

Следствие 2.2. *Пусть U и V — T-идеалы, которые порождаются своими элементами из $\bigcup_{n\geq 2}\Gamma_n$. Тогда формула* (2) *остается верной для U, V и $W=UV$ и в случае алгебр без единицы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}^*$ и $^*\mathfrak{V}$ — многообразия, которые получаются добавлением 1 к алгебрам из $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$, соответственно. Тогда $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}^*$ (аналогично $\mathfrak{V}$

и $\mathfrak{B}^*$) обладают одними и теми же T-идеалами тождеств. Отсюда немедленно выводится следствие.

Следствие 2.3. *Пусть U и V—T-идеалы, которые порождаются своими многочленами из $\supset_{n\geq 2}\Gamma_n$ и $W=UV$. Тогда*

$$\tilde{c}(\mathfrak{W}, t)=\tilde{c}(\mathfrak{U}, t)+\tilde{c}(\mathfrak{B}, t)+(t-1)\tilde{c}(\mathfrak{U}, t)\tilde{c}(\mathfrak{B}, t). \tag{3}$$

Доказательство. Имея в виду, что $c_n(\mathfrak{W})$ равно коэффициенту перед $t_1\ldots t_n$ в $H(\mathfrak{W})$, мы выводим из (2), что

$$c_n(\mathfrak{W}) = c_n(\mathfrak{U})+c_n(\mathfrak{B})+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{n!\,k!\,(u-k-1)!}c_k(\mathfrak{B})c_{n-k-1}(\mathfrak{B})$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}c_k(\mathfrak{U})c_{n-k}(\mathfrak{B}).$$

Следовательно,

$$\tilde{c}(\mathfrak{W}, t)=\tilde{c}(\mathfrak{A}, t)+\tilde{c}(\mathfrak{U}, t)+(t-1)\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k(\mathfrak{A})c_{n-k}(\mathfrak{U})\,t^n}{k!\,(n-k)!}.$$

Это сразу дает доказательство, потому что

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k(\mathfrak{A})c_{n-k}(\mathfrak{U})\,t^n}{k!\,(n-k)!}=\tilde{c}(\mathfrak{A}, t)\,\tilde{c}(\mathfrak{U}, t).$$

Обозначим $[x_1, x_2[=x_1(\mathrm{ad}x_2)=x_1x_2-x_2x_1$,

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]=[x_1, \ldots, x_{n-1}]\,(\mathrm{ad}x_n).$$

Следствие 2. 4. *Пусть $W_1=(K\langle X\rangle)'$ — коммутаторный идеал в $K\langle X\rangle$,* а *V_1 — T-идеал, порожденный многочленом $[x_1, x_2, x_3]$. Тогда для коразмерностей T-идеалов $W_k=W_1^k$* и *$V_k=V_1^k$ выполнено*

$$\begin{aligned}&\tilde{c}(\mathfrak{W}_k, t)=e^t\sum_{p=0}^{k-1}(1+(t-1)e^t)^p,\\&\tilde{c}(\mathfrak{B}_k, t)=\sum_{p=0}^{k}f_{pk}(t)e^{2pt},\end{aligned}\tag{4}$$

где $f_{pk}(t)$ многочлены от t и $f_{kk}(t)=2^{-k}(t-1)^{k-1}$.

Доказательство. а) Из изоморфизма $F(\mathfrak{W}_1)=K\langle X\rangle/W_1\cong K[X]$ следует, что $c_n(\mathfrak{W}_1)=1$ и $\tilde{c}(\mathfrak{W}_1, t)=e^t$. Пусть $\tilde{c}(\mathfrak{W}_k, t)$ удовлетворяет (4). Индукцией по k из (3) выводится, что

$$\tilde{c}(\mathfrak{W}_{k+1}, t)=\tilde{c}(\mathfrak{W}_1, t)+\tilde{c}(\mathfrak{W}_k, t)+(t-1)c(\mathfrak{W}_1, t)\tilde{c}(\mathfrak{W}_k, t)$$

$$=e^t+e^t\sum_{p=0}^{k-1}(1+(t-1)e^t)^p+(t-1)\,e^t\sum_{p=0}^{k-1}(1+(t-1)e^t)^p$$

$$=e^t[1+(t-1)e^t)\sum_{p=0}^{k-1}(1+(t-1)e^t)^p].$$

Таким образом получается равенство (4) для $\mathfrak{W}_{k+1}$.

б) Из [9] известно, что $c_n(\mathfrak{U}_1)=c_n(\mathfrak{L}_2)=2^{n-1}$. Следовательно, $\widetilde{c}(\mathfrak{U}_1, t)=\frac{1}{2}(e^{2t}+1)$. Индукцией по k из (3) получается, что

$$\widetilde{c}(\mathfrak{U}_{k+1}, t)=\frac{1}{2}(e^{2t}+1)+\sum_{p=0}^{k} f_{pk}(t)e^{2pt}+\frac{1}{2}(t-1)(e^{2t}+1)\sum_{p=0}^{k} f_{pk}(t)\,e^{2pt}$$

$$=\frac{1}{2}(t-1)f_{kk}(t)e^{2(k+1)t}+\sum_{p=0}^{k} f_{p,k+1}(t)e^{2pt}.$$

Кроме того, $f_{k+1,\,k+1}(t)=\frac{1}{2}(t-1)f_{kk}(t)=2^{-(k+1)}(t-1)^k$.

Лемма 2.5. *Пусть* $\widetilde{c}(\mathfrak{U}, t)=\Sigma_{p=0}^{s} f_p(t)e^{pt}$, *где* $f_p(t)$ *многочлены и старший коэффициент многочлена* $f_s(t)$ *положительный. Тогда* $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}=s$.

Доказательство. Пусть $f_p(t)=\sum_{j=0}^{m} b_{kj}t^j$. Тогда

$$\widetilde{c}(\mathfrak{U}, t)=\sum_{p=0}^{s}\sum_{j=0}^{m} b_{pj}t^j\sum_{q\geq j} p^q t^q/q!=\sum_{p=0}^{s}\sum_{j=0}^{m}\sum_{q\geq j} p^{q-j}b_{pj}\,q(q-1)\ldots(q-j+1)t^q/q!,$$

т. е. $c_q(\mathfrak{U})=\sum_{p=0}^{s}\left(\sum_{j=0}^{m} b_{pj}\frac{q(q-1)\ldots(q-j+1)}{p^j}\right)p^q$.

Отсюда лемма выводится немедленно.

Следствие 2.6. а) $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{M}_k))^{1/n}=k$.

б) $\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{V}_k))^{1/n}=2k$.

Доказательство получается непосредственно из следствия 2.4 и леммы 2.5.

Мы будем использовать следующий упрощенный вариант оценки А. Регева [6].

Лемма 2.7. *Пусть* $S_p(n)=\Sigma\dim M(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$, *где суммирование ведется по всем разбиениям числа* n *на не более, чем* p *частей. Тогда* $S_p(n)=\varepsilon_n p^n$, *где* $1/p!\,(n+p-1)^{-p(p-1)/2}\leq\varepsilon_n\leq(n+p-1)^{p(p-1)/2}$.

Доказательство. По формуле (1)

$$\dim M(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)=\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_p!}\prod_{1\leq i\wedge j\leq p}(\lambda_i-\lambda_j-i+j)\Big(\prod_{i=1}^{p-1}\prod_{j=1}^{p-i}(\lambda_i+j)\Big)^{-1}.$$

Из $1\leq\prod_{1\leq i<j\leq p}(\lambda_i-\lambda_j-i+j)\leq(n+p-1)^{p(p-1)/2}$,

$$1\leq\prod_{i=1}^{p-1}\prod_{j=1}^{p-i}(\lambda_i+j)\leq(n+p-1)^{p(p-1)/2}$$

следует, что $\dim M(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)=\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_p!}\varepsilon_\lambda$,

где $(n+p-1)^{-p(p-1)/2}\leq\varepsilon_\lambda\leq(n+p-1)^{p(p-1)/2}$.

Поэтому $S_p(n)=\Sigma\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_p!}\varepsilon_\lambda$, т. е.

$$(n+p-1)^{-p(p-1)/2}\,\Sigma\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_p!}\leq S_p(n)\leq(n+p-1)^{p(p-1)/2}\,\Sigma\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_p!}.$$

Имея в виду, что $p^n/p!\leqq \Sigma \dfrac{n!}{\lambda_1!\dots\lambda_p!}\leqq p^n$, мы получаем желанную оценку.

Следствие 2.8. *Пусть p, q, r, s — неотрицательные целые числа и $p\leqq r$, $q\leqq s$. Пусть $D_{pq}(n)\leqq\Sigma\dim M(\lambda)$, где суммирование ведется по всем разбиениям $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ числа n таких, что $\lambda_{p+1}\leqq s$, $\lambda_{r+1}\leqq q$, т. е. соответствующие диаграммы $[\lambda]$ лежат в полосе на рис. 1. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(D_{pq}(n))^{1/n}=p+q$.*

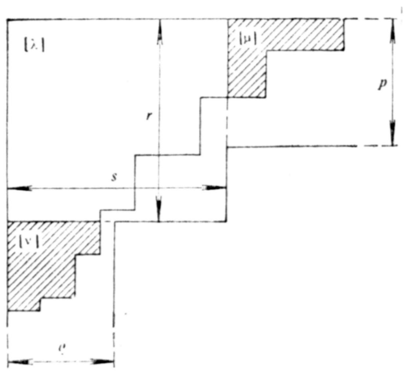

Рис. 1

Доказательство. Пусть λ — разбиение n рассматриваемого типа и пусть число клеток (i, j) в $[\lambda]$, для которых $i\leqq p$, $j>s$ (соответственно $i>r$) равно n_1 (соответственно n_2). Припомним, что λ'_j — длина j-того столбца диаграммы $[\lambda]$. По формуле (1) для $h_{ij}=\lambda_i+\lambda'_j+1-i-j$

$$\dim M(\lambda)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!}\,\Bigl(\prod_{i=1}^{r}\prod_{j\leqq s}h_{ij}^{-1}\Bigr)\Bigl(n_1!\prod_{i\leqq p}\prod_{j>s}h_{ij}^{-1}\Bigr)\Bigl(n_2!\prod_{i>r}\prod_{j}h_{ij}^{-1}\Bigr)$$

$$\leqq n^{rs}\,\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}\,\dim M(\lambda_1-s,\dots,\lambda_p-s)\dim M(\lambda'_1-r,\dots,\lambda'_q-r).$$

Следовательно,

$$D_{pq}(n)=\Sigma\dim M(\lambda)\leqq n^{rs}\,\Sigma\,\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}\dim M(\mu_1,\dots,\mu_p)\dim M(\nu_1,\dots,\nu_q),$$

где $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_p)$ и $\nu=(\nu_1,\dots,{}_q)$ являются разбиениями n_1 и n_2, соответственно. По лемме 2.7

$$D_{pq}(n)\leqq n^{rs}\,\Sigma\,\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}(n_1+p-1)^{p(p-1)/2}(n_2+q-1)^{q(q-1)/2}p^{n_1}q^{n_2}$$

$$\leqq n^{rs}(n+p-1)^{p(p-1)/2}(n+q-1)^{q(q-1)/2}\,\Sigma\frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}\,p^{n_1}q^{n_2}\leqq c_1n^{k_1}(p+q)^n$$

для некоторых положительных чисел c_1 и k_1, зависящих от p, q, r, s. Аналогично получается оценка $D_{pq}(n)\geqq c_2n^{-k_2}(p+q)^n$, c_2, $k_2>0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(D_{pq}(n))^{1/n}=p+q$.

3. Тождества треугольных матриц. Этот параграф посвещен доказательству следующего результата:

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{W}_k$ многообразие ассоциативных алгебр, определенное тождеством* $[x_1, x_2] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}]=0$, *и* $\mathfrak{U}$ — *собственное подмногообразие* $\mathfrak{W}_k$. *Тогда*

$$\limsup (c_n(\mathfrak{U}))^{1/n} \leqq k-1 < \lim_{n\to\infty} (c_n(\mathfrak{M}_k))^{1/n}=k.$$

Из этой теоремы непосредственно выводится:

Следствие 3.2. *В обозначениях* 3.1, *для радиусов сходимости* $r(\mathfrak{W}_k)$ и $r(\mathfrak{U})$ *производящих функций* $c(\mathfrak{W}_k, t)$ *и* $c(\mathfrak{U}, t)$ *выполнено* $r(\mathfrak{W}_k)=1/k$, $r(\mathfrak{U})\geqq 1/(k-1)$.

Доказательство теоремы проведем в нескольких этапах. Для удобства обозначений, до конца параграфа будем работать не в $\mathfrak{W}_k$, а в многообразии $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{k+1}$, определенном тождеством $[x_1, x_2] \ldots [x_{2k+1}, x_{2k+2}]=0$. Это многообразие порождается алгеброй верхних треугольных матриц порядка $k+1$. Будем проводить все вычисления в относительно свободной алгебре $F=F(\mathfrak{W})=K\langle X\rangle/W_{k+1}$. Для удобства иногда будем обозначать свободные порождающие F буквами t_i, $u_i, \ldots, z_i$, $i=0, 1, \ldots$ Кроме того, $\mathfrak{U}$ будет собственным подмногообразием $\mathfrak{W}$ и $\bar{U}$ — образ T-идеала U при естественном гомоморфизме $K\langle X\rangle \to F$. В [14, §1] указан базис $1_n(\mathfrak{W})$. Оттуда легко следует, что $P_n(\mathfrak{W})$ обладает базисом, состоящим из полилинейных элементов вида

$$x_{a_1} \ldots x_{a_p}[y_{b_1}, \ldots, y_{b_q}] \ldots [z_{c_1}, \ldots, z_{c_r}], \tag{5}$$

где $a_1< \cdots <a_p$, $b_1>b_2< \cdots b_p, \ldots, c_1>c_2< \cdots <c_r$, и число коммутаторов в (5) не больше k. Когда число коммутаторов в (5) равно k, то

$$\begin{gathered}[u, v]x_2 \ldots x_p [y_1, \ldots, y_q] \cdots [z_1, \ldots, z_r]=0,\\ x_1 \ldots x_p [y_1, \ldots, y_{p-1}, [u, v]] \cdots [z_1, \ldots, z_r]=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}&x_1 \cdots x_p[y_1, \ldots, y_q] \cdots [z_1, \ldots, z_r]\\ &=x_{\rho(1)} \ldots x_{\rho(p)}[y_1, y_2, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(q)}] \ldots [z_1, z_2, z_{\tau(3)}, \ldots, z_{\tau(r)}],\end{aligned} \tag{7}$$

где $\rho, \sigma, \ldots, \tau$ элементы соответствующих симметрических групп.

Следующие предложения являются аналогами предложений из [14] в случае алгебр без 1.

Лемма 3.3. [14]. *В* $\bar{U}$ *существует ненулевой многочлен, который является линейной комбинацией элементов типа* (5), *в которые входят ровно* k *коммутаторов.*

Доказательство. Предположим, что

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\Sigma\alpha\, x_{a_1} \ldots x_{a_p} [x_{b_1}, \ldots, x_{b_q}] \ldots [x_{c_1}, \ldots, x_{c_r}]$$

и пусть в некоторых из слагаемых участвуют меньше, чем k коммутаторов. Тогда многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ $[y_1, y_2]$ снова является линейной комбинацией элементов (5) и, следовательно, отличен от 0 в F. Доказательство утверждения получается после конечного числа умножений на коммутаторы справа.

Лемма 3.4. *В* $\bar{U}$ *существует ненулевой полилинейный многочлен* $g=\Sigma\alpha x_{a_1} \ldots x_{a_p}[u_{s_1}, v_{s_1}, x_{b_1}, \ldots, x_{b_q}] \ldots [u_{s_k}, v_{s_k}, x_{c_1}, \ldots, x_{c_r}]$, $a_1< \cdots <a_p$, $b_1< \cdots <b_q, \ldots, c_1< \cdots <c_r$, *такой, что на всех „внутренних" местах коммутаторов находятся одни и те же пары переменных* (u_i, v_i).

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in \bar{U}$ ненулевой многочлен, записанный как линейная комбинация элементов (5), в которых участвуют k коммутаторов. Такой многочлен существует по лемме 3.3. Из того, что $f(x_1, \dots, x_n)=0$ не является тождеством в алгебре треугольных матриц порядка $k+1$ следует, что существуют матричные единицы e_{lm}, $l \leq m$, такие, что $f(e_{l_1m_1}, \dots, e_{l_nm_n}) \neq 0$. Имея в виду, что $[e_{l_1m_1}, \dots, e_{l_rm_s}]=\beta e_{ij}$, $i<j$, мы выводим, что произведение (5) не равно нулю только если значения коммутаторов пропорциональны соответственно $e_{12}, e_{23}, \dots, e_{k,k+1}$. Отсюда легко получить, что k из неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ заменены матрицами $e_{12}, e_{23}, \dots, e_{k,k+1}$, а все остальные неизвестные — диагональными матрицами e_{ii}. Пусть вместо $x_1, x_2, \dots, x_k$ подставлены соответственно $e_{12}, e_{23}, \dots, e_{kk+1}$. Из равенства $i, i+1=[e_{ii}, e_i, i+1]$ следует, что замена x_i коммутатором $[u_i, v_i]$, $i=1, \dots, k$, дает требуемый многочлен. Действительно,

$$f([u_1, v_1], \dots, [u_k, v_k], x_{k+1}, \dots, x_n) \neq 0$$

в F. Кроме того, если в записи (5) неизвестное x_i находится вне коммутаторов или правее второго места (в „хвосте") коммутатора $[x_{d_1}, x_{d_2}, \dots, x_i, \dots, x_{d_s}]$, то из (6) следует, что (5) аннулируется в F после подстановки $x_i \to [u_i, v_i]$.

Лемма 3.5. *Идеал $\bar{U}$ содержит ненулевой многочлен вида*

$$\begin{aligned} p = \Sigma\alpha_i(-1)^\rho \dots (-1)^\sigma x_{\rho(0)} \dots y_{\sigma(0)}[u_{i_1}, v_{i_1}, x_{\rho(1)}, \dots, y_{\sigma(1)}] \\ \dots [u_{i_k}, v_{i_k}, x_{\rho(k)}, \dots, y_{\sigma(k)}], \end{aligned} \tag{8}$$

где суммирование ведется по перестановкам $i=(i_1, \dots, i_k)$ символов $1, \dots, k$ и по всем подстановкам $\rho, \dots, \sigma$ симметрической группы $\mathrm{Sym}(k+1)$, *действующей на множестве* $\{0, 1, \dots, k\}$.

Доказательство. В дальнейшем многократно будем использовать (7) без ссылки. Пусть $g=g(u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k; w_1, \dots, w_n)=\Sigma\alpha w_{a_1} \dots w_{a_p}[u_{s_1}, v_{s_1}, w_{b_1}, \dots, w_{b_q}] \dots [u_{s_k}, v_{s_k}, w_{c_1}, \dots, w_{c_r}]$ и $g \in \bar{U}$, $g \neq 0$. Мы распределим слагаемые многочлена g в трех группах. В g_1 переменная w_1 не участвует в коммутаторах, в g_2 она входит в тот же коммутатор, в котором участвуют u_1, v_1, а в g_3 неизвестные u_1, v_1, w_1 находятся в разных коммутаторах. Без ограничения общности можно предполагать, что $g_1 \neq 0$ или $g_2 \neq 0$. Пусть сначала $g_1 \neq 0$. Рассмотрим $h_1=\Sigma(-1)^\rho g([u_1, v_1], \dots, [u_k, v_k]; x_{\rho(1)}, \dots, x_{\rho(k)}; x_{\rho(0)}\ w_2, \dots, w_n)$. Слагаемые из g_2 и g_3 аннулируются в h_1 и $h_1=\Sigma\alpha(-1)^s(-1)^\rho x_{\rho(0)}\ w_{a_2} \dots w_{a_p}[u_{s_1}, v_{s_1}, x_{\rho(1)}, w_{b_1}, \dots, w_{b_q}] \dots [u_{s_k}, v_{s_k}, x_{\rho(k)}, w_{c_1}, \dots, w_{c_r}]$, где s равно перестановке $(s_1, \dots, s_k)$, а слагаемые из h_1 получаются из соответствующих слагаемых в g_1. Следовательно, $h_1 \neq 0$ и h_1 является функцией $n-1$ переменных $w_2, \dots, w_n$. Предположим теперь, что $g_1=0$ и $h_2=\Sigma(-1)^\rho x_{\rho(0)}g(u_1, [u_2, v_2], \dots, [u_k, v_k]; v_1, x_{\rho(2)}, \dots, x_{\rho(k)}; x_{\rho(1)}, w_2, \dots, w_n)$. Снова оказывается, что g_3 превращается в 0 и h_2 получается из g_2. Тогда

$$h_2=\Sigma\alpha(-1)^s(-1)^\rho x_{\rho(0)}w_{a_1} \dots w_{a_p}[u_{s_1}, v_{s_1}, x_{\rho(1)}, \dots] \dots [u_{s_k}, v_{s_k}, x_{\rho(k)}, \dots],$$

где в „хвостах" коммутаторов находятся некоторые из переменных $w_2, \dots, w_n$. Многочлен h_2 снова зависит от $n-1$ переменных $w_2, \dots, w_n$. Кроме того, очевидно, что h_1, h_2 принадлежат $\bar{U}$. Доказательство леммы завершается индукцией по числам n переменных $w_1, \dots, w_n$.

Лемма 3.6. *Идеал $\bar{U}$ содержит многочлен типа*

$$f=\Sigma(-1)^\rho \dots (-1)^\sigma x_{\rho(0)} \dots y_{\sigma(0)}[u_1, v_1, x_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(1)}] \dots [u_k, v_k, x_{\rho(k)}, \dots, y_{\sigma(k)}], \tag{9}$$
$\rho, \dots, \sigma \in \mathrm{Sym}(k+1)$.

Доказательство. Будем использовать тождества

$$[uv, w_1, \dots, w_s] \equiv u[v, w_1, \dots, w_s] + [u, w_1, \dots, w_s]v \pmod{(F')^2},$$

где F' — коммутаторный идеал в F, $[w_1, \dots, w_s]z = z[w_1, \dots, w_s] + [w_1, \dots, w_s, z]$. В многочлене $p = p(u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k; x_0, \dots, x_k; \dots; y_0, \dots, y_k)$ из (8) будем предполагать, что $\alpha_{i_0} \neq 0$, где $i_0 = (1, 2, \dots, k)$. Умножаем p слева на t_0, подставляем

$$v_j \to t_j,\ u_j \to [u_j, v_j],\ j<k,\ v_k \to t_k,\ u_k \to z_{k-1}[u_k, v_k]$$

и суммируем знакопеременно по $t_0, t_1, \dots, t_k$. Таким образом, мы получаем многочлен

$$\sum_{s=1}^{k} \sum \alpha_i(-1)^i(-1)^\rho \dots (-1)^\sigma(-1)^\tau x_{\rho(0)} \dots y_{\sigma(0)} t_{\tau(0)}[u_{i_1}, v_{i_1}, \dots, t_{\tau(1)}]$$
$$\dots z_{k-1}[u_k, v_k, \dots, t_{\tau(s)}] \dots [u_{i_k}, v_{i_k}, \dots, t_{\tau(k)}],\ i = (i_1, \dots, i_k).$$

Перебрасываем z_{k-1} налево и получаем

$$z_{k-1}\sum\alpha_i(-1)^i \dots (-1)^\tau x_{\rho(0)} \dots t_{\tau(0)}[u_{i_1}, v_{i_1}, \dots] \dots [u_{i_k}, v_{i_k}, \dots]$$
$$+ \sum_{r<s} \sum \alpha_i(-1)^i \dots (-1)^\tau x_{\rho(0)} \dots t_{\tau(0)} \dots [u_{i_r}, v_{i_r}, \dots, z_{k-1}] \dots [u_k, v_k, \dots, t_{\tau(s)}] \dots .$$

Первое слагаемое является непосредственным следствием тождества (8) и мы не будем рассматривать его. Умножаем второе слагаемое слева на z_0, для всех $j \neq k-1$ подставляем $v_j \to z_j$, $u_j \to [u_j, v_j]$ и суммируем знакопеременно по $z_0, \dots, z_k$. Если в соответствующем произведении коммутатор $[u_{k-1}, v_{k-1}]$ находится правее $[u_k, v_k]$, то выражение аннулируется, потому что две кососимметрические переменные z входят в один и тот же коммутатор (см. (7)). Следовательно, единственные ненулевые слагаемые — это

$$\dots [u_{k-1}, v_{k-1}, \dots] \dots [u_k, v_k, \dots] \dots .$$

Таким образом, мы получаем ненулевой многочлен типа (8) из $\bar{U}$, в котором неизвестные u_{k-1}, v_{k-1} находятся левее u_k, v_k. Продолжая эту процедуру, мы найдем элемент из $\bar{U}$, в котором переменные u_{k-2}, v_{k-2} лежат левее u_{k-1}, v_{k-1} и т. д. После конечного числа шагов, мы получим, что $\bar{U}$ содержит многочлен типа (9).

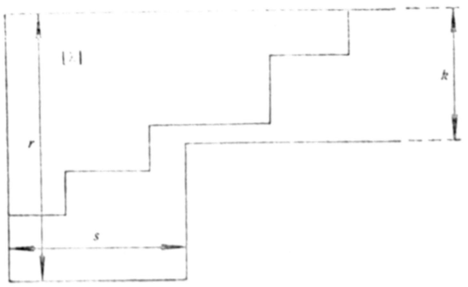

Рис. 2

Предложение 3.7. *Пусть* $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$. *Тогда существуют числа* r и s, *такие что для всех неприводимых* $\mathrm{Sym}(n)$-*подмодулей* $M(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \subset P_n(\mathfrak{U})$ *выполнено* $\lambda_{k+1} \leq s$, $\lambda_{r+1} = 0$. *Следовательно, соответствующая диаграмма* $[\lambda]$ *лежит в полосе на рис.* 2.

Доказательство. Проведем индукцию по k. Будем предполагать, что существуют r_k и s_k такие, что

$$P_n(\mathfrak{W}_k)=\Sum m_\lambda M(\lambda), \tag{10}$$

где $[\lambda]$ лежит в полосе, обозначенной на рис. 2 при $r=r_k$, $s=s_k$. Из полной приводимости $\mathrm{Sym}(n)$-модулей следует, что

$$P_n(\mathfrak{U})\cong P_n(\mathfrak{W})/(P_n(\mathfrak{W})\cap \bar{U})$$
$$\cong P_n(\mathfrak{W})/(P_n(\mathfrak{W})\cap(\bar{W}_k+\bar{U}))+(P_n(\mathfrak{W})\cap(\bar{W}_k+\bar{U}))/(P_n(\mathfrak{W})\cap \bar{U}).$$

Но $P_n(\mathfrak{W})/(P_n(\mathfrak{W})\cap(\bar{W}_k+\bar{U}))$ является фактор-модулем $P_n(\mathfrak{W}_k)$, а

$$(P_n(\mathfrak{W})\cap(\bar{W}_k+\bar{U}))/(P_n(\mathfrak{W})\cap \bar{U})\cong(P_n(\mathfrak{W})\cap \bar{W}_k)/(P_n(\mathfrak{W})\cap \bar{W}_k\cap\bar{U}).$$

Следовательно, мы докажем предложение, если установим, что диаграммы неприводимых подмодулей в $P_n(\mathfrak{U})$ содержатся в области на рис. 2, когда $U\subset W_k$ и успеем сделать индуктивный шаг с $\mathfrak{W}_k$ к $\mathfrak{W}$ для ограничений в разложении (10).

В многочленах (5), в которых участвуют ровно k коммутаторов, фиксируем $p=e_0$, $q=e_1,\ldots,$ $r=e_k$ и $e=(e_0, e_1,\ldots,e_k)$. Рассмотрим $\mathrm{Sym}(n)$ — модульный гомоморфизм ψ_e из множества P_n полилинейных элементов в $K\langle X\rangle$ на линейное подпространство в F, натянутое на рассматриваемые элементы (5). Определим ψ_e следующим образом:

$$\psi_e: x_{i_1}\ldots x_{i_n}\rightarrow x_{i_1}\ldots[\ldots]\ldots[\ldots, x_{i_n}].$$

Пусть z элемент из P_n, который кососимметричен по группам переменных $x_1,\ldots,x_{a_1}$ $\ldots; y_1,\ldots,y_{a_d}$. Тогда $z=(S_{a_1}(x_1,\ldots,x_{a_1})\ldots S_{a_d}(y_1,\ldots,y_{a_d}))\Sum\alpha_\tau\tau^{-1}$, $\alpha_\tau\in K$, $\tau\in\mathrm{Sym}(n)$. Рассмотрим

$$\psi_e(S_{a_1}(x_1,\ldots,x_{a_1})\ldots S_{a_d}(y_1,\ldots,y_{a_d})\tau^{-1})$$
$$=\Sum\beta_i t_{i_1}\ldots t_{i_{e_0}}[t_{i_{e_0+1}},\ldots]\ldots[\ldots,t_{i_n}],\quad \beta_i\in K.$$

Из тождеств (7) видно, что, если два кососиметрические неизвестные находятся в „начале“ $t_{i_1}\ldots t_{i_{e_0}}$ или в „хвосте“ (правее второй позиции) одного и того же коммутатора, то $\psi_e(S_{a_1}(x_1,\ldots,x_{a_1})\ldots S_{a_d}(y_1,\ldots,y_{a_d})\tau^{-1})=0$. Кроме того, если в некотором коммутаторе участвуют три кососимметрические переменные, то по тождеству Якоби $\Sum(-1)^\rho\ldots[x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, x_{\rho(3)},\ldots]\ldots=0$. Следовательно, неизвестные в двух „внутренних“ позициях данного коммутатора могут альтернировать не более чем с одной переменной вне коммутаторов и с двумя переменными в другом коммутаторе. При этом мы можем предполагать, что эти альтернирующие неизвестные расположены на первых $2k$ местах в коммутаторах. Следовательно, ненулевые элементы $\psi_e(S_{a_1}(x_1,\ldots,x_{a_1})\ldots S_{a_d}(y_1,\ldots,y_{a_d})\tau^{-1})$ имеют вид

$$\Sum(-1)^\rho\ldots(-1)^\sigma\underbrace{\ldots\ldots}_{2k}[\underbrace{\ldots\ldots}_{2k}]\ldots[\underbrace{\ldots\ldots}_{2k}\ldots], \tag{11}$$

где вне нижних скобок переменные альтернируют только между собой. Предположим, что λ является разбиением числа n и $a_1;\ldots,a_d$ — длины столбцов диаграммы $[\lambda]$. Если $M(\lambda)$ ненулевой подмодуль в $P_n(\mathfrak{W})\cap(F')^k$, то многочлены из $M(\lambda)$ являются следствиями из $\psi_e(S_{a_1}(x_1,\ldots,x_{a_1})\ldots S_{a_d}(y_1,\ldots,y_{a_d})\tau^{-1})$, где $\tau\in\mathrm{Sym}(n)$ и $e=(e_0, e_1,\ldots,e_k)$. Следовательно, существуют числа r_0 и s_0 такие, что, если $\psi_e(S_{a_1}(x_1,$ $\ldots,x_{a_1})\ldots S_{a_d}(y_1,\ldots,y_{a_d})\tau^{-1})\neq0$, то число a_i альтернирующих переменных в каждой группе $\leq r_0$, а $a_i \leq k+1$ при $i>s$. Этот дает нам индуктивный шаг из $\mathfrak{W}_k$ к $\mathfrak{W}$ для ограничений из (10).

Пусть $0 \neq \bar{U} \subset \bar{W}_k$. Предположим, что $M(\lambda) \subset P_n(\mathfrak{U})$ и $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r)$. По лемме 3.6, $\bar{U}$ содержит многочлен вида (9). Пусть число переменных $x, \ldots, y$ этого многочлена равно q. Тогда при $\lambda_{k+1} \geq q+s_0$ в записи (11) тождества из $M(\lambda)$ являются следствиями из

$$\Sigma(-1)^{\rho} \ldots (-1)^{\sigma} \ldots x_{\rho(0)} \ldots y_{\sigma(0)} u_0 \ldots u_{2k}[v_1, \ldots v_{2k}, x_{\rho(1)}, \ldots, y_{\sigma(1)}, \ldots]$$
$$\ldots, [w_1, \ldots, w_{2k}, x_{\rho(k)}, \ldots, y_{\sigma(k)}, \ldots],$$

а этот многочлен следует из (9). Поэтому, если $M(\lambda) \subset P_n(\mathfrak{U})$, то $\lambda_{k+1} < q+s_0$, т. е. все диаграммы $[\lambda]$, отвечающие ненулевым компонентам $M(\lambda) \subset P_n(\mathfrak{U})$, лежат в области с рис. 2 при $s=q+s_0$.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$. Из предложения 3.7 следует, что

$$P_n(\mathfrak{U}) = \Sigma m_\lambda M(\lambda), \tag{12}$$

где все диаграммы $[\lambda]$ лежат в полосе на рис. 2. Из [21] следует, что существует многочлен $f(n)$ такой, что $m_\lambda \leq f(n)$ в (12). Поэтому в означениях следствия 2.8 $c_n(\mathfrak{U}) \leq f(n) D_{k0}(n)$. Из этого следствия непосредственно выводится, что $\lim\sup (c_n(\mathfrak{U}))^{1/n} \leq \lim (f(n) D_{k0}(n))^{1/n} = k$. Это завершает доказательство теоремы 3.1.

Замечание 3.8. Аналогичную схему доказательства можно применить и в случае полной матричной алгебры порядка k. Читатель найдет необходимые факты о тождествах в матрицах в обзоре Э. Форманека [19]. Пусть $\mathfrak{U}_k = \operatorname{var} M_k(K)$ — соответствующее многообразие алгебр и $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}_k$. Тогда $P_n(\mathfrak{U}_k) = \Sigma m_\lambda M(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k^2})$ и m_λ одновременно ограничены многочленом от n. Из результатов А. Регева [3] следует, что $\lim_{n\to\infty} (c_n(\mathfrak{U}_k))^{1/n} = k^2$. Согласно [5, лемма 13, теорема 16] существует p_0 такое, что при $p \geq p_0$ и $\delta_1 = \ldots = \delta_{k^2} = p$ выполнено $m_\delta = 1$. Кроме того, $m_\mu = m_\nu$ для всех $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{k^2})$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{k^2})$ таких, что $\nu_i = \mu_i + p$, $i = 1, \ldots, k^2$. Отсюда легко вывести, что, если $M(\underbrace{p, \ldots, p}_{k^2})$, $M(\mu)$, $M(\nu)$ порождаются соответственно многочленами $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$, $f_2(y_1, \ldots, y_{n_2})$, $f_3(z_1, \ldots, z_{n_3})$, то $f_3(z_1, \cdots, z_{n_3})$ является следствием из $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})\, f_2(y_1, \ldots, y_{n_2})$. Следовательно, если $M(\underbrace{p, \ldots, p}_{k^2})$ является подмодулем $P_n \cap U$ для T-идеала $U \supset T(M_k)$, то все $M(\nu_1, \ldots, \nu_{k^2})$ тоже входят в U. Таким образом $P_n(\mathfrak{U}) = \Sigma p_\lambda M(\lambda)$, где $p_\lambda \leq m_\lambda$ и существует s такое, что для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k^2})$ выполнено $\lambda_{k^2} \leq s$. Отсюда из следствия 2.8 получается, что $\lim\sup (c_n(\mathfrak{U}))^{1/n} \leq k^2 - 1 < k^2 = \lim_{n\to\infty} (c_n(\mathfrak{U}_k))^{1/n}$. Хорошо известно, что радикал Джекобсона $J(\mathfrak{U})$ относительно свободной алгебры $F(\mathfrak{U})$ нильпотентен и $F(\mathfrak{U})/J(\mathfrak{U}) \cong F(\mathfrak{U}_l)$ для некоторого $l<k$. Отсюда следует, что $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}_r \mathfrak{U}_{k-1}$, т. е. U содержит в себе идеал $(U_{k-1})^r$ для некоторого r. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n = p_0 k^2$, является порождающим единственного подмодуля $M(\underbrace{p_0, \ldots, p_0}_{k^2})$ в $P_n(\mathfrak{U}_k)$. Алгебра $M_{k-1}(K)$ удовлетворяет тождеству $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, следовательно,

$$\underbrace{f(x_1, \ldots, x_n) \ldots f(y_1, \ldots, y_n)}_{r \text{ многочленов}} = 0$$

аннулируется в $\mathfrak{U}$. Поэтому $M(\underbrace{p_0 r, \ldots, p_0 r}_{k^2}) \subset U/U_k$, т. е. все разбиения λ в $P_n(\mathfrak{U}) = \Sigma p_\lambda M(\lambda)$ действительно удовлетворяют $\lambda_{k^2} \leq s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Regev. Existence of identities in $A\otimes B$. *Israel J. Math.*, **11**, 1972, 131–152.
2. S. A. Amitsur. The sequence of codimensions of PI-algebras. *Israel J. Math.*, **47**, 1984, 1—22.
3. A. Regev. The polynomial identities of matrices in characteristic zero. *Algebra*, **8**, 1980, 1417—1467.
4. V. Drensky. Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras. *J. Algebra*, **91**, 1984, 1—17.
5. E. Formanek. Invariant and the ring of generic matrices. *J. Algebra*, 89, 1984, 178—223.
6. A. Regev. Asymptotic values for degrees associated with strips of Young diagrams. *Adv. Math.*, **41**, 1981, 115–136.
7. А. Н. Стоянова-Венкова. Некоторые решетки многообразий ассоциативных алгебр, определенные тождествами пятой степени. *Доклады БАН*, **35**, 1982, 867—868.
8. Ю. Н. Мальцев. Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц. *Алгебра и логика*, 10, 1971, 363—400.
9. D. Krakowski, A. Regev. The polynomial identities of the Grassman algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **181**, 1973, 429—438.
10. A. Regev. T-ideals of degree 3 are finitely generated. *Bull. London Math. Soc.*, 10, 1978, 261—266.
11. А. Р. Кемер. Многообразия и Z_2-градуированные алгебры. *Изв. АН СССР*, сер. матем., **48**, 1984, 1042—1059.
12. С. П. Мищенко. Многообразия алгебр Ли с двуступенно-нильпотентным коммутантом. *Вест. Моск. унив., сер. I, матем. мех.*, 1984, №5, 94.
13. И. Б. Воличенко. О базисах свободной алгебры Ли по модулю некоторых T-идеалов. *Доклады АН БССР*, 24, 1980, 400—403.
14. В. Н. Латышев. О сложности несимметричных многообразий ассоциативных алгебр. I, II. *Алгебра и логика*, **16**, 1977, 149—183, 183—199.
15. И. Б. Воличенко, А. Е. Залесский. Характеризация некоторых T-идеалов с точки зрения теории представлений симметрических групп. Препринт №10, 1979, Институт математики, АН БССР, Минск.
16. H. Weyl. The classical groups, their invariants and representations. Princeton, 1946.
17. G. D. James. The representation theory of the symmetric groups. *(Lecture Notes in Math., 682)*, Berlin, 1978.
18. L. H. Rowen. Polynomial identities in ring theory. New York, 1979.
19. E. Formanek. The polynomial identities of matrices. *Contemporary Math.*, 13, 1982, 41—79.
20. E. Formanek. Noncommutative invariant theory. Preprint No. 84022, Pennsylvania State Univ., 1985.
21. A. Berele, A. Regev. Applications of hook Young diagrams to P. I. algebras. *J. Algebra*, **82**, 1983, 559—567.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 20. 5. 1985