Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ДЛЯ ОДНОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

ДИМИТР И. ПЕТРОВ

В этой работе обобщаются результаты, представленные в работе [1], на одноконтурные системы автоматического регулирования, содержащие звена с переменными запаздываниями. Здесь приведены полные доказательства этих результатов.

1. Постановка задачи. В теории автоматического регулирования рассматриваются дифференциальные уравнения специального вида

$$L(p)x(t)=M(p)u(t),\quad p=d/dt, \tag{1.1}$$

где

$$L(p)=p^m+a_1p^{m-1}+\dots+a_m, \tag{1.2}$$

$$M(p)=b_0p^n+b_1p^{n-1}+\dots+b_n,\quad (b_0\neq 0,\ m>n) \tag{1.3}$$

с реальными коэффициентами, а $u(t)$ — это функция управления.

Когда управление $u(t)$ по крайней мере n-раз непрерывно дифференцируемо, то уравнение (1.1) является обычным дифференциальным уравнением. Но в теории автоматического регулирования уравнение (1.1) рассматривается и когда $u(t)$ не является гладкой функцией. Тогда нельзя применить к ней оператор (3) в обычном смысле.

Здесь можно рассматривать обобщенные функции, но нам удобен другой подход.

Уравнения (1.1) записать (см. [4]) в виде равносильной системы

$$dz/dt=Az+\gamma u(t),\quad x(t)=\langle z(t),\ c\rangle, \tag{1.4}$$

где

$$A=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & \cdots & -a_1\end{matrix}\right\|,\quad c=\left\|\begin{matrix}1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\|,\quad \gamma=\left\|\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \gamma_{m-1}\\ \gamma_m\end{matrix}\right\|, \tag{1.5}$$

$$\gamma_1=\gamma_2=\dots=\gamma_{m-n-1}=0,\quad \gamma_{m-n}=b_0,\quad \gamma_{m-n-1}+\gamma_{m-n}a_1=b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\gamma_m+\gamma_{m-1}a_1+\cdots+\gamma_{m-n}a_m=b_n,$$

а через $\langle\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение.

Очевидно, система (1.4) имеет решение $z(t)$ для каждой локально суммируемой функции $u(t)$. Тогда функция $x(t)=\langle z(t), c\rangle$ называется решением уравнения (1.1).

Рассмотрим задачу о вынужденных T-периодических колебаниях в системах регулирования, динамика которых описывается уравнением

$$L(p)x(t)=M(p)f[t,\ x(t),\ x(t-h_1(t)),\ldots,\ x(t-h_k(t))]. \tag{1.6}$$

Ниже будем предполагать, что $f(t, x, y_1,\ldots, y_k)$ непрерывна по совокупности переменных и T-периодична по первому аргументу,а запаздывания $h_j(t)$ $(j=1,\ldots,k)$ — непрерывно дифференцируемые и тоже T-периодические функции и удовлетворяют неравенствам $0<a\leq h_j(t)\leqq b<T$, где a и b реальные числа.

Ищутся условия, при которых в изучаемой системе существуют вынужденные T-периодические режимы (т. е. существуют T-периодические решения уравнения (1.6)) и условия, при которых эти вынужденные T-периодические режимы могут быть построены приближенно методом гармонического баланса.

Рассмотрим одно из переменных запаздываний $h_j(t)$. Пусть задана функция $x(t)\in E$, где E некоторое пространство функций, определенных на отрезке $[0, T]$. Сначала продолжим эту функцию на $(-\infty, \infty)$ до T-периодической функции $\tilde{x}(t)$. Сужение функции $\tilde{x}[t-h_j(t)]$ на отрезке $[0, T]$ обозначим через $S_{h_j}x(t)$, т. е. операторы T-периодического продолжения (см. [3]) S_{h_j} $(j=1,\ldots,k)$ определены равенством

$$S_{h_j}x(t)=\tilde{x}[t-h_j(t)]. \tag{1.7}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнены неравенства*

$$|h_j'(t)|\leq q_j<1 \quad (j=1,\ldots,k). \tag{1.8}$$

Тогда каждый оператор S_{h_j} действует в пространстве $\mathscr{L}_2[0, T]$ и справедлива оценка

$$\|S_{h_j}\|_{\mathscr{L}_2\to\mathscr{L}_2}\leq 1/\sqrt{1-q_j}. \tag{1.9}$$

Дальше еще предположим, что числа

$$0,\ \pm 2\pi i/T,\ \pm 4\pi i/T,\ldots, \tag{1.10}$$

где $i=\sqrt{-1}$, не являются нулями многочлена $L(p)$, для нелинейной функции $f(t, x, y_1 \ldots, y_k)$ удовлетворяют неравенству

$$|f(t,\ x,\ y_1,\ldots,\ y_k)|\leq\alpha+\beta_0|x|+\beta_1|y_1|+\ldots+\beta_k|y_k|, \tag{1.11}$$

а запаздывания — (1.8).

2. Существование периодических решений.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

$$\rho=\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{\sqrt{1-q_1}}+\ldots+\beta_k\frac{1}{\sqrt{1-q_k}}\right)\max_{s=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots}\left|\frac{M(2\pi si/T)}{L(2\pi si/T)}\right|<1. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.6) *имеет по крайней мере одно непрерывное T-периодическое решение.*

Доказательство. Обозначим через $G(t;\ T)$ импульсно-частотную характеристику линейного звена с передаточной функцией $W(p)=M(p)/L(p)$ (см. [4]). Так как выполнено условие (1.10), то задача вынужденных T-периодических решениях эквивалентна уравнению

$$x(t)=\int\limits_0^T G(t-\tau;\ T)f[\tau,\ x(\tau),\ S_{h_1}x(\tau),\ldots,\ S_{h_k}x(\tau)]d\tau.$$

Положим

$$\mathscr{F}x(t)=f[t,\ x(t),\ \ S_{h_1}x(t),\ldots,\ S_{h_k}x(t)], \tag{2.2}$$

$$Gx(t)=\int\limits_0^T G(t-\tau;\ T)x(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

и

$$\mathscr{A}x(t)=G\mathscr{F}x(t). \tag{2.4}$$

В силу (1.9) и (1.11) оператор (2.2) действует как непрерывный оператор в пространстве $\mathscr{L}_2[0,\ T]$ и справедлива оценка

$$\|\mathscr{F}x(t)\|_{\mathscr{L}_2}\leqq\alpha\sqrt{T}+(\beta_0+\beta_1\frac{1}{\sqrt{1-q_1}}+\ldots+\beta_k\frac{1}{\sqrt{1-q_k}})\|x(t)\|_{\mathscr{L}_2}.$$

Так как оператор (2.3) действует как вполне непрерывный в $\mathscr{L}_2[0,\ T]$ (см. [2]) и его норма

$$\|G\|_{\mathscr{L}_2\to\mathscr{L}_2}=\max_{s=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots}|W(2\pi si/T)|,$$

то оператор (2.4) действует как вполне непрерывный оператор в $\mathscr{L}_2[0,\ T]$ и справедлива оценка

$$\|\mathscr{A}x(t)\|_{\mathscr{L}_2}\leqq\alpha\sqrt{T}\|G\|_{\mathscr{L}_2}+\rho\|x(t)\|_{\mathscr{L}_2}. \tag{2.5}$$

Тогда задача о вынужденных T-периодических решениях эквивалентна операторному уравнению

$$x(t)=\mathscr{A}x(t), \tag{2.6}$$

которое является уравнением с вполне непрерывным оператором.

Из оценки (2.5) легко получается, что оператор (2.4) преобразует в себя шар

$$\Pi=\{x(t);\ \ \|x(t)\|_{\mathscr{L}_2}\leqq\alpha\sqrt{T}\|G\|_{\mathscr{L}_2}/(1-\rho)\}. \tag{2.7}$$

Справедливость теоремы 1 вытекает из известного принципа Шаудера и из того, что оператор (2.3) действует как вполне непрерывный из пространства $\mathscr{L}_2[0,\ T]$ в $C[0,\ T]$ (см. [2]).

Из теоремы 1 следует, что все решения уравнения (1.6) принадлежат шару (2.7). Но оператор (2.4) вполне непрерывен и поэтому множество решений будет замкнутым и относительно компактным в $\mathscr{L}_2[0,\ T]$, т. е. оно является компактным множеством в $\mathscr{L}_2[0,\ T]$, и обозначим его через σ_0.

3. Реализуемость метода гармонического баланса. В многочастотном методе гармонического баланса приближения T-периодических решений уравнения (1.6) ищутся в виде конечных тригонометрических сумм

$$x^N(t)=\eta_0 g_0(t)+\sum_{s=1}^{N}[\eta_s g_s(t)+\xi_s e_s(t)], \tag{3.1}$$

где

$$g_0(t)=\sqrt{1/T},\quad g_s(t)=\sqrt{2/T}\cos(2\pi st/T),\quad e_s(t)=\sqrt{2/T}\sin(2\pi st/T), \tag{3.2}$$

а число N называется порядком приближения.

Для построения приближенного решения (3.1) уравнения (1.6) нужно определить коэффициенты тригонометрического многочлена (3.1).

Подставим (3.1) в функцию $f[t, x(t), x(t-h_1(t)), \ldots, x(t-h_k(t))]$ и получим функцию

$$\Phi(t, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)=f[t, x^N(t), x^N(t-h_1(t)), \ldots, x^N(t-h_k(t))], \tag{3.3}$$

которую можно разложить в ряд Фурье по тому самому тригонометрическому базису (3.2). Обозначим через $f^N(t, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ сумму первых $2N+1$ слагаемых этого ряда; т. е.

$$f^N(t, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)=\varphi_0(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)g_0(t) \tag{3.4}$$
$$+\sum_{s=1}^{N}[\varphi_s(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)g_s(t)+\psi_s(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)e_s(t)].$$

В методе гармонического баланса коэффициенты многочлена (3.1) (см. [5]) выбираются так, чтобы невязки

$$L(p)x^N(t)-M(p)f^N(t, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)$$

были ортогональны первым $2N+1$ функций (3.2).

Условия ортогональности имеют вид следующей системы нелинейных уравнений называемых уравнениями метода гармонического баланса

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= W(0)\varphi_0(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N),\\
\eta_s &= \operatorname{Re} W(2\pi si/T)\varphi_s(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)\\
&\quad+\operatorname{Jm} W(2\pi si/T)\psi_s(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N),\\
\xi_s &= \operatorname{Re} W(2\pi si/T)\psi_s(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N)\\
&\quad-\operatorname{Jm} W(2\pi si/T)\varphi_s(\eta_0, \eta_1 \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N).
\end{aligned}$$

Если система (3.5) разрешима при каждом $N=1, 2, \ldots$, то метод гармонического баланса называется реализуемым.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (2.1). *Тогда метод гармонического баланса в задаче о вынужденных T-периодических колебаниях реализуемы.*

Доказательство. Обозначим через P_N действующий в пространстве $\mathscr{L}_2[0, T]$ проекционный оператор, который каждой функции $x(t)\in\mathscr{L}_2[0, T]$ сопоставляет ее частичную сумму разложения этой функции в ряд Фурье. T-периодические решения (3.1) — это функции

$$x^N(t)=P_N x(t), \tag{3.6}$$

а функции (3.3) —

$$\Phi(t,\ \eta_0,\ \eta_1, \ldots, \eta_N,\ \xi_1, \ldots, \xi_N) = f[t,\ P_N x(t),\ P_N x(t-h_1(t)),\ P_N x(t-h_k(t))].$$

Но так как $P_N x(t)$ является T-периодической функцией, то

$$\Phi(t,\ \eta_0,\ \eta_1, \ldots, \eta_N,\ \xi_1, \ldots, \xi_N) = f[t,\ P_N x(t),\ S_{h_1} P_N x(t), \ldots, S_{h_k} P_N x(t)].$$

Функции (3.4) — $f^N(t,\ \eta_0,\ \eta_1, \ldots, \eta_N,\ \xi_1, \ldots, \xi_N) = P_N \Phi(t,\ \eta_0,\ \eta_1, \ldots, \eta_N,\ \xi_1, \ldots, \xi_N)$, т. е.

(3.7) $$f^N(t,\ \eta_0,\ \eta_1, \ldots, \eta_N,\ \xi_1, \ldots, \xi_N) = P_N f[t,\ x^N(t),\ S_{h_1} x^N(t), \ldots, S_{h_k} x^N(t)].$$

Если подставим функции (3.6) и (3.7) в уравнение (1.6), то получим операторное уравнение, эквивалентное уравнениям гармонического баланса (3.5).

Действительно,

$$L(p) x^N(t) = M(p) P_N \mathscr{F} x^N(t).$$

Но $x^N(t)$ является T-периодическим решением, тогда $x^N(t)$ будет решением уравнения

(3.8) $$x(t) = P_N \mathscr{A} x(t).$$

Таким образом, реализуемость метода гармонического баланса эквивалентна разрешимости при каждом N операторного уравнения (3.8), которое является тоже уравнением с вполне непрерывным оператором. Как и в теореме 1, шар (2.7) является инвариантным для этого оператора. В силу принципа Шаудера теорема 2 доказана.

Аналогично из теоремы 2 следует, что все решения уравнения (3.8) принадлежат шару (2.7) и образуют компактное множество в $\mathscr{L}_2$, которое обозначим через σ_N.

4. Сходимость метода гармонического баланса. Через $\Theta(\sigma_N, \sigma_0; E)$ обозначим хаусдорфовое отклонение множества σ_0 от множества σ_N в метрике пространства E.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (2.1). *Тогда метод гармонического баланса сходится по норме пространства* C, *т. е.*

$$\lim_{N\to\infty} \Theta(\sigma_N,\ \sigma_0;\ C) = 0.$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (2.1). *Тогда метод гармонического баланса сходится по норме пространства* $\mathscr{L}_2$, *т. е.*

$$\lim_{N\to\infty} \Theta(\sigma_N,\ \sigma_0,\ \mathscr{L}_2) = 0.$$

Доказательство. Выберем произвольное положительное число ε и обозначим через $M_\varepsilon(\sigma_0) = \{x^N\colon\ x^N \in \Pi,\ \inf_{x\in\sigma_0} \| x^N - x \|_{\mathscr{L}_2} < \varepsilon\}$ и $\Omega = \Pi \setminus M_\varepsilon(\sigma_0)$. Так как Ω является ограниченным замкнутым множеством, то существует такое положительное число γ, что

(4.1) $$\| x^N - \mathscr{A} x^N \|_{\mathscr{L}_2} > \gamma \quad (x^N \in \Omega).$$

В предположение противного, найдется такая последовательность $\{x_n^N\} \in \Omega$, что $x_n^N - \mathscr{A} x_n^N = u_n$ и

(4.2) $$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Выберем из последовательности $\{\mathscr{A} x_n^N\}$ сходящую последовательность $\{\mathscr{A} x_{n_s}^N\}$ и пусть

(4.3) $$\lim \| \mathscr{A} x_{n_s}^N - w \|_{\mathscr{L}_2} = 0.$$

Тогда из равенства $x^N_{n_s} - w = x^N_{n_s} - \mathscr{A}x^N_{n_s} + \mathscr{A}x^N_{n_s} - w$ и из (4.2) и (4.3) получим $\lim_{s\to\infty} \| x^N_{n_s} - w \|_{\mathscr{L}_2} = 0$.

Из равенства $x^N_{n_s} - \mathscr{A}x^N_{n_s} = u_{n_s}$ при $s \to \infty$ имеем $w - \mathscr{A}w$, т. е. $w \in \sigma_0$. С другой стороны, $x^N_{n_s} \in \Omega$ (Ω-замкнутое), тогда $w \in \Omega$, т. е. $w \bar{\in} \sigma_0$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (4.1) Дальше, из справедливости равенства $\lim_{N\to\infty} \sup_{x^N \in \Pi} \| P_N \mathscr{A} x^N - \mathscr{A} x^N \|_{\mathscr{L}_2} = 0$ (напомним, что $\{\mathscr{A} x^N\}$-компактное множество), вытекает существование числа N_0, такое, что, если $N \geqq N_0$, то выполнено

$$\sup_{x^N \in \Pi} \| P_N \mathscr{A} x^N - \mathscr{A} x^N \|_{\mathscr{L}_2} < \gamma/2. \tag{4.4}$$

Тогда из (4.1) и (4.4) получим для $N \geqq N_0$ и $x^N \in \Omega$

$$\| x^N - P_N \mathscr{A} x^N \|_{\mathscr{L}_2} \geqq \| x^N - \mathscr{A} x^N \|_{\mathscr{L}_2} - \| \mathscr{A} x^N - P_N \mathscr{A} x^N \| > \gamma/2,$$

т. е. $\sigma_N \cap \Omega = \Phi$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Сначала легко увидеть, что выполнены включения: $\sigma_0 \subset C[0, T]$ и $\sigma_N \subset C[0, T]$.

Для доказательства теоремы нужно доказать равенство

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x^N \in \sigma_N} \inf_{x \in \sigma_0} \| x - x^N \|_C = 0. \tag{4.5}$$

Пусть допустим, что оно не выполнено. Тогда существует последовательность

$$\{x^{N_s}\} \subset \sigma_{N_s} \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{4.6}$$

для которой

$$\inf_{x \in \sigma_0} \| x - x^{N_s} \|_C \geqq \delta > 0 \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{4.7}$$

Из леммы 2 и включения (4.6) вытекает равенство

$$\lim_{s\to\infty} \inf_{x \in \sigma_0} \| x - x^{N_s} \|_{\mathscr{L}_2} = 0, \tag{4.8}$$

т. е. существуют элементы $x_s \in \sigma_0$, такие, что $\lim_{s\to\infty} \| x_s - x^{N_s} \|_{\mathscr{L}_2} = 0$. Но σ_0 — компактное множество, тогда можно выбрать из $\{x_s\}$ сходящуюся в $\mathscr{L}_2[0, T]$ подпоследовательность, которую для удобства снова обозначим через $\{x_s\}$. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ и для h выполнено неравенство $\| x_s - h \|_{\mathscr{L}_2} < \varepsilon/2$, тогда $h \in \sigma_0$. Теперь, из последнего неравенства и из (4.8) легко увидеть, что $\| x^{N_s} - h \|_{\mathscr{L}_2} < \varepsilon$. В силу непрерывности оператора $\mathscr{F}$ в точке h получим

$$\lim_{s\to\infty} \| \mathscr{F} x^{N_s} - \mathscr{F} h \|_{\mathscr{L}_2} = 0$$

и так как $\{\mathscr{F} x^{N_s}\}$ — компактное множество, то $\lim_{s\to\infty} \| P_{N_s} \mathscr{F} x^{N_s} - \mathscr{F} x_{n_s} \|_{\mathscr{L}_2} = 0$. Дальше, для каждого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\| P_{N_s} \mathscr{F} x^{N_s} - \mathscr{F} x^{N_s} \| < \varepsilon/(2Q),$$

где число Q является оценкой нормы вполне непрерывного оператора (2.3), как оператор, действующий из пространства $\mathscr{L}_2[0, T]$ в пространстве $C[0, T]$. Тогда

$$\| GP_{N_s} \mathscr{F} x^{N_s} - G\mathscr{F} x^{N_s} \|_C \leq \| G \|_{\mathscr{L}_2 \to C} \| P_{N_s} \mathscr{F} x^{N_s} - \mathscr{F} x^{N_s} \|_{\mathscr{L}_2},$$

т. е.

$$\| GP_{N_s} \mathscr{F} x^{N_s} - G\mathscr{F} x^{N_s} \| < \varepsilon/2 \tag{4.9}$$

и

$$\| G\mathscr{F} x^{N_s} - G\mathscr{F} h \|_C \leq \| G \|_{\mathscr{L}_2 - C} \| \mathscr{F} x^{N_s} - \mathscr{F} h \|_{\mathscr{L}_2} < \varepsilon/2. \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) вытекает равенство

$$\lim_{s\to\infty} \| G\mathscr{F} x^{N_s} - G\mathscr{F} h \|_C = 0. \tag{4.11}$$

Но $GP_{N_s}\mathscr{F} x^{N_s} = P_{N_s} G\mathscr{F} x^{N_s} = x^{N_s}$ и $G\mathscr{F} h = h$, то равенство (4 11) можно переписать в виде

$$\lim_{s\to\infty} \| x^{N_s} - h \|_C = 0.$$

Так мы получили противоречие с неравенством (4.7).

Теорема 3 доказана.

5. Заключительные замечания и пример. Так как оператор (2 3) действует из пространства $\mathscr{L}_2$ в пространстве C^{m-n-1} (пространства $(m-n-1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций) и вполне непрерывен (см. [2]), то приведенные теоремы можно усилить. Например,

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (2.1). *Тогда метод гармонического баланса сходится по норме пространства* $C^{m-n-1}[0, T]$.

В качестве примера рассмотрим следующую одноконтурную систему (см. рис. 1а) Здесь W — это линейное звено с передаточной функцией

$$W(p) = 1/[(p+1)(p+2)(p+3)],$$

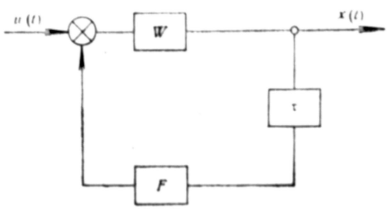

Рис. 1а

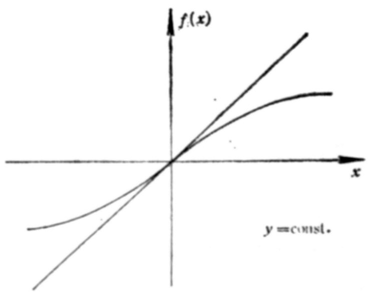

Рис. 1б

τ — звено задержки с характеристикой $h(t) = (1/2)\sin t$, а F — нелинейное звено с характеристикой $f(x)$, которая удовлетворяет оценке

$$|f(t, x, y)| < \alpha + \beta |x|.$$

Например, она имеет вид, показаный на рис. 1б

Из доказанных здесь теорем вытекает, что рассматриваемая система имеет для каждого непрерывного и 2π-периодического входа — $u(t)$ по крайней мере один $m-n-1=2$-раз гладкий 2π — периодический выход — $x(t)$, который может быть приближенно построен по методу гармонического баланса.

Автор выражает благодарность А. М. Красносельскому за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Красносельский, Д. И. Петров. Вынужденные периодические колебания в системах регулирования с задержками. *Автоматика и телемеханика*, 1984, № 10, 169—171.
2. А. М. Красносельский. Частотные критерии в задаче в вынужденных периодических колебаниях систем автоматического регулирования. *Автоматика и телемеханика*, 1980, № 9, 23—30.
3. М. А. Красносельский. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
4. А. А. Воронов. Основы теории автоматического регулирования и управления. М., 1977.
5. Е. П. Попов. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М., 1973.

ВТУ „А. Кънчев"
Русе 7004, Болгария

Поступила 17. 9. 1985
В переработанном виде 20. 4. 1987