Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ВИДА КИНКОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОДОБНЫХ УРАВНЕНИЮ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

И. Д. ИЛИЕВ, К. П. КИРЧЕВ

В работе доказано, что если нелинейность удовлетворяет некоторым достаточным условиям, то уравнение $u_t+(a(u))_x+u_{xxx}=0$, $x\in\mathrm{R}$, $t\geq 0$, имеет решения вида бегущей волны с формой кинка и эти решения являются устойчивыми. Из этого результата, в частности, вытекает, что движение кинков происходит без изменения формы.

Обозначим через X^s, $s\geq 1$, множество функций $f(x)$, определенных на действительной оси R, таких, что для каждой функции $f(x)$ существует константа c_f, для которой

$$(1)\qquad |||f|||_s^2=\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)-c_f\operatorname{sgn}(x)]^2dx+\sum_{k=1}^{s}\int_{-\infty}^{\infty}[f^{(k)}(x)]^2dx<\infty,$$

где $f^{(k)}=d^kf/dx^k$ — обобщенная производная.

Линейное пространство X^s, $s\geq 1$, снабженное нормой (1), является банаховым пространством абсолютно непрерывных на любом конечном интервале функций $f(x)$, для которых

$$(2)\qquad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm c_f.$$

Нетрудно показать, что имеет место оценка

$$(3)\qquad |c_f|\leq\sup_{x\in R}|f(x)|\leq\mathrm{const}\,|||f|||_s.$$

Следовательно, $f^2-c_f^2\in H^s(\mathrm{R})$. Здесь $H^s(\mathrm{R})$ — пространство Соболева со стандартной нормой $\|\cdot\|_s$.

Пусть $\alpha>0$ является фиксированной константой и пусть реальнозначная функция $a(z)$ принадлежит C^1 в некоторой окрестности $[-\alpha,\alpha]$. Рассмотрим уравнение

$$(4)\qquad u_t+(a(u))_x+u_{xxx}=0,\quad u=u(x,t),\quad x\in\mathrm{R},\quad t\geq 0.$$

Введем обозначения:

$$v=\frac{a(\alpha)-a(-\alpha)}{2\alpha},$$

$$P(\varphi)=v(\varphi+\alpha)^2+2a(-\alpha)(\varphi+\alpha)-2\int_{-\alpha}^{\varphi}a(z)\,dz.$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 414—419

Лемма 1. *Пусть функция* $P(\varphi)$ *удовлетворяет условиям*

$$P(\alpha)=0,\ P''(\pm\alpha)>0,\ P(\varphi)>0 \text{ при } |\varphi|<\alpha. \tag{5}$$

Тогда уравнение (4) *имеет решение вида* $u(x, t)=\Phi(x-vt)$, *для которого имеет место*

$$\Phi(\xi)\in C^3(\mathrm{R})\cap X^3,\quad \Phi'(\xi)>0,\ \xi\in\mathrm{R},\ \lim_{\xi\to\pm\infty}\Phi(\xi)=\pm\alpha.$$

Доказательство. Доказательство вытекает элементарно из условий (5). Действительно, уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$u_t+(v-\frac{1}{2}P''(u))\,u_x+u_{xxx}=0. \tag{6}$$

Подставляя в (6) $u(x, t)=\Phi(x-vt)$ и интегрируя два раза, имеем

$$\Phi'''=\frac{1}{2}P''(\Phi)\Phi',\quad \Phi''=\frac{1}{2}P'(\Phi),\quad \Phi'^2=P(\Phi).$$

Отсюда для решения $\Phi(\xi)$ получаем формулу

$$\xi=\Phi^{-1}(0)+\int_0^{\Phi}\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}\,.$$

Таким образом, все указанные свойства $\Phi(\xi)$ выполняются в силу условий $P(\pm\alpha)=P'(\pm\alpha)=0$, $P''(\pm\alpha)>0$.

Приведем несколько примеров уравнений, для которых выполняются условия (5):

$$u_t-u^2u_x+u_{xxx}=0 \tag{I}$$

— модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза;

$$u_t-|u|^m u_x+u_{xxx}=0,\quad m>0; \tag{II}$$

$$u_t+\delta\cos u\, u_x+u_{xxx}=0,\quad \delta>0 \tag{III}$$

(можно взять $0<\alpha<\pi$).

Отметим, что устойчивость кинка для уравнения (I) была ранее доказана при помощи метода Т. Бенжамина [1] в работе [2].

Для того, чтобы получить теорему существования решения для задачи Коши (4), (7),

$$u(x,\ 0)=g(x)\in X^s,\quad s\geq 3, \tag{7}$$

применим теорию абстрактных квазилинейных уравнений [3]. Пусть $g(x)\to\pm b$ при $x\to\pm\infty$. В (4) сделаем замену зависимой переменной, полагая

$$u=w+u_0,\quad u_0(x)=b\,\mathrm{th}\,x. \tag{8}$$

Тогда задача Коши (4), (7) трансформируется в задачу

$$w_t+[a(w+u_0)]_x+w_{xxx}+u_0'''=0, \tag{9}$$

$$w(x,\ 0)=g(x)-u_0(x)=r(x)\in H^s(\mathrm{R}),\quad s\geq 3. \tag{10}$$

Перепишем (9) и (10) в виде ($a_1(y)=a'(y)$)

$$\begin{aligned} &w_t+a_1(w+u_0)w_x+w_{xxx}=-u_0'''-a_1(w+u_0)u_0' \\ &w(x,\ 0)=r(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя в (11) $w=R(t)v(t)$, где $R(t)=\exp[-tD^3]$, $D=d/dx$ — сильно непрерывная унитарная группа операторов, действующих в пространстве $H^s(\mathbf{R})$, получим квазилинейное эволюционное уравнение [3, 4]

$$\frac{dv}{dt}+A(t,\ v)v=f(t,\ v),\quad v(0)=r(x), \tag{12}$$

где $A(t, y)$ — линейный оператор, зависящий от $(x,\ t)$ и $y\in H^s(\mathbf{R})$,

$$A(t,\ y)=R(-t)a_1[R(t)y+u_0]DR(t).$$

Здесь $a_1[R(t)y+u_0]$ — оператор умножения на функцию $x\to a_1[(R(t)y)(x)+u_0(x)]$;

$$f(t,\ v)=R(-t)[-u_0'''-a_1(R(t)v+u_0)u_0'].$$

Если выбрать $X=H^0=L_2(\mathbf{R})$ и $Y=H^s(\mathbf{R})$ (в терминологии [3]), то условия абстрактной теоремы существования [3] для уравнения (12) проверяются так же, как в [4]. Возвращаясь к задаче (4), (7), сформулируем результат, который получается для уравнения (4).

Теорема 1. *Пусть $s\geq 3$. Тогда для каждого $g(x)\in X^s$ существует единственное решение $u(x,\ t)$ задачи* (4), (7), *притом*

$$u\in C([0,\ T);\ X^s),\quad \frac{du}{dt}\in C([0,\ T);\ H^{s-3}(\mathbf{R})),$$

где T зависит только от $|||g|||_s$.

Условимся в дальнейшем под $[0,\ T)$ понимать интервал, на котором в силу теоремы 1 существует единственное решение $u(x,\ t)$ задачи Коши (4), (7). Отметим, что при некоторых дополнительных требованиях к нелинейности $a(u)$ можно доказать, что $T=\infty$, т. е. существует глобальное решение задачи (4), (7).

При доказательстве устойчивости решения $\Phi(x-vt)$ основную роль будет играть нелинейный функционал

$$E(u)=\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+P(u))\,dx, \tag{13}$$

инвариантный по времени, когда $u(x,\ t)$ является решением задачи Коши (4), (7) $t\in[0,\ T)$.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (5) *и $u(x,\ t)$ — решение уравнения* (4), *принадлежащее классу $C([0,\ T'];\ X^s)$, $s\geq 3$, $T'<T$ и пусть $\lim_{x\to\pm\infty}u(x,\ t)=\pm\alpha$. Тогда $dE(u)/dt=0$, т. е. $E(u)$ является законом сохранения.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $s>3$. При этом $u(x,\ t)$ является классическим решением уравнения (4). Умножая обе стороны (6) на $2u_{xx}-P'(u)$ и интегрируя по x, получим

$$0=\int u_t(2u_{xx}-P'(u))\,dx+2\int\left(u_{xx}-\frac{1}{2}P'(u)\right)\left(u_{xx}-\frac{1}{2}P'(u)+vu\right)_x dx=I_1+I_2.$$

Имеем

$$I_1=-\frac{d}{dt}\int(u_x^2+P(u))dx+2u_xu_t\Big|_{-\infty}^{+\infty}=-\frac{dE(u)}{dt},$$

$$I_2=\left[\left(u_{xx}-\frac{1}{2}P'(u)\right)^2+v(u_x^2-P(u))\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

В случае, если $s=3$, $u(x,\ t)$ является L_2-решением (т. е. для каждого $t\in[0,\ T']$ уравнение (4) выполняется почти всюду по x), u_t принадлежит $C([0,\ T'];\ L_2(\mathbf{R}))$ в силу теоремы 1 и, следовательно, мы не можем интегрировать по частям, как в случае $s>3$. При $s=3$ доказательство леммы можно провести следующим образом: при помощи теории квазилинейных уравнений [3] получить соответствующую теорему о непрерывной зависимости от начальных данных для задачи Коши (4), (7); далее, соответствующим образом регуляризуя начальные данные, после предельного перехода в (13) можно получить утверждение леммы 2.

Положим $q=\max_{|z|\leqq\alpha}|P''(z)|$. Следуя [5], введем псевдометрику

$$d_q^2(u,\ \Phi)=\inf_{\zeta\in R}(\|u_x(u,\ t)-\Phi'(x-\zeta-vt)\|^2+q\|u(x,t)-\Phi(x-\zeta-vt)\|^2). \tag{14}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\mathrm{R})$.

Лемма 3. *Пусть $u(x,\ t)\in C([0,\ T);\ X^3)$ — решение уравнения (4), для которого $\lim_{x\to\pm\infty}u(x,\ t)=\pm\alpha$. Тогда $d_q(u,\ \Phi)$ — непрерывная функция от $t\in[0,T)$ и* inf *в (14) достигается в конечной точке $\zeta=\zeta(t)$.*

Доказательство леммы можно найти в [2].

Лемма 4. *Пусть $u(x,\ t)\in C([0,\ T);\ X^3)$ — решение уравнения (4), для которого $\lim_{x\to\pm\infty}u(x,\ t)=\pm\alpha$. Тогда, если выполняются условия (5), существуют независящие от t положительные константы K,δ_0, такие, что если $d_q(u,\ \Phi)<\delta_0$, то*

$$E(u)-E(\Phi)\geqq Kd_q^2(u,\ \Phi).$$

Доказательство. Пусть inf в (14) достигается в точке $\zeta=\zeta(t)$. Зафиксируем $t\in[0,\ T)$, а заодно и ζ, и положим

$$u(x,\ t)=\Phi(x-\zeta-vt)+h(x,\ t). \tag{15}$$

Так как по условию $\lim u(x,\ t)=\lim\Phi(x-\zeta-vt)=\pm\alpha$ при $x\to\pm\infty$, то $h(x,\ t)\in H^3(\mathrm{R})$. Подставляя (15) в (13), получим

$$\Delta E=E(u)-E(\Phi)=\int[h_x^2+\frac{1}{2}P''(\Phi)h^2]dx$$
$$+\int[P''(\Phi+\theta h)-P''(\Phi)]\frac{h^2}{2}dx=I_1+I_2,$$

где $0\leqq\theta\leqq1$.

Имеем $I_1=\int hLhdx$, где самосопряженный в $L_2(\mathrm{R})$ оператор L порожден дифференциальным выражением

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}P''(\Phi).$$

Непрерывный спектр оператора L совпадает с множеством $[\sigma,\infty)$, где $\sigma=\min(P''(\alpha)/2,\ P''(-\alpha)/2)>0$. Так как $\Phi'>0$ и $L\Phi'=0$, то точка $\lambda=0$ является самым малым собственным числом оператора L. Положим $h=\mu\Phi'+\psi$, $\int\Phi'\psi dx=0$. Тогда

$$I_1=\int\psi L\psi dx\geqq\sigma_0\|\psi\|^2=\sigma_0(\|h\|^2-\mu^2\|\Phi'\|^2).$$

В верхнем выражении $\sigma_0=\sigma$, если у оператора L нет положительных собственных чисел; в противном случае σ_0 равняется меньшему из положительных собственных чисел оператора L.

Для того, чтобы оценить $\mu^2\|\Phi'\|^2$ через $\|h\|^2$, воспользуемся тем, что в точке ζ, в которой достигается минимум, имеем $\frac{d}{d\zeta}d_q^2(u,\ \Phi)=0$. Этот факт дает соотношение

$$\int[q-\frac{1}{2}P''(\Phi)]\Phi'hdx=0.$$

Отсюда получается

$$\mu\|\Phi'\|^2=\frac{1}{2q}\int P''(\Phi)\Phi' h dx, \quad \mu^2\|\Phi'\|^2\leq\frac{1}{4}\|h\|^2.$$

Следовательно, $I_1\geq\frac{3\sigma_0}{4}\|h\|^2$.

С другой стороны, из

$$d_q^2(u, \Phi)=\|h_x\|^2+q\|h\|^2<\delta_0^2$$

и леммы Соболева вытекает, что $|h|\leq\delta_0/(4q)^{1/4}$ и, следовательно, если δ_0 достаточно малое,

$$|P''(\Phi+\theta h)-P''(\Phi)|\leq\sigma_0/2.$$

Отсюда $|I_2|\leq\frac{\sigma_0}{4}\|h\|^2$, и таким образом, выводим оценку

$$\Delta E\geq\frac{\sigma_0}{2}\|h\|^2.$$

Непосредственно оценивая ΔE снизу, имеем

$$\Delta E\geq\|h_x\|^2-\left(\frac{q}{2}+\frac{\sigma_0}{4}\right)\|h\|^2.$$

Комбинируя обе оценки для ΔE, окончательно получим

$$\Delta E\geq K(\|h_x\|^2+q\|h\|^2=Kd_q^2(u, \Phi),$$

где $K=\frac{2\sigma_0}{3\sigma_0+6q}>0$.

Тем самым лемма 4 доказана.

Теперь мы готовы доказать основную теорему настоящей работы. Введем псевдометрики:

$$d_{\mathrm{I}}(u, \Phi)=\inf_{\zeta\in R}\|u(x, t)-\Phi(x-\zeta-vt)\|_1,$$

$$d_{\mathrm{II}}(u, \Phi)=\inf_{\zeta\in R}|||u(x, t)-\Phi(x-\xi-vt)||_1.$$

Теорема 2. *Пусть* $u(x, t)\in C([0, T); X^s)$, $s\geq 3$ *— решение уравнения (4), для которого* $\lim_{x\to\pm\infty}u(x, t)=\pm a$, *и пусть выполняются условия (5). Тогда для каждого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$, *такое, что если* $d_{\mathrm{I}}(u, \Phi)|_{t=0}<\delta$, *то* $d_{\mathrm{I}}(u, \Phi)<\varepsilon$ *для всех* $t\in[0, T)$.

Доказательство. Пусть K и δ_0 выбраны в соответствии с леммой 4. Так как ΔE не зависит от t, $t\in[0, T)$, то существует константа $m\geq K$, такая, что $\Delta E\leq md_1^2(u, \Phi)|_{t=0}$. Обозначим $\rho=\max(\sqrt{q}, \frac{1}{\sqrt{q}})$. Тогда имеем

$$\frac{1}{\rho}d_1(u, \Phi)\leq d_q(u, \Phi)\leq\rho d_1(u, \Phi).$$

Пусть $\varepsilon>0$, $\delta=\min\left(\frac{\delta_0}{\rho}\sqrt{\frac{K}{m}}, \frac{\varepsilon}{\rho}\sqrt{\frac{K}{m}}\right)$ и $d_1(u, \Phi)|_{t=0}<\delta$. Тогда

$$d_q(u, \Phi)|_{t=0}\leq\rho d_1(u, \Phi)|_{t=0}<\rho\delta\leq\delta_0$$

и из леммы 3 вытекает, что существует число $T_0\in(0, T)$, такое, что $d_q(u, \Phi)<\delta_0$, $t\in[0, T_0)$. Тогда в силу леммы 4

$$\Delta E\geq Kd_q^2(u, \Phi), \quad t\in[0, T_0).$$

Пусть $T_{\max} \leq T$ является самым большим числом, таким, что

$$\Delta E \geq K d_q^2(u, \Phi), \quad t \in [0, T_{\max}).$$

Допустим, что $T_{\max} < T$. Тогда при $t \in [0, T_{\max}]$ имеем

$$d_q^2(u, \Phi) \leq \frac{\Delta E}{K} \leq \frac{m}{K} d_1^2(u, \Phi)\big|_{t=0} < \frac{m\delta^2}{K} \leq \delta_0^2.$$

Применяя еще раз лемму 3, получим, что существует число $T_1 > T_{\max}$, такое, что $d_q(u, \Phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_1)$. В силу леммы 4 это противоречит выбору $T_{\max}$.

Следовательно, $T_{\max} = T$ и

$$\Delta E \geq K d_q^2(u, \Phi) \geq \frac{K}{\rho^2} d_1^2(u, \Phi), \quad t \in [0, T).$$

Отсюда

$$d_1^2(u, \Phi) \leq \frac{\rho^2}{K} \Delta E \leq \frac{m\rho^2}{K} d_1^2(u, \Phi)\big|_{t=0} < \varepsilon^2, \ t \in [0, T).$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Следствие. *Пусть выполняются условия (5). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $u(x, t)$ является решением задачи (4), (7), $t \in [0, T)$ и $d_{11}(u, \Phi)|_{t=0} < \delta$, то $d_{11}(u, \Phi) < \varepsilon$ для всех $t \in [0, T)$.*

Доказательство. Утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 2 в силу неравенства треугольника и оценки (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. T. B. Benjamin. The Stability of Solitary Waves. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A328**, 1972, 153—183.
2. Е. П. Жидков, К. П. Кирчев. Задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с начальными данными типа ступеньки. *Сиб. матем. ж.*, 25, 1984 № 5, 30—41.
3. T. Kato. Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. — In: Proc. of the Symp. at Dundee. 1974, Spectral Theory and Differential Equations (*Lect. Notes in Math.*, *448*), Berlin, 1975, 25—70.
4. T. Kato. On the Korteveg — de Vries equation. *Manuscripta math.*, 28, 1979, 89—99.
5. D. Henry, J. Perez, Wreszinski. Stability theory for solitary wave solutions of Scalar field equations. *Comm. Math. Phys.*, 85, 1982, No 3, 351—361.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 12. 11. 1986