Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР, 2

ВЕСЕЛИН С. ДРЕНСКИ

Эта работа является продолжением статьи автора под тем же заглавием. Доказывается, что многообразие $\mathfrak{B}_k$ ассоциативных алгебр над полем характеристики 0, определенное тождеством $[x_1, x_2, x_3] \dots [x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}]=0$, обладает экстремальным свойством относительно коразмерностей: если

$$\mathfrak{U}\subset\mathfrak{B}_k,\ \mathfrak{U}\neq\mathfrak{B}_k, \text{ то } \limsup\,(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}<\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{B}_k))^{1/n}.$$

Аналогичное утверждение верно и для многообразия алгебр Ли $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^3$.

Все необходимые сведения и обозначения даны в первой части этой работы [1]. Мы продолжаем нумерацию предложений и формул из [1].

4. Произведение коммутаторов длины 3. В этом параграфе мы применим метод, разработанный в предыдущей части работы, для многообразия алгебр, определенного произведением коммутаторов длины 3. Докажем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{B}_k$ — многообразие ассоциативных алгебр, определенное тождеством $[x_1, x_2, x_3] \dots [x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}]=0$, и $\mathfrak{U}$ — собственное подмногообразие $\mathfrak{B}_k$. Тогда*

$$\limsup\,(c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}\leqq 2k-1<\lim_{n\to\infty}(c_n(\mathfrak{B}_k))^{1/n}=2k.$$

Ради удобства мы будем работать в относительно свободной алгебре $F(\mathfrak{B})$ многообразия $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_{k+1}$, $\mathfrak{U}$ будет собственным подмногообразием $\mathfrak{B}$ а, $\bar{U}$ — соответствующий T-идеал в $F(\mathfrak{B})$. Пусть $G_1, \dots, G_{k+1}$ — бесконечномерные, изоморфные, но различные грассмановы алгебры с 1 над K, и пусть $f_{i1}, f_{i2}, \dots$ порождающие алгебры G_i (т. е. $f_{is}f_{it}=-f_{it}f_{is}$, $s, t=1, 2, \dots$). Известно [2], что все тождества в G_i следуют из $[x_1, x_2, x_3]=0$. Пусть $G_{ij}=G_i\otimes G_{i+1}\otimes\dots\otimes G_j$, $1\leqq i<j\leqq k+1$, тензорное произведение над K алгебр $G_i, G_{i+1}, \dots, G_j$ и

$$G=\begin{pmatrix} G_1 & G_{12} \dots G_{1,k+1}\\ 0 & G_2 \dots G_{2,k+1}\\ \dots & \dots\\ 0 & 0 \dots G_{k+1}\end{pmatrix} \tag{13}$$

алгебра верхних треугольных матриц порядка $k+1$, (i, j)-элементы которых из G_{ij}, если $i<j$, и из G_i, если $i=j$. В [3] доказывается, что при некоторых дополнительных условиях для двух алгебр R_1, R_2 и для (R_1, R_2)-бимодуля M идеал $T(R)$ полиномиальных тождеств алгебры

$$R=\begin{pmatrix} R_1 & M\\ 0 & R_2\end{pmatrix}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 14, 1988, с. 20—27

совпадает с $T(R_1)T(R_2)$. Алгебры $G_1, \ldots, G_{k+1}$ выполняют условия из [3]. Отсюда легко вывести индукцией по k, что $T(G)=T(G_1)\ldots T(G_{k+1})$. Следовательно, $T(G)$ порождается тождеством $[x_1, x_2, x_3]\ldots[x_{3k+1}, x_{3k+2}, x_{3k+3}]=0$ и $\operatorname{var} G=\mathfrak{V}$.

В [4] построен базис для $\Gamma_n(\mathfrak{V})$. Пусть

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4)=[x_1, x_2][x_3, x_4]+[x_1, x_3][x_2, x_4].$$

В [4] указано подмножество $P=\{q_{is}(x_1, \ldots, x_{2s})\}\subset P_{2s}$ многочленов вида $q_{is}(x_1, \ldots, x_{2s}) =[x_{i_1}, x_{i_2}]\ldots[x_{i_{2s-5}}, x_{i_{2s-4}}]p(x_{i_{2s-3}}, \ldots, x_{i_{2s}})$, $i_1<i_2<\ldots<i_{2s-5}<i_{2s-4}$, таких, что $\Gamma_n(\mathfrak{V})$ обладает базисом, состоящим из полилинейных произведений $\varkappa^{(n)}=\varkappa_1(x_{a_1}, \ldots, x_{a_i})\ldots\varkappa_m(x_{b_1}, \ldots, x_{b_j})[x_{c_1}, x_{c_2}]\ldots[x_{c_{2d-1}}, x_{c_{2d}}]$, $m\leqq k$, $c_1<c_2<\ldots<c_{2d-1}<c_{2d}$ и любой элемент $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ равен некоторому многочлену q_{is}, или многочлену

$$[x_{a_1}, x_{a_2}]\ldots[x_{a_{2l-1}}, x_{a_{2l}}][x_{a_{2l+1}}, \ldots, x_{a_i}],$$

$$a_1<a_2<\ldots<a_{2l-1}<a_{2l},\ a_{2l+1}>a_{2l+2}<\ldots<a_i.$$

Следовательно, базис $P_n(\mathfrak{V})$ состоит из полилинейных элементов вида

$$x_{i_1}\ldots x_{i_{n-s}}\varkappa^{(s)}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),\quad i_1<\ldots<i_{n-s},\quad j_1<\ldots<j_s. \tag{14}$$

Лемма 4.2. *В $\bar{U}$ существует ненулевой многочлен, который является линейной комбинацией произведений* (14), *в которых участвуют ровно k элементов $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$. Следовательно, $\bar{U}\cap\bar{V}_k\neq 0$.*

Доказательство повторяет дословно рассуждения из леммы 3.3 и получается после умножения любого ненулевого элемента из $\bar{U}$ справа на произведение коммутаторов длины 3.

Будем использовать идею из [5]. Пусть M_t — подпространство в $P_n(\mathfrak{V})$, натянутое на те елементы (14), в записи которых участвуют $\geqq t$ „упорядоченных" коммутаторов длины 2 (т. е. мы не считаем коммутаторы $p(x_1, x_2, x_3, x_4)=[x_1, x_2][x_3, x_4]+[x_1, x_3][x_2, x_4]$) и ровно k элементов $p(x_{a_1}, \ldots, x_{a_4})$, $[x_{b_1}, \ldots, x_{b_i}]$, $i>2$ (т. е. $M_t\subset\bar{V}_k$). Из соотношения

$$[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\ldots[x_{\sigma(2s-1)}, x_{\sigma(2s)}]\equiv(-1)^{\sigma}[x_1, x_2]\ldots[x_{2s-1}, x_{2s}] \pmod{V_1} \tag{15}$$

выводится, что M_t является $\operatorname{Sym}(n)$-подмодулем $P_n(\mathfrak{V})$. Следующая лемма проверяется непосредственно, при помощи (7) и (15).

Лемма 4.3. *Пусть*

$$\begin{aligned} f&=f(x_1, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots; z_1, z_2; u_1, \ldots, u_r; v_1, v_2, \ldots)\\ &=x_1\ldots x_p[y_1, y_2]\ldots[z_1, z_2, u_1, \ldots, u_r][v_1, v_2]\ldots \end{aligned}$$

элемент из M_t. Тогда выполняются следующие равенства:

$$f\equiv x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(p)}[y_1, y_2]\ldots[z_1, z_2, u_{\tau(1)}, \ldots, u_{\tau(r)}][v_1, v_2]\ldots \pmod{M_{t+1}},$$

$$f(x_1, \ldots, x_p; [w_1, w_2], y_2, \ldots)=0,$$

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots; z_1, z_2; u_1, \ldots, u_{r-1}, [w_1, w_2]; v_1, v_2, \ldots)\\ &\quad=x_1\ldots x_p[y_1, y_2]\ldots([z_1, z_2, u_1, \ldots u_{r-1}][w_1, w_2]\\ &\quad-[w_1, w_2][z_1, z_2, u_1, \ldots, u_{r-1}])[v_1, v_2]\ldots,\quad r>1, \end{aligned}$$

$$f(x_1, \dots, x_p;\ y_1, y_2, \dots;\ [z_1, z_2, z_3][w_1, w_2], u_0;\ u_1, \dots, u_r;\ v_1, v_2, \dots)$$
$$= x_1 \dots x_p[y_1, y_2] \dots [z_1, z_2, z_3, u_0, u_1, \dots, u_r][w_1, w_2][v_1, v_2] \dots .$$

Аналогичное соотношение выполняется, если в f подставить $z_2 \to u_0$, $z_1 \to [w_1, w_2] \times [z_1, z_2, z_3]$.

Из полной приводимости $\mathrm{Sym}(n)$-модулей и из включений $P_n(\mathfrak{V}) \cap \bar{V}_k = M_0 \supset M_1 \supset \dots$ следует модульный изоморфизм

$$P_n(\mathfrak{V}) \cap \bar{V}_k \cong M_0/M_1 \oplus M_1/M_2 \oplus \dots . \tag{16}$$

Лема 4.4. *В $\bar{U}$ существует ненулевой полилинейный многочлен вида*

$$h = \Sigma \alpha x_{a_1} \dots x_{a_m}[x_{b_1}, x_{b_2}] \dots [x_{b_{2n-1}}, x_{b_{2n}}][u_{i_1}, v_{i_1}, w_{i_1}, x_{c_1}, \dots, x_{c_p}]$$
$$\dots [u_{i_k}, v_{i_k}, w_{i_k}, x_{d_1}, \dots, x_{d_q}][x_{e_1}, x_{e_2}] \dots [x_{e_{2r-1}}, x_{e_{2r}}],$$
$$a_1 < \dots < a_m,\ b_1 < b_2 < \dots < b_{2n-1} < b_{2n},\ c_1 < \dots < c_p, \dots,$$
$$d_1 < \dots < d_q,\ e_1 < e_2 < \dots < e_{2r-1} < e_{2r},$$

т. е. h — линейная комбинация произведений (14), таких, что все $\varkappa_i$ из (14) являются коммутаторами длины $\geqq 3$, и на трех внутренних местах каждого коммутатора расположены одни и те же тройки букв.

Доказательство. Пусть $0 \neq f(x_1, \dots, x_n) \in \bar{U} \cap \bar{V}_k$ — полилинейный многочлен из леммы 4.2. Имея в виду, что $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ не является тождеством в алгебре G из (13), мы выводим, что существуют элементы g_s из $G_{i_s j_s}$, или G_{i_s} и матричные единицы $e_{i_s j_s}$, такие, что

$$f(g_1 e_{i_1 j_1}, \dots, g_n e_{i_n j_n}) \neq 0. \tag{17}$$

Грассманова алгебра удовлетворяет тождествам $[x_1, x_2, x_3] = 0$ и $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] = 0$, и поэтому на результат в (17) оказывают влияние только те многочлены $\varkappa_1, \dots, \varkappa_k$ из (14), которые принимают значения $h_1 e_{12}, h_2 e_{23}, \dots, h_k e_{k,k+1}$, $h_i \in G_{i,i+1}$. Следовательно, k из матричных единиц $e_{i_s j_s}$ в (17) равны $e_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, k$. Доказательство завершается как в случае леммы 3.4, потому что $g_i e_{i,i+1} = [g_i e_{i,i+1}, e_{i+1,i+1}, \dots, e_{i+1,i+1}]$ и k из неизвестных $x_1, \dots, x_n$ могут быть заменены коммутаторами $[u_i, v_i, w_i]$, $i = 1, \dots, k$.

Лемма 4.5. *В $\bar{U}$ существует ненулевой полилинейный многочлен*

$$g = \Sigma \alpha x_{a_1} \dots x_{a_m}[x_{b_1}, x_{b_2}] \dots [u_1, v_1, w_1, x_{c_1}, \dots] \dots [u_k, v_k, w_k, x_{d_1}, \dots],$$

т. е. в многочлене из леммы 4.4 на внутренних местах s-го длинного коммутатора находятся переменные u_s, v_s, w_s.

Доказательство. В многочлене h из леммы 4.4 подставляем

$$v_i \to v_i',\ w_i \to w_i',\ i = 1, \dots, k,$$
$$u_j \to [y_1, y_2][u_j, v_j, w_j],\ j < k,\ u_k \to [u_k, v_k, w_k][y_1, y_2].$$

Из соотношения (15) и леммы 4.2 получаем следствие из h вида

$$\Sigma \alpha \dots [y_1, y_2][u_{i_1}, v_{i_1}, w_{i_1}, \dots] \dots [y_1, y_2][u_{i_{k-1}}, v_{i_{k-1}}, w_{i_{k-1}}, \dots]$$
$$[u_k, v_k, w_k, \dots][y_1, y_2] \dots ,$$

т. е. в h остаются только те слагаемые, в которых u_k, v_k, w_k находятся в самом правом коммутаторе. Линеаризируя по y_1 и y_2, мы получаем полилинейный многочлен. После конечного числа шагов мы находим требуемый элемент из $\bar{U}$.

Лемма 4.6. *Существует натуральное число s, такое, что следующие многочлены принадлежат T-идеалу* $\bar{U}$:

$$\prod_{i=1}^{k}([z_{i1}, z_{i2}] \ldots [z_{i,2r_i-1}, z_{i,2r_i}][x_1, x_2] \ldots [x_{2s-1}, x_{2s}][u_i, v_i, w_i])$$
$$[x_1, x_2] \ldots [x_{2s-1}, x_{2s}],$$

где все переменные z_{ij} — *разные.*

Доказательство. Пусть переменная x_i находится в „хвосте" самого правого коммутатора в некотором из слагаемых многочлена g из леммы 4.5. Подставляем $x_i \to [y_1, y_2]$. В результате мы получаем многочлен, в котором участвует слагаемое $f[y_1, y_2]$ для некоторого $f \in F$, а во всех остальных слагаемых $[y_1, y_2]$ лежит левее коммутатора $[u_k, v_k, w_k, \ldots]$. Продолжая таким образом, мы получим выражение вида

$$\Sigma\alpha x_{a_1} \ldots x_{a_m}[x_{b_1}, x_{b_2}] \ldots [u_1, v_1, w_1] \ldots [u_k, v_k, w_k] \ldots,$$

т. е. все длинные коммутаторы в g заменены коммутаторами длины 3. Сейчас подставляем $x_{a_1} \to [x'_{a_1}, x''_{a_1}]$ и получаем подобное выражение, в котором одна из переменных x_{a_1} заменена коммутатором. После конечного числа шагов мы найдем в $\bar{U}$ многочлен

$$\Sigma\alpha[x_{b_1}, x_{b_2}] \ldots [u_1, v_1, w_1][x_{c_1}, x_{c_2}] \ldots [u_k, v_k, w_k] \ldots . \tag{18}$$

Без ограничения общности можно предполагать, что в (18) есть слагаемое

$$\alpha_0[x_1, x_2] \ldots [x_{2a-1}, x_{2a}][u_1, v_1, w_1][y_1, y_2] \ldots [y_{2b-1}, y_{2b}][u_2, v_2, w_2]$$
$$[z_1, z_2] \ldots [u_k, v_k, w_k][t_1, t_2] \ldots [t_{2d-1}, t_{2d}], \quad \alpha_0 \neq 0.$$

Подставляем $u_1 \to [z_{11}, z_{12}] \ldots [z_{1,2p-1}, z_{1,2p}][y_1, y_2] \ldots [y_{2b-1}, y_{2b}]$

$$[z_1, z_2] \ldots [t_1, t_2] \ldots [t_{2d-1}, t_{2d}][u_1, u'_1, u''_1]$$

(в значение u_1 входят все переменные $y_b, z_c, \ldots, t_d$),

$$u_2 \to [z_{21}, z_{22}] \ldots [z_{2,2q-1}, z_{2,2q}][x_1, x_2] \ldots [x_{2a-1}, x_{2a}]$$
$$[z_1, z_2] \ldots [t_1, t_2] \ldots [t_{2d-1}, t_{2d}][u_2, u'_2, u''_2]$$

(участвуют все $x_a, z_c, \ldots, t_d$) и т. д. Умножаем справа на произведение коммутаторов

$$[x_1, x_2] \ldots [x_{2a-1}, x_{2a}][y_1, y_2] \ldots [y_{2b-1}, y_{2b}][z_1, z_2] \ldots$$

из переменных $x_a, y_b, z_c, \ldots$ (в этом произведении не участвуют элементы t_d). Таким образом все слагаемые в (18) исчезают, кроме

$$\alpha_0 \prod_{i=1}^{k}([z_{i1}, z_{i2}] \ldots [z_{i,2r_i-1}, z_{i,2r_i}][x_1, x_2] \ldots [t_{2d-1}, t_{2d}]$$
$$[u_i, u'_i, u''_i, v_i, w_i])[x_1, x_2] \ldots [t_{2d-1}, t_{2d}] \neq 0.$$

Сейчас заменим $v_i \to [v, v']$, $w_i \to [w, w']$ и умножим слева на $[v, v'][w, w']$. Таким образом мы получим желанный элемент из $\bar{U}$.

Предложение 4.7. *Пусть* $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$. *Тогда существуют числа* r *и* s, *такие, что все неприводимые* $\mathrm{Sym}(n)$*-подмодули* $M(\lambda) = M(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \subset P_n(\mathfrak{U})$ *удовлетво-*

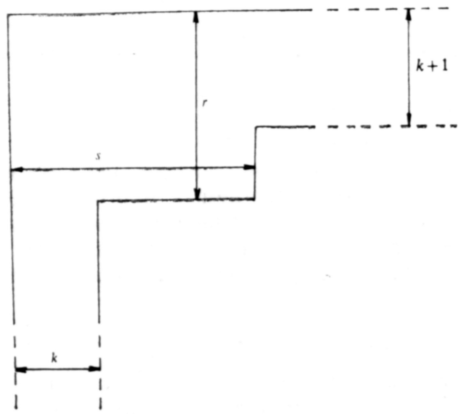

Рис. 1

ряют $\lambda_{k+2} < s$, $\lambda_{r+1} < k+1$. *Следовательно, диаграммы* $[\lambda]$ *лежат в области на рис. 3.*

Доказательство. Как в предложении 3.7, одновременно с основным утверждением мы будем доказывать по индукции, что существуют числа r_k и s_k, такие что $P_n(\mathfrak{B}_k) = \Sigma_{m_\lambda} M(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и $\lambda_{k+1} < r_k$, $\lambda_{s_k+1} < k+1$. Будем использовать цепочку $P_n(\mathfrak{B}) \cap \bar{V}_k = M_0 \supset M_1 \supset \dots$ и разложение (16). Предположим, что $\bar{U} \subset \bar{V}$ и $M(\lambda) \subset P_n(\mathfrak{B}) \cap \bar{U}$. Пусть $M(\lambda) \subset M_t$ и гомоморфный образ $M(\lambda)$ в M_t/M_{t+1} отличен от нуля. Достаточно предполагать, что $M(\lambda)$ порождается многочленом

$$\psi(\mathrm{lin}\,((\prod_{i=1}^{r} S_{a_i}(x_1, \dots, x_{a_i}))\tau^{-1})), \quad \tau \in \mathrm{Sym}(n), \tag{19}$$

где $\psi: P_n \to M_t/M_{t+1}$ является $\mathrm{Sym}(n)$-модульным гомоморфизмом, определенным правилом

$$\psi: x_{i_1} \dots x_{i_n} \to x_{i_1} \dots x_{i_s}[x_{i_{s+1}}, \dots] \dots [\dots, x_{i_n}]$$

для некоторого фиксированного расположения коммутаторных скобок и $\mathrm{lin}\, f$ — линеаризация многочлена f. Рассмотрим элемент из M_t/M_{t+1}

$$f = x_1 \dots x_a [v_1, v_2] \dots [v_{2d-1}, v_{2d}] [u_1, u_1', u_1'', y_1, \dots, y_b] \dots [u_k, u_k', u_k'', z_1, \dots, z_c] [w_1, w_2] \dots [w_{2e-1}, w_{2e}] \tag{20}$$

(где некоторые из длинных коммутаторов заменены многочленами вида $[t_1, t_2][t_3, t_4] + [t_1, t_3][t_2, t_4]$). Очевидно, что буквы $x_1, \dots, x_a$ коммутируют между собой, то же самое верно для $y_1 \dots, y_b$ и $z_1, \dots, z_c$, а группы переменных $v_1, \dots, v_{2d}; \dots; w_1, \dots, w_{2e}$ альтернируют. Пусть порождающий (19) записан в виде линейной комбинации многочленов (20) и пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — элемент из M_t, который по модулю M_{t+1} равен (19). Тогда подстановка $x_1 = \ldots = x_{\lambda_1} = y_1$, $x_{\lambda_1+1} = \ldots = x_{\lambda_1+\lambda_2} = v_2$ и т. д. в h дает ненулевой элемент $h_1(y_1, \ldots, y_m)$ из $F(\mathfrak{V})$. Как в случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{k+1}\mathfrak{A}$, из леммы 4.6 легко вывести, что степень $h_1(y_1, \ldots y_m)$ относительно y_{k+2} ограничена числом s, которое не зависит от λ и t. Кроме того, для достаточно большого r степень $h_1(y_1 \ldots, y_m)$ относительно x_r меньше $k+2$. Поэтому диаграмма $[\lambda]$, отвечающая подмодулю $M(\lambda) \subset \overline{U}$, лежит в области на рис. 3. В экстремальном случае, когда $\overline{U} = \overline{V}_k$ можно утверждать даже, что ограничена $k+1$-ая строчка диаграммы $[\lambda]$, т. е. сделать индуктивный шаг из $\mathfrak{V}_k$ к $\mathfrak{V}_{k+1}$.

Доказательство теоремы 4.1 является непосредственным следствием предложения 4.7 и проводится как в случае теоремы 3.1.

5. Многообразия алгебр Ли. В этом параграфе мы изложим вкратце некоторые результаты о многообразиях алгебр Ли. Обозначим $\mathfrak{A}$ многообразие абелевых алгебр, а через $\mathfrak{N}_k$ — многообразие нильпотентных алгебр класса $\leqq k$. Произведение $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ определяется тождеством $[[x_1, x_2], \ldots, [x_{2k+1}, x_{2k+2}]] = 0$. Кроме того, $\mathfrak{A}^s$ — многообразие разрешимых алгебр класса $\leqq s$. Остальные обозначения — как в ассоциативном случае.

Лемма 5.1. а) *При $n > 1$ линейное пространство $P_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A})$ имеет базис, состоящий из полилинейных коммутаторов вида*

$$[[x_{a_1}, \ldots, x_{a_p}], [x_{b_1}, \ldots, x_{b_q}], \ldots, [x_{c_1}, \ldots, x_{c_r}]], \tag{21}$$

где $a_1 > a_2 < \ldots < a_p$, $b_1 > b_2 < \ldots < b_q, \ldots, c_1 > c_2 < \ldots < c_r$, число внутренних коммутаторов $\leqq k$ и $b_1 = \min\{a_1, b_1, \ldots, c_1\}$.

б) *Базис линейного пространства $P_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3)$ состоит из тех многочленов* (21), *для которых $a_1 > b_1 < \ldots < c_1$.*

Доказательство. Из [6] известно, что если мы упорядочим произвольным образом коммутаторы $\varkappa_i = [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}]$, $i_1 > i_2 \leqq \ldots \leqq i_p$ и $[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_s}]$, $s \leqq k$ является базисом свободной алгебры в $\mathfrak{N}_k$, то элементы $[\varkappa_{j_1}, \ldots, \varkappa_{j_s}]$ составляют базис коммутанта свободной алгебры в $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$. Отсюда немедленно выводится случай а) предложения, потому что базис $P_s(\mathfrak{N}_k)$ состоит из полилинейных элементов $[x_{j_1}, x_1, x_{j_3}, \ldots, x_{j_s}]$, $s \leqq k$. Для доказательства б) заметим, что коммутант L' свободной алгебры Ли L является свободной алгеброй со свободными порождающими $\varkappa_i = [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}]$, $i_1 > i_2 \leqq \ldots \leqq i_p$. Из изоморфизма $F(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3) \cong L/((L')^{k+1} + (L')'')$ следует, что алгебра $(F(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3))'$ свободно порождается в многообразии $\mathfrak{N}_k \cap \mathfrak{A}^2$ теми же элементами $\varkappa_i$. Но $P_n(\mathfrak{N}_k \cap \mathfrak{A}^2)$ имеет базис $[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n}]$, $j_1 > j_2 < \ldots < j_n$, $n \leqq k$. Отсюда выводится б).

Лемма 5.2. а) *Для производящих функций коразмерностей многообразий $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3$ выполнены равенства*

$$\tilde{c}(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}, t) = t + \sum_{s=1}^{k} (1 + (t-1)e^t)^s/s,$$

$$\tilde{c}(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3, t) = t + (1 + (t-1)e^t) + \sum_{s=2}^{k} (s-1)(1 + (t-1)e^t)^s/s!$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}))^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} (c_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3))^{1/n} = k.$

Доказательство случая а) получается из следствия 2.4 и леммы 5.1 путем сравнения базисов пространств $P_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A})$, $P_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3)$ с базисом $\Gamma_n(\mathfrak{W}_{k+1}) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap W_{k+1})$ в ассоциативном случае. Доказательство б) следует из а) и из леммы 2.5.

Теорема 5.3. *Пусть* $\mathfrak{U}$ — *собственное подмногообразие многообразия алгебр Ли* $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^3$. *Тогда*

$$\limsup (c_n(\mathfrak{U}))^{1/n}\leqq k-1<\lim_{n\to\infty} (c_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^3))^{1/n}=k.$$

Доказательство. Будем придерживаться идеи доказательства теоремы 3.1. Используя базис $P_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^3)$ из леммы 5.1, как в лемме 3.3, мы выводим, что в $U\supset(L')^{k+1}+L'''$ содержится полилинейный многочлен

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\Sigma\alpha\,[[x_{a_1},\ldots,x_{a_p}],[x_{b_1},\ldots,x_{b_q}],\ldots,[x_{c_1},\ldots,x_{c_r}]], \tag{22}$$

$$a_1>a_2<\ldots<a_p,\ b_1>b_2<\ldots<b_q,\ldots,\ c_1>c_2<\ldots<c_r,\ a_1>b_1<\ldots<c_1,$$

где каждое слагаемое содержит ровно k „внутренних" коммутаторов и

$$f(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv 0 \pmod{(L')^{k+1}+L'''}.$$

Повторяя рассуждения из леммы 3.4, получаем, что мы можем заменить k из переменных $x_1,\ldots,x_n$ коммутаторами и получить ненулевой элемент по модулю $(L')^{k+1}$. После перенумерации переменных можно считать, что мы подставляем коммутаторы вместо $x_{n-k+1},\ldots,x_n$, т. е.

$$f(x_1,\ldots,x_{n-k},[u_{n-k+1},v_{n-k+1}],\ldots,[u_n,v_n])\not\equiv 0 \pmod{(L')^{k+1}}.$$

Если в записи (22) некоторая буква x_i, $i>n-k$, находится на втором месте во внутреннем коммутаторе (например, в $[x_{a_1},x_i,x_{a_3},\ldots,x_{a_p}]$), то $a_1>i>n-k$, поэтому подстановка $x_{n-k+1}\to[u_{n-k+1},v_{n-k+1}],\ldots,x_n\to[u_n,v_n]$ превращает это слагаемое в нуль. То же самое происходит, когда x_i находится в „хвосте" коммутатора. Поэтому

$$\begin{aligned}&f(x_1,\ldots,x_{n-k},[u_{n-k+1},v_{n-k+1}],\ldots,[u_n,v_n])\\&=\Sigma\alpha[[u_{a_1},v_{a_1},x_{a_2},\ldots,x_{a_p}],[u_{b_1},v_{b_1},x_{b_2},\ldots,x_{b_q}],\ldots,\\&\qquad[u_{c_1},v_{c_1},x_{c_2},\ldots,x_{c_r}]],\\&a_2<\ldots<a_p,\ b_2<\ldots<b_q,\ldots,\ c_2<\ldots<c_r,\ a_1>b_1<\ldots<c_1,\end{aligned}$$

т. е. этот многочлен ненулевой в $F(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^3)$. Доказательство леммы 3.5 проходит без затруднений, и мы выводим, что $\bar{U}\subset F(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^3)$ содержит ненулевой многочлен

$$\Sigma\beta_i(-1)^\rho\ldots(-1)^\sigma[[u_{i_1},v_{i_1},x_{\rho(1)},\ldots,y_{\sigma(1)}],\ldots,[u_{i_k},v_{i_k},x_{\rho(k)},\ldots,y_{\sigma(k)}]], \tag{23}$$

$$\rho,\ldots,\sigma\in\mathrm{Sym}(k),\quad i_1>i_2<\ldots<i_k.$$

При этом мы можем предполагать, что число переменных $x,\ldots y$ — четное. Поэтому

$$\begin{aligned}&\Sigma(-1)^\rho\ldots(-1)^\sigma[[u_1,v_1,x_{\rho(1)},\ldots,y_{\sigma(1)}],[u_2,v_2,x_{\rho(2)},\ldots,y_{\sigma(2)}]]\\&=-\Sigma(-1)^\rho\ldots(-1)^\sigma[[u_2,v_2,x_{\rho(1)},\ldots,y_{\sigma(1)}],[u_1,v_1,x_{\rho(2)},\ldots,y_{\sigma(2)}]],\end{aligned}$$

и мы можем переставлять пары переменных $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\ldots,(u_k,v_k)$, используя тождество Якоби и антикоммутативность. Известно, что $P_k(\mathfrak{N}_k\cap\mathfrak{A}^2)$ является неприводимым $\mathrm{Sym}(k)$-модулем. Поэтому, если

$$h(x_1,\ldots,x_k)=\Sigma a_i[x_{i_1},\ldots,x_{i_k}]\neq 0 \text{ в } P_k(\mathfrak{N}_k\cap\mathfrak{A}^2),$$

то из $h(x_1, \ldots, x_k)$ следует $[x_1, \ldots, x_k] \in P_k(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}^2)$, т. е. $[x_1, \ldots, x_k]$ является линейной комбинацией элементов $h(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$. Аналогично, из многочлена (23) в $F(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3)$ следует

$$\Sigma(-1)^\rho \ldots (-1)^\sigma [[u_1, v_1, x_{\rho(1)}, \ldots, y_{\sigma(1)}], \ldots, [u_k, v_k, x_{\rho(k)}, \ldots, y_{\sigma(k)}]].$$

В дальнейшем доказательство повторяет рассуждения из теоремы 3.1. Конечно, если $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^3$ и $P_n(\mathfrak{U}) = \Sigma b_\lambda M(\lambda)$, $P_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}) = \Sigma a_\lambda M(\lambda)$, то $b_\lambda \leqq a_\lambda$, а кратности a_λ ограничены многочленом от n, потому что множество $P_n(\mathfrak{N}_k\mathfrak{A})$ полилинейных лиевых элементов вкладывается как $\mathrm{Sym}(n)$-подмодуль в множество ассоциативных многочленов $P_n(\mathfrak{W}_{k+1})$.

Припомним, что многообразие алгебр Ли $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k$ определяется тождеством $[[x_1, \ldots, x_{k+1}], [y_1, \ldots, y_{k+1}]] = 0$. Следующий результат показывает, что для многообразий алгебр Ли в принципе нельзя найти хорошую оценку для коразмерностей.

Теорема 5.4. *Пусть ε — вещественное число и $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует k, такое, что для достаточно больших n выполнено*

$$c_n(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k) > \Gamma((1-\varepsilon)n),$$

где $\Gamma(t)$ — гамма функция.

Доказательство. Зафиксируем число k, и пусть $n = kq + r$, $0 \leqq r < k$. Используя результаты А. Шмелькина [6] о базисе свободной полинильпотентной алгебры Ли, выводим, что следующие полилинейные многочлены линейно независимы в $F(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k)$:

$$[[x_1, \ldots, x_r], [y_1, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}], \ldots, [y_q, w_{j_2}, \ldots, w_{j_k}]],$$

где $x_1, \ldots x_r$, $y_1, \ldots, y_q$ — фиксированные буквы, а $v_{i_2}, \ldots v_{i_k}, \ldots, w_{j_2}, \ldots, w_{j_k}$ — все остальные переменные. Поэтому, $c_n(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_k) \geqq (n-r-q)!$. Имея в виду, что $n-r-q = (n-r)(1-1/k)$, при $1/k < \varepsilon$ мы выводим, что для больших n выполнено $(n-r)(1-1/k) > (1-\varepsilon)n$, откуда следует теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Дренски. Экстремальные многообразия алгебр, 1. *Сердика*, 13, 1987, 320—332.
2. D. Krakowski, A. Regev. The polynomial identities of the Grassman algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181, 1973, 429—438.
3. А. Ш. Абакаров. О тождествах алгебры треугольных матриц. — В: Модули и алгебраические группы (*Записки науч. семинаров ЛОМИ АН СССР*, 114, Ленинград, 1982, 7—27.
4. И. Б Воличенко, А. Е. Залесский. Характеризация некоторых T-идеалов с точки зрения теории представлений симметрических групп. Препринт № 10, 1979, Институт математики АН БССР, Минск.
5. V. Drensky. Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras. *J. Algebra*, 91, 1984, 1—17.
6. А. Л. Шмелькин. Свободные полинильпотентные группы. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 28, 1964, 91—122.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 20. 5. 1985