Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

SUR LES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES ASSOCIEES A UN ESPACE DE RIEMANN

LANDO DEGOLI

Tout en conservant leur métrique, on démontre la possibilité d'associer à un Espace de Riemann plongé dans un Espace Euclidien des transformations ponctuelles en forme canonique.

1. Nous démontrerons qu'il est possible d'associer un Espace de Riemann plongé dans un Espace Euclidien à une transformation ponctuelle et écrire les équations d'une telle transformation en forme canonique dans l'entour d'un point préfixé de l'Espace de Riemann, suivant les schèmes de la théorie classique des transformations ponctuelles (voir: [8] et [9]).

On sait qu'une courbe qui appartient à l' S_3 — l'Espace Euclidien — est complètement déterminée par sa courbure et sa torsion en fonction de l'arc s (voir: [5]).

Vice versa, choisie arbitrairement une fonction positive et une fonction quelconque d'une variable s, on peut toujours considérer la prémière comme courbure et la seconde comme torsion d'une courbe de l'Espace Euclidien à trois dimensions.

En passant à une surface de l'Espace ordinaire, on démontre (voir: [5]) qu'elle est rigidement determinée par sa métrique (prémière forme fondamentale) et par sa seconde forme fondamentale.

Mais on ne dît pas que, données deux formes quadratiques, la première définie positive, elles peuvent être considerées comme première et seconde formes fondamentales d'une surface. Il faut que leurs coefficients satisfassent aux conditions de Codazzi.

Ricci a généralisé ces conditions à un Espace de Riemann immergé dans un Espace Euclidien (voir: [2]).

Soit donc un Espace Euclidien S_r de coordonnées cartesiennes orthogonales: x_1, $x_2, \ldots, x_r$.

Considérons dans cet Espace une variété W_n $(n<r)$, lieu géometrique à n dimensions, definie par $r-n$ équations du type:

$$f_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_r)=0 \quad (\beta=n+1, n+2, \ldots, r) \tag{1}$$

et par m $(0<m<n-r)$ inégalités:

$$g_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)\geqq 0 \quad (s=1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Où f et g sont continues et dérivables à plaisir.

Si une ou plus des fonctions g sont égalisées à zéro, on obtient des variétés $V_h(h<n)$, que nous dirons: frontières de W_n.

Supposons qu'il soit possible d'exprimer un entour H de W_n par les équations paramétriques (voir: [3]):

$$x_q=f_q(t_1, t_2, \ldots, t_n) \quad (q=1, 2, \ldots, r). \tag{3}$$

Les $t_i (\beta\leqq i\leqq r)$ répresentent les coordonnées paramétriques de W_n dans l' entour H, dont les points sont en correspondance biunivoque avec les points d'une hypersphère de l'Espace Euclidien à $n+1$ dimensions.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 14, 1988, p. 264—270.

Il s'ensuit que nous pourrons définir W_n come l'ensemble d'un nombre fini ou ou d'une infinité numérable d'entours à n dimensions.

Il est connu qu'on peut plonger cette variété dans un Espace Euclidien S_r avec un nombre r suffisamment grand de dimensions, et qu'un théorème de Whitney assure que: $r \leq 2n$ (voir: [6] et [7]).

Pour cela la variété W_n est un Espace de Riemann, qui possède comme métrique induite celle de l'Espace Euclidien S_r.

En effet soit:

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_r^2 \tag{4}$$

la métrique de S_r.

Par (3), elle dévient dans l'entour H:

$$ds^2 = \sum_{n+1}^{r}{}_q \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial f_q}{\partial t_i} \frac{\partial f_q}{\partial t_j} dt_i dt_j. \tag{5}$$

Cette formule constitue la première forme fondamentale de l'Espace de Riemann.

Mais si l'Espace de Riemann W_n est serré, la fonction f ne possède pas ses extrèmes dans W_n.

Il s'ensuit que si l'on démontre qu'une fonction f ne possède pas son maximum ou son minimum dans cette variété, l'Espace de Riemann W_n est ouvert.

2. Il est facile de démontrer qu'on peut associer à un Espace de Riemann W_n une transformation ponctuelle de S_r.

Considérons en effet dans l'entour H les formules (3) mettant en évidence les variables: $t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_r$. Il en résulte que par (1) on peut écrire:

$$x_q = f_q(t_1, t_2, \ldots, t_n) + \Omega_q(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_r) \quad (q = 1, 2, \ldots, r), \tag{6}$$

où Ω_q sont nulles pour: $t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = t_r = 0$.

On obtient ainsi une transformation ponctuelle en S_r, qui dans l'entour H de W_n transforme les coordonnées curvilignes $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_r$ en coordonnées cartésiennes orthogonales $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Choisi un point $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ dans l'entour H de W_n, considérons en P un système de $r-n$ vecteurs orthogonaux à W_n dans S_r et notons: Z_q^β les composantes de tels vecteurs, en observant qu'elles sont fonctions du point P, c'est-à-dire de t_1, $t_2, \ldots, t_n$. Etant unitaires et orthogonales, elles satisfont aux équations:

$$\sum_{1}^{n}{}_q Z_q^\beta Z_q^\gamma = \delta_\beta^\gamma \quad (\beta, \gamma = n+1, n+2, \ldots, r). \tag{7}$$

Mais puisqu'elles sont aussi orthogonales à W_n dans P, elles satisfont aux conditions:

$$\sum_{1}^{r}{}_q Z_q^\beta \frac{\partial f_q}{\partial t_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad \beta, \gamma = n+1, n+2, \ldots, r). \tag{8}$$

Par (6) on obtient:

$$x_q = f_q(t_1, t_2, \ldots, t_n) + \sum_{n+1}^{r}{}_\beta t_\beta Z_q \quad (q = 1, 2, \ldots, r), \tag{9}$$

qui résulte une nouvelle expression de la transformation ponctuelle dans l'entour H. Pour démontrer que cette transformation n'est pas dégénerée, considérons le déterminant Jacobien de la transformation (9), quand il est:

$$t_\beta = 0 \quad (\beta = n+1,\ n+2, \dots, r).$$

On obtient:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} & Z_1^{n+1} \, Z_1^{n+2} \dots Z_1^r \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} & Z_2^{n+1} \, Z_2^{n+2} \dots Z_2^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} & Z_n^{n+1} \, Z_n^{n+2} \dots Z_n^r \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial t_n} & Z_{n+1}^{n+1} \, Z_{n+1}^{n+2} \dots Z_{n+1}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_r}{\partial t_1} & \frac{\partial x_r}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_r}{\partial t_n} & Z_r^{n+1} \, Z_r^{n+2} \dots Z_r^r \end{vmatrix}.$$

Le carré de J résulte:

$$J^2 = \begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^n & a_{n2}^n & \cdots & a_{nn}^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

où:

$$a_{ij}^q = \sum_1^n{}_{ij} \frac{\partial f_q}{\partial t_i} \frac{\partial f_q}{\partial t_j} \quad (q = 1,\ 2, \dots, n).$$

Il en résulte:

$$J^2 = \begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^n & a_{n2}^n & \cdots & a_{nn}^n \end{vmatrix}.$$

qui est le déterminant de la première forme fondamentale de W_n et pour cela il est certainement positif et divers de zéro.

Donc les formules (9) *expriment une transformation ponctuelle rélative à un entour H de W_n contenu dans S_r.*

Nous avons vu que les variables de cette transformation ponctuelle sont en général des coordonnées curvilignes.

Démontrons comme il soit possible construire avec ces variables la métrique de S_r.

En effet en differentiant (9) on obtient:

$$dx_q = df_q + \sum_{n+1}^r{}_\beta \, x_\beta Z_q^\beta + \sum_{n+1}^r{}_\beta \, Z_q^\beta dx \quad (q = 1,\ 2, \dots, r).$$

Les formules (4) et (5) associées à (8) et (9) donnent:

$$dS^2 = ds^2 + 2 \sum_{n+1}^{r}{}_{\beta}\, t_\beta \Psi_\beta + 2 \sum_{n+1}^{r}{}_{\beta\gamma}\, t_\beta\, dt_\gamma\, \Omega_{\beta\gamma} + \sum_{n+1}^{r}{}_{\beta\gamma}\, t_\beta\, t_\gamma\, \Psi_{\beta\gamma} + \sum_{n+1}^{r}{}_{\beta}\, dt_\beta^2. \tag{10}$$

Il s'ensuit que les Ψ_β sont des formes quadratiques en dt_i, qu'on peut écrire:

$$\Psi_\beta = \sum_{1}^{n}{}_{q}\, dt_q\, dZ_q^\beta = \sum_{1}^{n}{}_{q}\, Z_q^\beta\, d^2 t_q,$$

c'est-à-dire:

$$\Psi_\beta = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, h_{\beta ij}\, dt_i\, dt_j.$$

Elles sont les secondes formes fondamentales de W_n.

Les $\Omega_{\beta\gamma}$ résultent formes linéaires en dt_i, qu'on peut écrire

$$\Omega_{\beta\gamma} = -\Omega_{\gamma\beta} = \sum_{1}^{r}{}_{q}\, dZ_q^\beta\, dZ_q^\gamma, \tag{11}$$

c'est-à-dire

$$\Omega_{\beta\gamma} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, h_{\beta\gamma i}\, dt_i$$

avec $h_{\beta\gamma i} = -h_{\gamma\beta i}$. Elles répresentent les torsions. Enfin les $\Psi_{\beta\gamma}$ résultent formes quadratiques qu'on peut écrire

$$\Psi_{\beta\gamma} = \sum_{1}^{n}{}_{q}\, dZ_q^\beta\, dZ_q^\gamma, \tag{12}$$

c'est-à-dire:

$$\Psi_{\beta\gamma} = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, \Theta_{\beta\gamma}\, dt_i\, dt_j.$$

Donc: *La métrique de l'Espace Euclidien S_r dans l'entour H de l'Espace de Riemann W_n est complètement définie par la prémière forme fondamentale, par les secondes formes fondamentales et par les torsions.*

3. Supposons maintenant que le point A soit l'origine du système de coordonnées $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et qu'il existe une transformation ponctuelle de S_r qui transforme les coordonnées curvilignes t_i en coordonnées orthogonales x_s. En choisissant un répere opportun (voir: [8]), on aura:

$$x_i = t_i + [2] \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad x = 0 + [2] \quad (\beta = n+1, n+2, \ldots, r).$$

Notons Z_q les vecteurs unitaires orthogonaux à W_n en A et supposons qu'ils soient donnés par les formules:

$$Z_q^\beta = \delta_\beta^q + \sum_{1}^{n}{}_{j}\, m_{\beta j}^q\, t_j + [2] \quad \begin{array}{l}(\beta = n+1, n+2, \ldots, r)\\ (q = 1, 2, \ldots, r),\end{array} \tag{13}$$

où $m_{\beta j}^q$ sont des constantes. Par (9) on obtient:

$$x_i = t_i - \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{jk}\, p_{jk}^i\, t_j\, t_k + \sum_{1}^{n}{}_{hj}\, m_{hj}^i\, t_h\, t_j + [3], \tag{14}$$

(14) $$x_\beta = t_\beta - \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{jk} p^\beta_{jk} t_j t_k + \sum_1^n {}_{hj} m^\beta_{hj} t_h t_j + [3],$$

où p^i_{jk}, p^β_{jk}, m^i_{hj}, m^β_{hj} sont des constantes.

A cause de (10), il s'ensuit que: $m^\beta_{jh} = -m^h_{\beta j}$; $p^\beta_{jk} = m^k_{\beta j}$ et la transformation devient:

(15) $$\begin{aligned} x_i &= t_i - \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{jk} p^i_{jk} t_i t_k + \sum_1^n {}_{hj} p^i_{hj} t_h t_j + [3] \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ x_\beta &= t_\beta - \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{jk} p^\beta_{jk} t_j t_k + \sum_1^n {}_{hj} m^\beta_{hj} t_h t_j + [3] \quad (\beta = n+1, n+2, \ldots, r). \end{aligned}$$

Les formes fondamentales et les torsions deviennent dans le point A:

$$\Psi_\beta = \sum_1^n {}_{jk} p^\beta_{jk} dt_j dt_k; \quad \Omega_{\beta\gamma} = \sum_1^n {}_j m^\gamma_{\beta j} dt_j.$$

Mais les coeficients p^i_{jk} sont nuls dans A lorsqu'ils sont exprimés en coordonnées orthogonales. Par conséquent quand on associe la transformation aux coordonnées orthogonales par rapport à la prémière forme fondamentale on obtient:

(16) $$\begin{aligned} x_i &= t_i + \sum_1^n {}_{hj} p_{hj} t_j t_h + [3] \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ x_\beta &= t_\beta - \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{jk} p^\beta_{jk} t_j t_k + \sum_1^n {}_{jh} m^\beta_{hj} t_j t_h + [3] \quad (\beta = n+1, n+2, \ldots, n), \end{aligned}$$

où p^β_{jk} et m^β_{hj} sont les coefficients des formes fondamentales et des torsions en A.

La transformation ponctuelle (16) démontre que dans un point $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de W_n très proche au point A il correspond le point Q de coordonnées:

$$\begin{aligned} x_i &= t_i \ [3] \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ x_\beta &= -\frac{1}{2} \sum_1^n {}_{jk} p^\beta_{jk} t_i t_k + [3] \quad (\beta = n+1, n+2, \ldots, r). \end{aligned}$$

Il en résulte que le point Q est défini seulement par les secondes formes fondamentales de W_n et il coïncide avec P, si la direction AP est asymptotique.

Il s'ensuit que:

si dans un entour quelconque de A sur W_n les transformations ponctuelles associées jusqu' au second ordre ont des points unis $\neq A$, l'Espace de Riemann W_n ne peut pas être serré.

Autrement dit la transformation ponctuelle aurait un extrémant, qui pour $t_\beta = 0$ serait un point isolé en A.

4. Voilà maintenant quelques exemples.

a) Soit une courbe σ de l' S_3 — l'Espace Euclidien de coordonnées: x, y, z, definie par les formules.

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s),$$

où s est l'arc de la courbe. Il existe alors la transformation ponctuelle suivante associée à la courbe:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s) + u\,\alpha_1 + v\,\alpha_2, \\ y &= \psi(s) + u\,\beta_1 + v\,\beta_2, \\ z &= \chi(s) + u\,\gamma_1 + v\,\gamma_2, \end{aligned}$$

où $\bar{n}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont les vecteurs unitaires de la normale principale et de la binormale à la courbe σ par un point $P(s)$. En differentiant on obtient:

$$dx = \alpha\, ds + \alpha_1\, du + \alpha_2\, dv + u d\alpha_1 + v d\alpha_2,$$
$$dy = \beta\, ds + \beta_1\, du + \beta_2\, dv + u d\beta_1 + v d\beta_2,$$
$$dz = \gamma\, ds + \gamma_1\, du + \gamma_2\, dv + u d\gamma_1 + v d\gamma_2,$$

où $t(\alpha, \beta, \gamma)$ est le vecteur unitaire tangente dans P à la courbe σ. En appliquant les formules de Frénet on a:

$$dx = \alpha\left(1 - \frac{u}{R}\right) ds + \alpha_1\left(du + \frac{v}{T}\, ds\right) + \alpha_2\left(dv - \frac{u}{T}\, ds\right),$$

$$dy = \beta\left(1 - \frac{u}{R}\right) ds + \beta_1\left(du + \frac{v}{T}\, ds\right) + \beta_2\left(dv - \frac{u}{T}\, ds\right),$$

$$dz = \gamma\left(1 - \frac{u}{R}\right) ds + \gamma_1\left(du + \frac{v}{T}\, ds\right) + \gamma_2\left(dv - \frac{u}{T}\, ds\right),$$

où R est le rayon de courbure et T le rayon de torsion de σ. Il s'ensuit que la métrique dans S_3 est donnée par la formule:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{u}{R}\right)^2 ds^2 + \left(du + \frac{v}{T}\, ds\right)^2 + \left(dv - \frac{u}{T}\, ds\right)^2.$$

Cette métrique est régulière pour $u < R$ et ce fait arrive seulement dans un entour de σ, qui ne contient pas des centres de courbure.

La forme linéaire Ω_{23} résulte:

$$\Omega_{23} = \alpha\, d\alpha_2 + \beta\, d\beta_2 + \gamma d\gamma_2 = ds/T,$$

c'est-à-dire la formule de la torsion.

b) Un Espace de Riemann W_n plongé dans un Espace Euclidien S_r est toujours sans torsion si les formes $\Omega_{\beta\gamma}$ sont nulles.

On obtient un exemple d'immersion sans torsion, lorsque $r > n+1$, dans le cas du tore ρ_n, défini par le produit direct de n cercles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, ou de n angles $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Supposons ρ_n plongé dans un S_{2n} par l'immersion:

$$x_{2i-1} = \cos \xi_i ; \quad x_{2i} = \sin \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Une transformation ponctuelle associée est la suivante:

$$x_{2i-1} = \cos \xi_i (1 + t_i), \quad x_{2i} = \sin \xi_i (1 + t_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La métrique induite dans l'Espace Euclidien S_{2n} par les coordonnées ξ_i et t résulte:

$$dS^2 = d\xi_1^2 (1 + t_1)^2 + d\xi_2^2 (1 + t_2)^2 + \cdots + d\xi_n^2 (1 + t_n)^2 + dt_1^2 + dt_2^2 + \cdots + dt_n^2,$$

où les torsions sont toutes nulles.

c) Considérons le cylindre classique de l'Espace Euclidien à trois dimensions: x, y, z. On a: $r = 3$, $n = 2$. Il est le produit d'un cercle et d'une droite. Il admet l'immersion:

$$x = \sin \xi (1+t),$$
$$y = -1 + \cos \xi (1+t),$$
$$z = \vartheta,$$

où ξ, ϑ, t sont les coordonnés curvilignes.

La transformation ponctuelle associée par rapport à l'origine: $\xi = \vartheta = t = 0$ est donnée par:

$$x = \xi + \xi t + [3],$$
$$y = t - \xi^2/2 + [3],$$
$$z = \vartheta + [3].$$

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Betti. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. *Annali di Matem.*, **4**, 1872.
2. G. Ricci. Sulla classificazione delle forme differenziali quadratiche. *Rend. Accad. dei Lincei, Serie IV°*, **4**, 1888, 203.
3. H. Poincare. Analysis Situs. *J. Ecole Polytechn.*, **1**, 1895, 1-125.
4. E. Cartan. La géometrie des espaces de Riemann. *Mem. Sci. Math.* (Paris), Fasc. IX, 1926.
5. E. Bianchi. Lezioni digeometria differenziale. Vol. 1, Parte I. Bologna, 1927, 16-22.
6. H. Whitney. Differentiable manifolds. *Ann. Math. II. Ser.*, **37**, 1936, 644-680.
7. H. Whitney. The imbedding of manifolds in families of analytic manifolds. *Ann. Math. II. Ser.*, **37**, 1936, 865-873.
8. M. Villa. Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale tra piani proiettivi. *Rend. Accad. d'Italia*, **1**. 1942, № 8, 718-724; **2**, 1943, № 7, 4-17.
9. L. Degoli. Sulle transformazioni puntuali fra due spazi ordinari. *Boll. Un. Matem. Ital.*, **2**, 1947, 4-12.
10. M. Villa. Le transformazioni puntuali fra due spazi lineari. *Rend. Accad. Naz. dei Lincei*, **4**, 1948, 55-61.
11. M. Villa. Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali. *Compositio Math.*, **12**, 1954, 137.
12. A. Gebarowsky. Totally umbilical surfaces in normal contact Riemannian manifolds. *Demonstratio Mathem.*, **7**, 1974, 353-364.
13. L. S. Nechtajlova. Infinitesimal transformations of h-orthogonal system in Riemannian V_n. *Izv. Vyssh. Uchen. Zaved. Mat. (Kazan)*, **1**, (224), 1981, 72-78.
14. Y. Wang. On some properties of Riemannian spaces of quasi-constant curvature. *Tensor (New. Ser.)*, **35**, 1981, 168-176.
15. L. Degoli. Classification intégrale des transformations ponctuelles entre deux plans. *Serdica*, **13**, 1987, 164-169.

Département de Mathématiques de l'Université de Modena
Via Berengario 82/C
41012 CARPI (Modena)
Italy

Received 19. 6. 1987