Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

РЕКУРРЕНТНО ГЕНЕРИРУЕМЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Л. АТАНАСОВА, Н. КЮРКЧИЕВ, А. АНДРЕЕВ

В этой статье изучаются семейства итерационных функций, генерируемых рекуррентно, для одновременного приближенного вычисления всех корней данного алгебраического уравнения. Оказывается, что можно строить эффективные алгоритмы, обладающие хорошей скоростью сходимости.

Пусть дано алгебраическое уравнение степени n:

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0. \tag{1}$$

Известно, что итерационные процессы высшего порядка могут быть порождены комбинацией процессов меньшего порядка для вычисления корней уравнения (1). Метод „корректировки“ и метод „продолжения решения по параметру“ позволяют существенно повысить скорость сходимости.

Рассмотрения, связанные с построением высокоточного алгоритма на базе алгоритма малой точности, можно найти в монографии Дж. Трауба [1] в случае решения нелинейного уравнения $f(x)=0$.

Предположим, что корни $\{x_i\}_1^n$ уравнения (1) различные. Метод Вейерштрасса—Дочева один из наиболее употребляемых в настоящее время методов одновременного уточнения всех корней уравнения (1). В [2] рассмотрена модификация этого процесса:

$$\begin{gathered} x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{R+1,k}, \\ \Delta_i^{p,k}=-f(x_i^k)/\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k-\Delta_j^{p-1,k}),\ \Delta_i^{0,k}=0, \\ i=1,\,2,\dots,n;\ p=1,\,2,\dots,R+1;\ k=0,\,1,\dots \end{gathered} \tag{2}$$

порядка сходимости $\tau=R+2$. Исследование схем повышенного порядка сходимости $\tau=2R+3$ типа Эрлиха можно найти в [3]:

$$\begin{gathered} x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{R+1,k} \\ \Delta_i^{p,k}=-f(x_i^k)/(f'(x_i^k)-f(x_i^k)\sum_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k-\Delta_j^{p-1,k})^{-1}),\ \Delta_i^{0,k}=0, \\ i=1,\,2,\dots,n;\ p=1,\,2,\dots,\ R+1;\ k=0,\,1,\dots \end{gathered} \tag{3}$$

Эти идеи были использованы для конструирования двухсторонних схем [4] и многошаговых схем [5] повышенного порядка сходимости. В [7, 8] обсуждаются некоторые способы ускорения сходимости порядка $\tau=3R+4$, а в [6] рассматриваются численные методы уточнения всех корней уравнения (1), если их кратности произвольные, но заданные.

СЕРДИКА Българско математическо списание. **Том 14, 1988, с. 271—277.**

Можно продолжить эти исследования. Здесь обсуждаются некоторые идеи для получения методов, генерируемых рекуррентно, для приближенного решения алгебраических уравнений. Это сведет к минимуму изолированное и самоцельное конструирование и исследование итерационных схем повышенной быстротой сходимости, ограничит способы „обобщенного итерирования".

Сейчас рассмотрим один класс методов произвольного порядка сходимости для решения нелинейного уравнения $f(x)=0$. Положим

$$\nabla^{p,k}(x)=\nabla^{p,k}[f;\ x^k]=\begin{vmatrix} \sigma^{1,k}(x) & 1 & & & 0 \\ \sigma^{2,k}(x) & \sigma^{1,k}(x) & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \sigma^{p-1,k}(x) & \cdots\sigma^{2,k}(x) & \sigma^{1,k}(x) & 1 & \\ \sigma^{p,k}(x) & \cdots\sigma^{3,k}(x) & \sigma^{2,k}(x) & \sigma^{1,k}(x) & \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\sigma^{\nu,k}(x)=\sigma^{\nu,k}(x^k)=\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(x^k)/f(x^k). \tag{5}$$

Предположим, что $\nabla^{0,k}(x)=\nabla^{0,k}[f;\ x^k]=1$. Это индуцирует рекуррентную процедуру для $\nabla^{p,k}(x)$:

$$\nabla^{p,k}(x)=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu+1}\sigma^{\nu,k}(x)\nabla^{p-\nu,k}(x). \tag{6}$$

Нетрудно выписать выражение для этой итерации

$$x^{k+1}=x^k-\nabla^{p-1,k}[f;\ x^k]/\nabla^{p,k}[f;\ x^k],\quad k=0,\ 1,\ 2,\dots \tag{7}$$

порядка сходимости $\tau=p+1$. Действительно, для $p=1$ имеем $\nabla^{0,k}/\nabla^{1,k}=f(x^k)/f'(x^k)$ и получаем итерацию Ньютона $x^{k+1}=x^k-f(x^k)/f'(x^k)$, $k=0,1,\dots,$ для $p=2$, $\nabla^{1,k}/\nabla^{2,k}=f'(x^k)f(x^k)/(f'^2(x^k)-\frac{1}{2}f(x^k)f''(x^k))$ — получаем метод с кубической сходимостью (итерация Хэлли), для $p=3$ — итерация четвертого порядка сходимости (метод Киса) и т. д.

Распространим этот результат для уточнения всех корней уравнения (1). Предположим, что $\nabla_j^{p,k}=\nabla_j^{p,k}[f;\ x_j^k]$ и $\sigma_j^{\nu,k}=\sigma_j^{\nu,k}(x_j^k)$. Формулируем правило ускорения сходимости следующим образом:

$$\begin{gathered} x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{R+1,k}, \\ \Delta_i^{s,k}=-f(x_i^k)/\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k+\nabla_j^{s-1,k}/\nabla_j^{s,k}), \\ i=1,\ 2,\dots,n;\ s=1,\ 2,\dots,R+1;\ k=0,\ 1,\ 2,\dots \end{gathered} \tag{8}$$

Можно показать, что процесс (8) имеет порядок сходимости $\tau=R+3$. Прямое доказательство очень сложно. Докажем верность утверждения в следующих частных случаях:

а) Для $R=0$

$$\begin{aligned} x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{1,k};\ \Delta_i^{1,k}&=-f(x_i^k)/\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k+\nabla_j^{0,k}/\nabla_j^{1,k}) \\ &=-f(x_i^k)/\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k+f(x_j^k)/f'(x_j^k)). \end{aligned}$$

Ввиду представления $f'(x)=f(x)\,\Sigma_{i=1}^{n}(1/x-x_i))$ для разности $x_i^{k+1}-x_i$ получаем

$$x_i^{k+1}-x_i=(x_i^k-x_i)\{1-\prod_{j\neq i}^{n}((x_i^k-x_j)/(x_i^k-x_j^k+1/\sum_{i=1}^{n}(1/(x_j^k-x_i))))\}$$

$$=(x_i^k-x_i)\{1-\prod_{j\neq i}^{n}\frac{x_i^k-x_j+(x_i^k-x_j)(x_j^k-x_j)\sum\limits_{i\neq j}^{n}(1/(x_j^k-x_i))}{x_i^k-x_j+(x_i^k-x_j^k)(x_i^k-x_j)\sum\limits_{i\neq j}^{n}(1/(x_j^k-x_i))}\}$$

$$=(x_i^k-x_i)\{1-\prod_{j\neq i}^{n}\{1-\frac{(x_j^k-x_j)^2(x_j-x_i^k)^{-1}\sum\limits_{i\neq j}^{n}(1/(x_j^k-x_i))}{1+(x_i^k-x_j^k)(x_j^k-x_j)(x_i^k-x_j)^{-1}\sum\limits_{i\neq j}^{n}(1/(x_j^k-x_i))}\}.$$

Тогда, если допустим, что $|x_l^k-x_l|\leqq q$; $l=1, 2, \dots, n$; $0<q<1$, то $|x_i^{k+1}-x_i \leqq cq^3$, т. е. последовательность $\{x_i^k\}_1^n$ имеет порядок сходимости $\tau=R+3=3$.

б) Для $R=1$ имеем

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{2,k};\ \Delta_i^{2,k}=-f(x_i^k)/\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k+\nabla_j^{1,k}/\nabla_j^{2,k})$$

$$=-f(x_i^k)/\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k+f'(x_j^k)\,f(x_j^k)/(f'^2(x_j^k)-\frac{1}{2}f(x_j^k)\,f''(x_j^k))).$$

Ввиду представления $\frac{1}{2}f''/f=\frac{1}{2}(f'f)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1/(x-x_i)^2)$ для разности $x_i^{k+}{}_1-x^i$ получаем

$$x_i^{k+1}-x_i=(x_i^k-x_i)\{1-\prod_{j\neq i}^{n}((x_i^k-x_j)/(x_i^k-x_j^k+2(\sum_{s=1}^{n}(1/(x_j^k-x_s)))/((\sum_{s=1}^{n}(1/(x_j^k-x_s)))^2$$

$$+\sum_{s=1}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2}))))\}=(x_i^k-x_i)(1-\prod_{j\neq i}^{n}((2(x_i^k-x_j)+2(x_i^k-x_j)(x_j^k-x_j)\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1}$$

$$+(x_i^k-x_j)(x_j^k-x_j)^2((\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2+\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2}))/(2(x_i^k-x_j)$$

$$+2(x_i^k-x_j^k)(x_j^k-x_j)\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1}+(x_i^k-x_j^k)(x_j^k-x_j)^2((\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2$$

$$+\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2})+2(x_j^k-x_j)^2\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1}))\}=(x_i^k-x_i)\{1-\prod_{j\neq i}^{n}(1$$

$$-\frac{-(x_j^k-x_j)^3((\sum\limits_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2+\sum\limits_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2})}{2(x_i^k-x_j)+2(x_i^k-x_j)(x_j^k-x_j)\sum\limits_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1}+(x_i^k-x_j^k)(x_j^k-x_j)^2\times((\sum\limits_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2+\sum\limits_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2})})\}.$$

Видно, что $|x_i^{k+1}-x_i|\leqq c_1q^4$, т. е. $\{x_i^k\}_1^n$ имеет порядок $\tau=R+3=4$.

Рассмотрим еще один метод, структура которого похожа на структуру описанного выше:

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{R+1,k},$$

(9)
$$\Delta_i^{s,k}=-f(x_i^k)\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k)^{-1}(1-\sum_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k)^{-1}\nabla_j^{s-1,k}/\nabla_j^{s,k})^{-1},$$

$$i=1,\ 2,\dots,n;\ s=1,\ 2,\dots,\ R+1;\ k=0,\ 1,\dots$$

Исследование процесса (9) нами не проводилось.

Рассмотрим еще один класс методов порядка сходимости $\tau=R+3$. Сформулируем правило ускорения сходимости следующим образом:

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{R+1,k}$$

(10)
$$\Delta_i^{s,k}=-(f(x_i^k)/\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k+\nabla_j^{s-1,k}),\ \Delta_i^{0,k}=0,$$

$$i=1,\ 2,\dots,\ n;\ s=1,\ 2,\dots,R+1;\ k=0,\ 1,\ 2,\dots,$$

где

(11)
$$\nabla_j^{s,k}=(f(x_j^k)/f'(x_j^k))\sum_{l=0}^{s}(f(x_j^k)/f'(x_j^k))^l\,Y_{l,j}^k.$$

Коэффициенты $Y_{l,j}^k$ удовлетворяют разностному уравнению

$$Y_{0,j}^k=1,\ Y_{l,j}^k=\frac{1}{l+1}(lD_{2,j}^k\,Y_{l-1,j}^k-(Y_{l-1,j}^k)'),\quad l>0,$$

(12)
$$D_{l,j}^k=D_{l,j}^k(x_j^k)=f^{(l)}(x_j^k)/f'(x_j^k),$$

$$D_{1,j}^k=1,\ D_{i,j}^k=D_{2,j}^k\,D_{l-1,j}^k+(D_{l-1,j}^k)',\quad l>1.$$

Несколько первых $Y_{l,j}^k$ можно вычислить непосредственно из этого уравнения:

$$Y_{1,j}^k=\frac{1}{2}(D_{2,j}^k\,Y_{0,j}^k-(Y_{0,j}^k)')=\frac{1}{2}D_{2,j}^k=\frac{1}{2}f''(x_j^k)/f'(x_j^k),$$

$$Y_{2,j}^k=\frac{1}{3}(2D_{2,j}^k\,Y_{1,j}^k-(Y_{1,j}^k)')=\frac{1}{6}(3(D_{2,j}^k)^2-D_{3,j}^k)=\frac{1}{6}(3(f''/f')^2-f'''/f'),$$

$$Y_{3,j}^k=\frac{1}{24}(15(D_{2,j}^k)^3-10\,D_{2,j}^k\,D_{3,j}^k+D_{4,j}^k)\ \text{и т. д.}$$

Каждая новая формула, привлекающая информацию о значениях производных более высокого порядка, будет аналогом метода Чебышева. Процесс (10) имеет порядок сходимости $\tau=R+3$. Докажем верность утверждения в частном случае $R=1$. Из (10)—(12) получаем

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{2,k},\ \Delta_i^{2,k}=-f(x_i^k)/\prod_{j\neq i}^{n}(x_i^k-x_j^k+\nabla_j^{1,k}),$$

$$\nabla_j^{1,k}=(f(x_j^k)/f'(x_j^k))(Y_{0,j}^k+(f(x_j^k)/f'(x_j^k))\,Y_{1,j}^k)=(1+\frac{1}{2}ff''/f'^2)f/f',$$

тогда для разности $x_i^{k+1}-x_i$ имеем

$$x_i^{k+1}-x_i=(x_i^k-x_i)(1-\prod_{j\neq i}^{n}((x_i^k-x_j)/(x_i^k-x_j^k+\frac{1}{2}(\sum_{s=1}^{n}(1/(x_j^k-x_s)))^{-3}(3(\sum_{s=1}^{n}(1/(x_j^k-x_s)))^2$$

$$-\sum_{s=1}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2}))))=(x_i^k-x_i)(1-\prod_{j\neq i}^{n}((A+B+C+D)/(E+F+G+H+I+Y+K))),$$

где

$$A=E=2(x_i^k-x_j),\ B=6(x_i^k-x_j)(x_j^k-x_j)\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1},$$

$$C=6(x_i^k-x_j)(x_j^k-x_j)^2(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2,\ D=2(x_i^k-x_j)(x_j^k-x_j)^3(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^3,$$

$$F=6(x_i^k-x_j^k)(x_j^k-x_j)\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1},\ G=6(x_i^k-x_j^k)(x_j^k-x_j)^2(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2,$$

$$H=2(x_i^k-x_j^k)(x_j^k-x_j)^3(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^3,\quad I=6(x_j^k-x_j)^2\sum_{s\neq j}^{n}(x_i^k-x_s)^{-1},$$

$$Y=3(x_j^k-x_j)^3(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2,\ K=-(x_j^k-x_j)^3\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2},$$

$$F+I-B=0,\ G+Y-C=-3(x_j^k-x_j)^3(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2,$$

$$H+K-D=-(x_j^k-x_j)^3(2(x_j^k-x_j)(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^3+\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2}).$$

Ввиду представления

$$x_i^{k+1}-x_i=(x_i^k-x_i)(1-\prod_{j\neq i}^{n}(1-(E-A+F+I-B+G+Y-C+H+K-D)(E+F+G$$

$$+H+I+Y+K)))=(x_i^k-x_i)(1-\prod_{i\neq j}^{n}(1+(x_j^k-x_j)^3(2(x_j^k-x_j)(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^3$$

$$+\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-2}+3(\sum_{s\neq j}^{n}(x_j^k-x_s)^{-1})^2)/(E+F+G+H+I+Y+K)))$$

получаем, что последовательность $\{x_i^k\}_1^n$ имеет порядок сходимости $\tau=3+R=4$.

Известно, что если разыскиваемый корень x^* нелинейного уравнения $f(x)=0$ имеет кратность s, то у модифицированного правила Ньютона $x_{n+1}=x_n-sf(x_n)/f'(x_n)$, $n=0, 1, \ldots$, приблизительно такой же закон убывания погрешности для x_n, близких к x^*, как и у основного правила Ньютона.

Интерес представляют итерационные методы для одновременного вычисления всех кратных корней алгебраического уравнения (1) если кратности корней заданы. В (6) предложена процедура порядка сходимости $\tau=2R+3$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются всеми корнями уравнения

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)^{s_j}$$

с кратностями соответственно $s_1, s_2, \ldots, s_m$; $s_j\geq 1$, $j=1, \ldots, m$; $s_1+s_2+\cdots+s_m=n$. Сформулируем правило ускорения сходимости следующим образом:

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta_i^{R+1,k},$$

$$\Delta_i^{s,k}=-s_i\Big(f'(x_i^k)/f(x_i^k)-\sum_{j\neq i}^{m} s_j(x_i^k-x_j^k+\nabla_j^{s-1,k})^{-1}\Big)^{-1}, \tag{13}$$

$$\nabla_j^{s,k}=\sum_{l=1}^{s} \rho_{s,l}(s_j)\,Z_{l,j}, \quad \nabla_j^{0,k}=0, \quad j=1,\ 2,\ldots,$$

где коэффициенты $\rho_{s,l}$ и $Z_{l,j}$ определяются уравнениями

$$pZ_{p,j}-(p-1)\,Z_{p-1,j}+(f(x_j^k)/f'(x_j^k))Z'_{p-1,j}=0\,;\ Z_{1,j}=f(x_j^k)/f'(x_j^k),$$

$$t\rho_{t,l}+(s_j\,l-t)\,\rho_{t-1,l}-s_j\,l\,\rho_{t-1,l-1}=0, \tag{14}$$

$$\rho_{t,0}=1 \text{ для } t\geqq 0\,;\ \rho_{t,l}=0 \text{ для } t<l.$$

Ниже приведены выражения для некоторых из коэффициентов $\rho_{t,l}(s_j)$:

Таблица

$t \backslash l$	1	2	4	4
1	s_j			
2	$\frac{1}{2}s_j(3-s_j)$	s_j^2		
3	$\frac{1}{6}s_j(s_j^2-6s_j+11)$	$s_j^2(2-s_j)$	s_j^3	
4	$-\frac{1}{24}s_j(s_j^3-10s_j^2+35s_j-50)$	$\frac{1}{12}s_j^2(7s_j^2-30s_j+35)$	$\frac{1}{2}s_j^3(5-3s_j$	s_j^4

Нетрудно получить выражения для $\nabla_j^{l,k}$:

$$\nabla_j^{1,k}=\rho_{1,1}Z_{1,j}=s_j f(x_j^k)/f'(x_j^k)\,;\ \nabla_j^{2,k}=\rho_{2,1}\,Z_{1,j}+\rho_{2,2}\,Z_{2,j}=\frac{1}{2}\,s_j(3-s_j)\,f(x_j^k)/f'x_j^k)$$

$$+\frac{1}{2}\,s_j^2 f^2(x_j^k)f''(x_j^k)/f'^3(x_j^k) \text{ и т. д.}$$

В заключение отметим, что цель, которую ставилась, была охватить с единой точки зрения значительный класс применяемых в этой области численного анализа итеративных процессов. В общую схему включаются также и классические методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Трауб. Итерационные методы решения уравнений. М., 1985.
2. Н. Кюркчиев, А. Андреев. Об одной модификации метода Вейерштрасса—Дочева порядка сходимости $R+2$ для одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраического уравнения. *Доклады БАН*, **38**, № 11, 1985, 1461-1463.
3. N. Kjurkchiev, A. Andreev. Ehrlich's methods with raised speed of a convergence. *Serdica*, **13**, 1987, 52-57.

4. A. Andreev, N. Kjurkchiev. Two-sided methods for solving the polynomial equation. *Math. Balkanica, New Series*, 1, 1987, 72—82.

5. Н. Кюркчиев, Р. Иванов. О некоторых многошаговых схемах со сверхлинейной скоростью сходимости. *Год. Соф. унив.*, 78, 1, 1984.

6. Н. Кюркчиев, А. Андреев, В. П. Попов. Итерационные методы для вычисления всех кратных корней алгебраического уравнения. *Год. Соф. унив.*, 78, 1, 1984.

7. Л. Атанасова, Т. Джуканова, Н. Кюркчиев. Методы порядка сходимости $3R+4$ для вычисления корней алгебраического уравнения. *Год. Соф. унив.*, 79, 1, 1985.

8. Н. Кюркчиев, Т. Джуканова, Л. Атанасова. Два метода за решаване на полиномни уравнения с повишена скорост на сходимост. Математика и математическо образование, 1987, 482-486.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 383

Поступила 1. 7. 1987.