# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# СВОБОДНАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ*

АНАТОЛИЙ О. БУДА

В данной работе приводятся полные доказательства утверждений, относящихся к понятию свободной информационной модели и сформулированных в [1]. Техника доказательств может оказаться полезной при автоматическом доказательстве теорем с помощью метода резолюций (см., напр., [2]).

Для определения свободной информационной модели нам необходимо обобщить понятие подстановки, рассматриваемое в [3, 4].

Зафиксируем некоторое натуральное число $n \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Множество переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$ будем обозначать через $X_n$. Рассмотрим некоторое конечное множество $F = F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_m$, где $F_i$ — функциональные символы арности $i$ (множество $F_0$ объединяет все функциональные константы). Функция $d: F \to N$ определяется соотношением: $d(f) = i \Leftrightarrow f \in F_i$.

Множество $T_{n,F}$ есть наименьшее множество $U$, такое что:

(i) $X_n \subseteq U$; $F_0 \subseteq U$;

(ii) если $t_1, \dots, t_k \in U$, $f \in F_k$, $k > 0$, то $f(t_1, \dots, t_k) \in U$.

Множество всех $n$-ок $(T_1, \dots, T_n)$, таких, что $T_1, \dots, T_n \subseteq T_{n,F}$, будем обозначать $\Omega_{n,F}$. Множество всех $n$-ок $(t_1, \dots, t_n)$, таких, что $t_1, \dots, t_n \in T_{n,F}$, будем обозначать $\mathcal{T}_{n,F}$, но отождествлять с подмножеством множества $\Omega_{n,F}$, которое образуют все элементы $\Omega_{n,F}$ вида $(\{t_1\}, \dots, \{t_n\})$. Если $\omega = (T_1, \dots, T_n) \in \Omega_{n,F}$, то запись $pr_i\omega$ будет использоваться для обозначения $i$-ой компоненты $n$-ки $\omega$, а запись $f(T_1, \dots, T_k)$, где $f \in F_k$, $T_1, \dots, T_k \subseteq T_{n,F}$, — для обозначения множества $\{f(t_1, \dots, t_k) \mid t_1 \in T_1, \dots, t_k \in T_k\}$ (если при некотором $i = 1, \dots, k$ $T_i = \emptyset$, то $f(T_1, \dots, T_k) = \emptyset$).

Пусть $t \in T_{n,F}$, $\omega \in \Omega_{n,F}$. Обобщенная подстановка $t[\omega]$ определяется по индукции:

(1) если $t = x_i \in X_n$, то $t[\omega] = pr_i\omega$;
(2) если $t \in F_0$, то $t[\omega] = \{t\}$;
(3) если $t = f(t_1, \dots, t_k)$; $t_1, \dots, t_k \in T_{n,F}$; $f \in F_k$, то $t[\omega] = f(t_1[\omega], \dots, t_k[\omega])$.

Если $T \subseteq T_{n,F}$, $\omega \in \Omega_{n,F}$, то по определению полагаем $T[\omega] = \{t[\omega] \mid t \in T\}$ (если $T = \emptyset$ то $T[\omega] \overset{df}{=} \emptyset$).

Бинарную операцию произведения определим на $\Omega_{n,F}$ следующим соотношением:

$$\omega_1 \circ \omega_2 = (pr_1\omega_2[\omega_1], \dots, pr_n\omega_2[\omega_1]).$$

Элемент $(x_1, \dots, x_n)$ множества $\mathcal{T}_{n,F}$, отождествляемый с элементом $(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$ множества $\Omega_{n,F}$, будем обозначать $e_n$.

Утверждение 1. *Пара $(\Omega_{n,F}, \circ)$ образует полугруппу, единицей которой является $e_n$.*

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству того, что пара $(\mathcal{T}_{n,F}, \circ)$ образует полугруппу с единицей $e_n$ (смотри [3]).

* Исследование осуществлено при финансовом содействии Комитета по науке при Совете Министров НРБ, договор № 56/1987.

Заметим, что на множестве $\mathcal{T}_{n,F}$ определение операции произведения совпадает со старым определением этой операции [3, 4], поэтому $\mathcal{T}_{n,F}$ можно рассматривать как подполугруппу $\Omega_{n,F}$.

Определим операцию пересечения $\omega_1 \cap \omega_2$ для произвольных $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{n,F}$ следующим образом:

$$\omega_1 \cap \omega_2 \overset{df}{=} (pr_1\omega_1 \cap pr_1\omega_2, \ldots, pr_n\omega_1 \cap pr_n\omega_2),$$

где операция пересечения для компонент понимается в обычном теоретико-множественном смысле.

Утверждение 2. *Пара $(\Omega_{n,F}, \cap)$ образует полурешетку, нулем которой является элемент $0 = (\varnothing, \ldots, \varnothing)$, а единицей — элемент $1 = (T_{n,F}, \ldots, T_{n,F})$.*

Доказательство. Соотношения

$$\omega \cap \omega = \omega \text{ (идемпотентность)}$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \omega_2 \cap \omega_1 \text{ (коммутативность)}$$

$$\omega_1 \cap (\omega_2 \cap \omega_3) = (\omega_1 \cap \omega_2) \cap \omega_3 \text{ (ассоциативность)}$$

$$0 \cap \omega = \omega \cap 0 = 0$$

$$1 \cap \omega = \omega \cap 1 = \omega$$

для любых $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega_{n,F}$ являются очевидными следствиями соответствующих соотношений для теоретико-множественного пересечения.

Будем говорить, что $\omega_2$ включает в себя $\omega_1 (\omega_1 \subseteq \omega_2)$, тогда и только тогда, когда $\omega_1 \cap \omega_2 = \omega_1$, и строго включает $(\omega_1 \subsetneq \omega_2)$, если при этом $\omega_1 \neq \omega_2$.

Утверждение 3. *Для произвольных $\tau \in \mathcal{T}^{n,F}$ и $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{n,F}$ выполняется следующее соотношение:*

$$(\omega_1 \cap \omega_2) \circ \tau = (\omega_1 \circ \tau) \cap (\omega_2 \circ \tau).$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$t[\omega_1 \cap \omega_2] = t[\omega_1] \cap t[\omega_2] \tag{1}$$

для произвольных $t \in T_{n,F}$; $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{n,F}$.

Доказательство проведем индукцией по высоте дерева $t$.

Для $t = x$ и $t = f \in F_0$ соотношение (1) очевидно. Пусть оно выполняется для некоторых $t_1, \ldots, t_k \in T_{n,F}$. Докажем, что тогда оно выполняется и для дерева $f(t_1, \ldots, t_k)$, где $f \in F_k$:

$$f(t_1, \ldots, t_k)[\omega_1 \cap \omega_2] = f(t_1[\omega_1 \cap \omega_2], \ldots, t_k[\omega_1 \cap \omega_2]) = f(t_1[\omega_1] \cap t_1[\omega_2], \ldots, t_k[\omega_1] \cap t_k[\omega_2]$$

$$= f(t_1[\omega_1], \ldots, t_k[\omega_1]) \cap f(t_1[\omega_2], \ldots, t_k[\omega_2]) = f(t_1, \ldots, t_k)[\omega_1] \cap f(t_1, \ldots, t_k)[\omega_2].$$

Полурешетка $(L, \wedge)$ называется ограниченной, если для произвольного $y \in L$ длина произвольной последовательности $y_1 = y, y_2, \ldots, y_n$ элементов из $L$, такой что

$$y_{i+1} \subsetneq y_i, \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

ограничена некоторой зависящей от $y$ константой.

Следуя [5], дистрибутивной информационной моделью назовем тройку $(L, \wedge, \Phi)$, где $(L, \wedge)$ — ограниченная полурешетка, которая имеет нулевой элемент, но может не иметь единичный элемент, а $\Phi$ — множество функций вида $\varphi: L \to L$, которое удовлетворяет следующим условиям:

[C1] для каждой $\varphi \in \Phi$ и каждых $y_1, y_2 \in L$ выполнено свойство дистрибутивности: $\varphi(y_1 \wedge y_2) = \varphi(y_1) \wedge \varphi(y_2)$ (таким образом, каждая функция является гомоморфизмом на $L$);

[C2] $\Phi$ содержит тождественную функцию, то есть такую функцию $\varepsilon$, что для каждого $y \in L$, $\varepsilon(y)=y$;

[C3] $\Phi$ замкнуто относительно операции суперпозиции функций, то есть, если $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, то $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \Phi$, где операция суперпозиции определяется соотношением:

$$(\forall y \in L)[\varphi_1 \circ \varphi_2(y)=\varphi_2(\varphi_1(y))].$$

[C4] $L$ является минимальным множеством, содержащим нулевой элемент и замкнутым относительно операции $\wedge$ и функций из $\Phi$.

Пусть фиксированы некоторое множество переменных $X_n$ и конечное множество функциональных символов $F$. Рассмотрим подмножество $L_{n,F}$ множества $\Omega_{n,F}$, которое выделяется следующим условием: $\omega \in L_{n,F} \Leftrightarrow \exists\, \tau \in \mathscr{T}_{n,F}$, что $\omega$ — максимальное решение уравнения

$$\tau \circ X = \tau \tag{2}$$

(то есть $\tau \circ \omega = \tau$, причем для произвольного $\omega'$, такого, что $\tau \circ \omega' = \tau$, $\omega' \subseteq \omega$). Если $\omega$ — максимальное решение (2), то будем говорить, что $\omega$ является характеристикой $\tau$ (писать $\chi(\tau)=\omega$), а $\tau$ является представителем $\omega$).

Справедливы следующие утверждения об элементах множества $L_{n,F}$.

У т в е р ж д е н и е 4. *Пусть* $\tau \in T_{n,F}$, $\chi(\tau)=\omega$. *Тогда для произвольных* $t_1, t_2 \in T_{n,F}$ *выполняется*

$$t_1[\tau]=t_2[\tau] \Leftrightarrow t_1[\omega] \cap t_2[\omega] \neq \emptyset.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t_1[\tau]=t_2[\tau]$. В терминах работы [2] (стр. 81) это означает, что $\tau$ — унификатор для $\{t_1, t_2\}$. Следовательно по [2, теорема 5.2] существует наиболее общий унификатор $\tau^*$ для $\{t_1, t_2\}$, то есть $t_1[\tau^*]=t_2[\tau^*]$, причем $\tau$ можно представить в виде $\tau' \circ \tau^*$, где $\tau'$ — некоторая $n$-ка термов. Анализируя алгоритм унификации [2, стр. 82], можно заметить, что $\tau^*$ отличается тем свойством, что для каждого $i=1, \ldots, n$, $pr_i\tau$ или не содержит $x_i$ или равна $x_i$; если $pr_i\tau$ содержит $x_j$, то $pr_j\tau = x_i$, Это значит, что $\tau^* \circ \tau^* = \tau^*$.

Так как $\tau \circ \tau^* = (\tau' \circ \tau^*) \circ \tau^* = \tau' \circ (\tau^* \circ \tau^*) = \tau' \circ \tau^* = \tau$, то $\tau^* \subseteq \omega$ по определению $\omega$. Следовательно, $t_1[\tau^*] \in t_1[\omega]$, $t_2[\tau^*] \in t_2[\omega]$, то есть $t_1[\omega] \cap t_2[\omega] \neq \emptyset$, так как $t_1[\tau^*]=t_2[\tau^*]$.

Пусть $t_1(\omega] \cap t_2[\omega] \neq \emptyset$. Тогда

$$t_1[\omega] \cap t_2[\omega])[\tau] \neq \emptyset \Rightarrow t_1[\omega][\tau] \cap t_2[\omega][\tau] \neq \emptyset \Rightarrow t_1[\tau \circ \omega] \cap t_2[\tau \circ \omega] \neq \emptyset \Rightarrow t_1[\tau] \cap t_2[\tau] \neq \emptyset,$$

то есть $t_1[\tau]=t_2[\tau]$ как одноэлементные множества.

У т в е р ж д е н и е 5. *Пусть* $\tau \in T_{n,F}$; $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{n,F}$. *Тогда для произвольных* $t_1, t_2 \in T_{n,F}$ *выполняется*

$$t_1[\omega_1 \cap \omega_2] \cap t_2[\omega_1 \cap \omega_2] \neq \emptyset \Leftrightarrow t_1[\omega_1] \cap t_2[\omega_1] e t_1[\omega_2] \cap t_2[\omega_2] \neq \emptyset.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.** По утверждению 3,

$$t_1[\omega_1 \cap \omega_2] \cap t_2[\omega_1 \cap \omega_2] = (t_1[\omega_1] \cap t_1[\omega_2]) \cap (t_2[\omega_1] \cap t_2[\omega_2]) = (t_1[\omega_1] \cap t_2[\omega_1]) \cap (t_1[\omega_2] \cap t_2[\omega_2]).$$

Но так как по условию последнее выражение не пусто, то не являются пустыми и выражения $t_1[\omega_1] \cap t_2[\omega_1]$ и $t_1[\omega_2] \cap t_2[\omega_2]$.

**Достаточность.** Пусть $\omega_1 = \chi(\tau_1)$, $\omega_2 = \chi(\tau_2)$. По утверждению 4, из $t_1[\omega_1] \cap t_2[\omega_1] \neq \emptyset$ и $t_1[\omega_2] \cap t_2[\omega_2] \neq \emptyset$ следует, что $t_1[\tau_1]=t_2[\tau_1]$ и $t_1[\tau_2]=t_2[\tau_2]$, то есть $\tau_1, \tau_2$ — унификаторы для $\{t_1, t_2\}$. Из работы [2] (теорема 5.2) следует существование таких $\tau, \tau_1', \tau_2' \in \mathscr{T}_{n,F}$, что

$$t_1[\tau]=t_2[\tau];$$

$$\tau_1 = \tau_1' \circ \tau; \quad \tau_2 = \tau_2' \circ \tau.$$

Пусть $\omega=\chi(\tau)$. Тогда

$$\tau_1'\circ\tau=\tau_1\Rightarrow(\tau_1'\circ\tau)\circ\omega=\tau_1\circ\omega\Rightarrow\tau_1'\circ(\tau\circ\omega)=\tau_1\circ\omega\Rightarrow\tau_1'\circ\tau=\tau_1\circ\omega\Rightarrow\tau_1\circ\omega=\tau_1,$$

то есть $\omega$ — решение $\tau_1\circ X=\tau_1$, следовательно $\omega\subseteq\omega_1$. Аналогично, $\omega\subseteq\omega_2$. По утверждению 4, из $t_1[\tau]=t_2[\tau]$, следует, что $t_1[\omega]\cap t_2[\omega]\neq\emptyset$. Но по определению обобщенной подстановки, для произвольных $\omega$, $\omega'$ из $\omega\subseteq\omega'$ для произвольного $t\in T_{n,F}$ следует, что $t[\omega]\subseteq t[\omega']$. Следовательно, $t_1[\omega]\subseteq t_1[\omega_1\cap\omega_2]$ и $t_2[\omega]\subseteq t_2[\omega_1\cap\omega_2]$, так как $\omega\subseteq\omega_1\cap\omega_2$. Отсюда $t_1[\omega_1\cap\omega_2]\cap t_2[\omega_1\cap\omega_2]\neq\emptyset$.

Для доказательства следующих утверждений нам необходимо ввести некоторые новые понятия и определения.

Обобщим понятие терма над $X_n$, $F$, введя понятие политерма над $X_n$, $F$, которое определяется по индукции:

(i) пусть $r\subseteq X_n$, $r\neq\emptyset$, тогда $r$ — политерм (атомарный);

(ii) пусть $r=X\cup f$, $X\subseteq X_n$, $f\in F_0$, тогда $r$ — политерм (атомарный);

(iii) пусть $r=X\cup f$; $X\subseteq X_n$; $f\in F_k$; $k>0$; $p_1,\ldots,p_k$ — политермы, тогда $r(p_1,\ldots,p_k)$ — политерм;

(iv) других политермов нет.

Множество всех политермов над $X_n$, $F$ обозначим через $P_{n,F}$. Множество всех термов, отвечающих некоторому политерму $p\in P_{n,F}$ (это множество обозначается $\varphi(p)$), определяется по индукции:

(i) пусть $r$ — атомарный политерм, тогда $\varphi(r)=r$;

(ii) пусть $p=r(p_1,\ldots,p_k)$, $r=X\cup f$, тогда

$$\varphi(p)=X\cup f(\varphi(p_1),\ldots,\varphi(p_k)).$$

Иногда мы будем рассматривать термы и политермы в виде деревьев, распространяя на них естественным образом понятия вершины, корня, листа, веса (вес терма $t$ обозначаем через $|t|$), подтерма и подполитерма.

Система политермов $p_1,\ldots,p_n\in P_{n,F}$ называется полной, если для каждого $i=1,\ldots,n$ справедливо следующее:

(i) $x_i\in\varphi(p_i)$;

(ii) если $p$ — подполитерм $p_i$, корень которого имеет среди пометок некоторую переменную $x_j$, то $\varphi(p)=\varphi(p_j)$.

Пусть $t_1$, $t_2\in T_{n,F}$. Говорим, что $t_1$ продолжение $t_2$ (обозначение: $t_2\sqsubseteq t_1$), если существует такое $\omega\in\Omega_{n,F}$, что $t_1\in t_2[\omega]$.

Непустое конечное множество термов $T\subseteq T_{n,F}$ назовем согласованным, если существует такое $\omega\in\Omega_{n,F}$, что для каждых $t$, $t'\in T$ выполнено: $t[\omega]\cap t'[\omega]\neq\emptyset$.

Замечание. Здесь и далее без ограничения общности будем рассматривать термы и политермы без функциональных констант (это можно всегда сделать, расширив список переменных и трактуя функциональные константы как дополнительные переменные, которые не замещаются никакими термами).

Пусть $p\in P_{n,F}$, тогда через $\max p$ будем обозначать политерм, который получается из $p$ „стиранием" всех переменных, сопоставленных всем нелистовым вершинам $p$. Политерм $\max p$ будем иногда условно обозначать в виде $t(Y_1,\ldots,Y_k)$, где $Y_i$ — переменные, соответствующие некоторому листу $\max p$.

Если $t_1$, $t_2\in\varphi(\max p)$, то их можно представить в виде

$$t_1=t(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}),\quad t_2=t(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}).$$

Будем говорить, что $t_1$, $t_2$ отличаются $m$ рассогласованиями, если среди пар $(x_{i_1},x_{j_1})$, $\ldots$, $(x_{i_k},x_{j_k})$ есть ровно $m$ пар, каждая из которых состоит из различных компонент.

При представлении политермов и термов в виде деревьев удобно помечать их дуги числами следующим образом: если из некоторой нелистовой вершины дерева выходят $k$ стрелок, то они помечаются слева направо числами от 1 до $k$. Координатой некоторой вершины дерева будем называть слово, образуемое из пометок дуг пути из корня дерева к данной вершине. Пусть $p \in P_{n,F}$. Будем говорить, что терм $t \in \varphi(p)$ содержит вершину $r$ политерма $p$, если его дерево содержит вершину, координата которой совпадает с координатой вершины $r$ в дереве политерма $p$. Будем говорить, что терм $t \in \varphi(p)$ подтверждает вершину $r$ политерма $p$ с листом $x$, если $t$ содержит $r$, причем вершина, отвечающая $r$ в дереве терма $t$, является листом в $t$, помеченным переменной $x$.

Понятие подстановки и обозначение $t[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ можно найти, например, в работах [3, 4].

Утверждение 6. *Пусть $\omega \in \Omega_{n,F}$ и для него при $i=1, \ldots, n$ выполняются следующие условия:*

1) $\forall t \in T_{n,F}(t \in pr_i\omega \Rightarrow t[\omega] \subseteq pr_i\omega)$;
2) $\forall t \in T_{n,F}(t[\omega] \cap pr_i\omega \neq \varnothing \Rightarrow t \in pr_i\omega)$;
3) $pr_i\omega$ *— непустое конечное множество;*
4) $\forall t,\ t' \in pr_i\omega\ (t[\omega] \cap t'[\omega] \neq \varnothing)$;
5) $\forall t,\ t' \in pr_i\omega\ (t \subseteq t' \Rightarrow t' \in t[\omega])$.

*Тогда существует полная система политермов $p_1, \ldots, p_n \in P_{n,F}$, такая, что $\omega = (\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n))$.*

Доказательство. **Часть 1.** Прежде всего отметим почти очевидное свойство согласованного множества термов $T \subseteq T_{n,F}$: существует политерм $p \in P_{n,F}$, такой, что $T \subseteq \varphi(p)$, причем политерм минимального веса с таким свойством единственен (для построения политерма $p$ достаточно „наложить" все термы из $T$ „друг на друга"). Теперь по $\omega$ построим систему политермов $p_1, \ldots, p_n$, где для каждого $i=1, \ldots, n$ $p_i$ — политерм минимального веса для $pr_i\omega$, такой, что

$$pr_i\omega \subseteq \varphi(p_i). \tag{3}$$

Такое построение возможно, так как, ввиду условий (3, 4), из формулировки утверждения 6 $pr_i\omega$ — согласованное множество.

Докажем теперь, что справедливо и обратное включение

$$\forall i=1, \ldots, n, \quad \varphi(p_i) \subseteq pr_i\omega. \tag{4}$$

Прежде чем доказывать (4), установим два факта о термах из $\varphi(p_i)$.

Факт 1. *Пусть $t \in \varphi(p_i) \setminus \varphi(\max p_i)$. Тогда существует $t' \in \varphi(p_i)$, такой, что $|t'| > |t|$, $t' \in t[\omega]$.*

Действительно, так как $t \bar{\in} \max p_i$, то существует по крайней мере одна нелистовая вершина $r$ политерма $p$, что $t$ подтверждает $r$ с некоторым листом $x_j$. Пусть $t_j \in pr_i\omega$ — некоторый терм, подтверждающий $r$ с листом $x_j$. Подполитерм $p$ политерма $p_i$ с корнем $r$ содержит хотя бы одну отличную от $r$ вершину $r'$, такую, что некоторое $x_k \in r'$. Пусть $t_k \in pr_i\omega$ подтверждает $r'$ с листом $x_k$. По условию 4) $t_k[\omega] \cap t_j[\omega] \neq \varnothing$. Это значит, что существует $t'' \in \varphi(p)$, что $t'' \in pr_j\omega$ (иначе для $t_j$ не выполняется условие 1): $t_j \in pr_i\omega \Rightarrow t_j[\omega] \subseteq pr_i\omega \subseteq \varphi(p_i)$) и $t''$ содержит $r'$. За $t'$ возьмем терм $t[x_1/x_1, \ldots, x_{j-1}/x_{j-1}, t''/x_j, x_{j+1}/x_{j+1}, \ldots, x_n/x_n]$. Ясно, что $t' \in t[\omega]$, $|t'| > |t|$.

Факт 2. *Пусть $t_1, t_2 \in \varphi(\max p_i) = t(Y_1, \ldots, Y_k)$, причем*

$$t_1 = t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), \quad t_2 = t(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$$

*и для некоторого $l \in [1, k] x_{i_l} \neq x_{j_l}$. Тогда для $t_1' \in \varphi(\max p_i)$, имеющего вид*

$$t'_1 = t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l-1}}, x_{j_l}, x_{i_{l+1}}, \ldots, x_{i_k}),$$

*выполняется* $t'_1 \in t_1[\omega]$.

Действительно, пусть $x_{i_k} = x_s$, $x_{j_k} = x_m$. Так как $t_1$, $t_2 \in \varphi(\max p_i)$, то $x_s$, $x_m \in r$ — некоторому листу $p_i$. Пусть $t_s$, $t_m$ принадлежат $pr_i\omega$ и подтверждают $r$ с листами $x_s$, $x_m$ соответственно. По условию 4), $t_s[\omega] \cap t_m[\omega] \neq \emptyset$. Отсюда $pr_s\omega \cap pr_m \neq \emptyset$. Так как $pr_m\omega = x_m[\omega]$, то по условию 2) $x_m \in pr_s\omega$. Тогда

$$T = t_1[x_1/x_1, \ldots, x_{s-1}, /x_{s-1}, \{x_m, x_s\}/x_s, x_{s+1}/x_{s+1}, \ldots, x_n/x_n]$$

содержится в $t_1[\omega]$, а $t'_1 \in T$, то есть $t'_1 \in t_1[\omega]$.

Вернемся теперь к доказательству включения (4). Для этого покажем сначала

$$pr_i\omega \cap \varphi(\max p_i) \neq \emptyset.$$

Так как $pr_i\omega$ по условию 3) является конечным непустым множеством, то из (3) следует, что существует по крайней мере одно $t_0 \in pr_i\omega \cap \varphi(p_i)$. Если $t_0 \in \varphi(\max p_i)$, то (5) доказано. Иначе, используя факт 1 и конечность $\varphi(p_i)$, можно построить конечную последовательность термов $t_1, \ldots, t_k$, такую, что для $j = 1, \ldots, k$

$$|t_j| > |t_{j-1}|, \quad t_j \in t_{j-1}[\omega],$$

$$t_{j-1} \bar{\in} \varphi(\max p_i), \quad t_k \in \varphi(\max p_i).$$

Используя условие 1), легко показывается, что для $j = 1, \ldots, k$, $t_j \in pr_i\omega$ ($t_1 \in pr_i\omega$, так как $t_0 \in pr_i\omega$ и $t_1 \in t_0[\omega]$, и т. д.). Таким образом, (5) доказано.

Из факта 2 теперь следует, что

(6) $$\varphi(\max p_i) \subseteq pr_i\omega.$$

Действительно, пусть $t \in \varphi(\max p_i)$ и отличается от построенного только что $t_k \in \varphi(\max p_i) \cap pr_i\omega$, $l$ рассогласованиями переменных ($0 \leq l \leq n$). Тогда, используя последовательно факт 2, мы можем построить последовательность термов $t_{k+1}, \ldots, t_{k+l}$, такую, что $t_{k+l} = t$, а $t_{k+j}$ ($j = 1, \ldots, l$) имеет с $t$ ровно $l - j$ рассогласований переменных. Из условия 1), так как, согласно факту 2 $t_{k+j} \in t_{k+j-1}[\omega]$, опять следует, что $t \in pr_i\omega$. (6) доказано.

Вернемся теперь к доказательству включения (4). Предположим противное, что существует $t_0$, что

$$t_0 \in \varphi(p_i) \setminus pr_i\omega.$$

Из (6) следует, что $t_0 \bar{\in} \varphi(\max p_i)$. Тогда, согласно факту 1, существует терм $t_1$, такой, что $|t_1| > |t_0|$ и $t_1 \in t_0[\omega]$. Терм $t_1$ не может принадлежать $pr_i\omega$, так как тогда $t_0[\omega] \cap pr_i\omega \neq \emptyset$ и из условия 2 $t_0 \in pr_i\omega$, что противоречит предположению.

Продолжая рассуждения для $t_1$ как при доказательстве (5), мы через конечное число шагов непременно получим некоторый терм $t_m \in \varphi(\max p_i)$, но $t_m \bar{\in} pr_i\omega$. Полученное противоречие с (6) показывает, что $\varphi(p) \subseteq pr_i\omega$.

То есть мы показали, что для всех $i = 1, \ldots, n$.

(7) $$pr_i\omega = \varphi(p_i).$$

На этом часть 1 доказательства утверждения 6 заканчивается. Заметим, что для доказательства (7) мы ни разу не использовали условие 5) из формулировки утверждения 6.

**Часть 2.** Теперь покажем, что система таким образом построенных политермов полная.

Докажем сначала, что для всех $i=1, \ldots, n$, $x_i \in \varphi(p_i)$. Так как по условию 3) $pr_i\omega \neq \emptyset$, а $x_i[\omega]=pr_i\omega$, то $x_i[\omega] \cap pr_i\omega \neq \emptyset$. Отсюда по условию 2) $x_i \in pr_i\omega=\varphi(p_i)$.

Докажем теперь свойство (ii) из определения полной системы политермов.

Зафиксируем некоторое $i \in [1, n]$. Пусть $p$ — некоторый подполитерм $p_i$, корень которого $r$ имеет среди пометок $x_j$. Пусть $t_j \in \varphi(p_i)$ подтверждает $r$ с листом $x_j$. Из (7) $t_j \in pr_i\omega$. По определению подстановки $t_j[\omega]=t_j[pr_1\omega/x_1, \ldots, pr_j\omega/x_j, \ldots, pr_n\omega/x_n]$. По условию 1) $t_j[\omega] \subseteq pr_i\omega$. Но если бы существовал терм $t \in pr_j\omega \setminus \varphi(p)$, то по определению подстановки множество $t_j[\omega]$ содержало бы терм

$$t'=t_j[x_1/x_1, \ldots, x_{j-1}/x_{j-1}, t/x_j, x_{j+1}/x_{j+1}, \ldots, x_n/x_n],$$

что противоречит условию 1). Следовательно, мы показали

$$pr_j\omega \subseteq \varphi(p). \tag{8}$$

Покажем теперь обратное включение

$$\varphi(p) \subseteq pr_j\omega. \tag{9}$$

Пусть существует терм $t \in \varphi(p) \setminus pr_j\omega$. Но тогда терм

$$t_j'=t_j[x_1/x_1, \ldots, x_{j-1}/x_{j-1}, t/x_j, x_{j+1}/x_{j+1}, \ldots, x_n/x_n]$$

не содержался бы в $t_j[\omega]$, что противоречит условию 5), так как $t_j'$ — продолжение $t_j$ по построению. (8) и (9) вместе доказывают свойство (ii) из определения полной системы политермов. Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. *$\omega \in L_{n,F}$ тогда и только тогда, когда для $\omega$ выполняются все пять условий из утверждения 6.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $\omega \in L_{n,F}$. Покажем, что выполняется условия из утверждения 6.

1) Докажем сначала, что

$$\omega \circ \omega=\omega. \tag{10}$$

Действительно, так как $\omega$ — решение уравнения $\tau \circ X=\tau$, то $\tau \circ \omega=\tau \Rightarrow (\tau \circ \omega) \circ \omega =\tau \circ \omega=\tau$, то есть $\tau \circ (\omega \circ \omega)=\tau$ и $\omega \circ \omega$ — решение $\tau \circ X=\tau$. Очевидно, что $\omega \circ \omega \supseteq \omega$, так как $\omega$ содержит единицу $e_n$. Но $\omega$ — максимальное решение, следовательно выполнено (10). Отсюда по определению операции „$\circ$“ имеем:

$$\forall i=1, \ldots, n, \quad pr_i[\omega]=pr_i\omega.$$

Пусть $t \in pr_i\omega$, тогда $t[\omega] \subseteq pr_i\omega[\omega]=pr_i\omega$.

2) Пусть $t[\omega] \cap pr_i\omega \neq \emptyset$. Так как $pr_i\omega=x_i[\omega]$, то $t[\omega] \cap x_i[\omega] \neq \emptyset$ и из утверждения 4 для любого $\tau$ — представителя $\omega$ имеем $t[\tau]=x_i[\tau]=pr_i\tau$. Но по определению $\omega$

$$pr_i\omega=\{t \mid t[\tau]=pr_i\tau\}, \quad \text{то есть } t \in pr_i\omega.$$

3) Очевидно, что $pr_i\omega$ — конечно (из определения $pr_i\omega$ и конечности множества переменных $X_n$). $pr_i\omega \neq \emptyset$, так как всегда $x_i \in pr_i\omega$.

4) Пусть $t, t' \in pr_i\omega$. Тогда по определению $pr_i\omega$ для любого $\tau$ — представителя $\omega$ справедливо $t[\tau]=t'[\tau]$. Отсюда, по утверждению 4, $t[\omega] \cap t'[\omega] \neq \emptyset$.

5) Пусть существуют $t, t' \in pr_i\omega$, что $t \subseteq t'$, но $t' \notin t[\omega]$.

Условия 1)—4) для $\omega \in L_{n,F}$ выполняются по только что доказанному. Поэтому из первой части доказательства утверждения 6 (в ней не используется условие 5) следует, что множество $pr_i\omega$ можно представить как $\varphi(p)$ для некоторого политерма $p$. Поэтому, так как $t \subseteq t'$, но $t' \notin t[\omega]$, то обязательно существуют такие $x_j$ и $t^* \neq x_j$, что

$$t^* \overline{\in} pr_j\omega, \text{ а } t'' = t[x_1/x_1, \ldots, x_{j-1}/x_{j-1}, t^*/x_j, x_{j+1}/x_{j+1}, \ldots, x_n/x_n]$$

принадлежит $pr_i\omega$, причем $t \subseteq t''$, но $t'' \overline{\in} t[\omega]$. Обозначим $(x_1, \ldots, x_{j-1}, t^*, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ через $\lambda$. Из определения $\omega$ имеем:

$$t[\tau] = pr_i\tau, \quad t''[\tau] = pr_i\tau.$$

Но $t'' = t[\lambda]$. Поэтому $t[\tau] = t[\lambda][\tau]$. Отсюда $t^*[\tau] = pr_j\tau$. То есть $\omega' = (pr_1\omega, \ldots, pr_{j-1}\omega\ pr_j\omega \cup \{t^*\}, pr_{j+1}\omega, \ldots, pr_n\omega)$ есть решение уравнения $\tau \circ X = \tau$, причем $\omega' \supseteq \omega$. Противоречие с максимальностью $\omega$.

**Достаточность**. По утверждению 6, если для $\omega$ выполняются условия 1)—5), то $\omega$ представимо в виде

(11) $$\omega = (\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)),$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — полная система политермов. Из определения полной системы политермов и определения $\max p$ следуют соотношения: $\forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t \in \varphi(p_i)$

(12) $$t[\varphi(\max p_1)/x_1, \ldots, \varphi(\max p_n/x_n] = \varphi(\max p_i).$$

Пусть $p$ — некоторый политерм и $\max p = t(Y_1, \ldots, Y_k)$. Обозначим через $t_p$ терм вида $t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, где $\forall j = 1, \ldots, k\ x_{i_j}$ — переменная с минимальным номером из $Y_j$. Обозначим через $\tau_\omega$ элемент $(t_{p_1}, \ldots, t_{p_n})$, где $p_1, \ldots, p_n$ — полная система политермов, удовлетворяющая (11). Из определения $t_p$ и из (12) имеем:

$$\forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t \in pr_i\omega, \quad t[t_{p_1}/x_1, \ldots, t_{p_n}/x_n] = t_{p_i},$$

то есть $t[\tau_\omega] = pr_i\tau_\omega$ и $\omega$ — решение уравнения

(13) $$\tau_\omega \circ X = \tau_\omega.$$

Покажем, что $\omega$ — максимальное решение (13). Пусть $t$ — произвольный терм, для которого при некотором $i \in [1, n]$ $t[\tau_\omega] = pr_i\tau_\omega$. Так как для каждого $j = 1, \ldots, n$ $t_{p_j} \subseteq pr_j\omega$ (то есть $\tau_\omega \subseteq \omega$), то $t[\omega] \cap pr_i\omega \neq \varnothing$. Теперь из условия 2) утверждения 6 следует, что $t \in pr_i\omega$. Таким образом, $\omega \in L_{n,F}$, если для него выполняются условия 1)—5). Утверждение 7 доказано.

Множество функций $\Phi_{n,F}$ определяется с помощью элементов из $\mathscr{T}_{n,F}$, а именно, каждому $\tau \in \mathscr{T}_{n,F}$ отвечает некоторый элемент $\varphi \in \Phi_{n,F}$ — функция из $L_{n,F}$ в $L_{n,F}$. Когда такое соответствие известно, будем писать $\varphi = \langle\tau\rangle$.

Пусть $\tau \in \mathscr{T}_{n,F}$ $\omega \in L_{n,F}$. Тогда по определению положим, что $\langle\tau\rangle(\omega)$ есть максимальное решение уравнения

$$\tau' \circ \tau \circ X = \tau' \circ \tau,$$

где $\tau'$ — произвольный представитель $\omega$, то есть $\chi(\tau') = \omega$.

Утверждение 8. *Для произвольного $\tau \in \mathscr{T}_{n,F}$ $\langle\tau\rangle$ — есть однозначная функция из $L_{n,F}$ в $L_{n,F}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если для некоторых $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{T}_{n,F}$ $\chi(\tau_1) = \chi(\tau_2) = \omega$, то максимальные решения уравнений

(14) $$\tau_1 \circ \tau \circ X = \tau_1 \circ \tau$$

(15) $$\tau_2 \circ \tau \circ X = \tau_2 \circ \tau$$

равны.

Пусть $\omega_1$ — максимальное решение уравнения (14), а $\omega_2$ — (15).

$$t \in pr_i\omega_1 \Leftrightarrow (t[\tau])[\tau_1] = pr_i\tau[\tau_1] \Leftrightarrow (t[\tau])[\omega] \cap pr_i\tau[\omega] \neq \varnothing,$$

$$t \in pr_i\omega_2 \Leftrightarrow (t[\tau])[\tau_2] = pr_i\tau[\tau_2] \Leftrightarrow (t[\tau])[\omega] \cap pr_i\tau[\omega] \neq \varnothing,$$

то есть $t \in pr_i\omega_1 \Leftrightarrow t \in pr_i\omega_2$, то есть $\omega_1 = \omega_2$.

Замечание. По индукции доказывается следующее обобщение утверждения 8: Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_k, \tau_1', \ldots, \tau_k' \in \mathcal{T}_{n,F}$, причем $\chi(\tau_i) = \chi(\tau_i')$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Тогда уравнения

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k \circ X = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$$

$$\tau_1' \circ \tau_2' \circ \cdots \circ \tau_k' \circ X = \tau_1' \circ \tau_2' \circ \cdots \circ \tau_k'$$

имеют равные максимальные решения.

Теорема 1. *Тройка* $(L_{n,F}, \cap, \Phi_{n,F})$ — *дистрибутивная информационная модель.*

Доказательство. Покажем сначала замкнутость множества $L_{n,F}$ относительно операции пересечения. То есть покажем, что если $\omega_1, \omega_2 \in L_{n,F}$, то $\omega_1 \cap \omega_2 \in L_{n,F}$. Для этого достаточно показать, что для $\omega_1 \cap \omega_2$ выполняются условия 1) –5) из утверждения 6. Зафиксируем некоторое $i \in [1, n]$.

1) Пусть $t \in T_{n,F}$ такой, что $t \in pr_i(\omega_1 \cap \omega_2) = pr_i\omega_1 \cap pr_i\omega_2$. В силу утверждения 7, так как $\omega_1, \omega_2 \in L_{n,F}$, $t \in pr_i\omega_1$ и $t \in pr_i\omega_2$, выполнено $t[\omega_1] \subseteq pr_i\omega_1$, $t[\omega_2] \subseteq pr_i\omega_2$, поэтому $t[\omega_1] \cap t[\omega_2] \subseteq pr_i(\omega_1 \cap \omega_2)$. Но по утверждению 3 $t[\omega_1] \cap t[\omega_2] = t[\omega_1 \cap \omega_2]$.

2) Пусть $t \in T_{n,F}$ такой, что $t[\omega_1 \cap \omega_2] \cap pr_i(\omega_1 \cap \omega_2) \neq \varnothing$. Из утверждения 5, так как $pr_i(\omega_1 \cap \omega_2) = x_i[\omega_1 \cap \omega_2[$, следует

$$t[\omega_1] \cap pr_i\omega_1 \neq \varnothing, \quad t[\omega_2] \cap pr_i\omega_2 \neq \varnothing.$$

Так как $\omega_1, \omega_2 \in L_{n,F}$, то по утверждению 7 для них выполнено условие 2) из утверждения 6. Поэтому $t \in pr_i\omega_1 \,\&\, t \in pr_i\omega_2$, то есть $t \in pr_i(\omega_1 \cap \omega_2)$.

3) Очевидно, так как $pr_i\omega_1 pr_i\omega_2$ конечны, а $e_n \in pr_i\omega_1 \cap pr_i\omega_2$.

4) Пусть $t, t' \in pr_i(\omega_1 \cap \omega_2)$. Тогда, так как $\omega_1, \omega_2 \in L_{n,F}$, то по утверждению 7 для них выполнено условие 4) утверждения 6. Поэтому $t[\omega_1] \cap t'[\omega_1] \neq \varnothing \& t[\omega_2] \cap t'[\omega_2] \neq \varnothing$. Неравенство $t[\omega_1 \cap \omega_2] \cap t'[\omega_1 \cap \omega_2] \neq \varnothing$ теперь следует из утверждения 5.

5) Пусть $t, t' \in pr_i(\omega_1 \cap \omega_2)$ и $t \subseteq t'$. Тогда, так как $\omega_1, \omega_2 \in L_{n,F}$, то по утверждению 7 для них выполнено условие 5) утверждения 6. То есть $t' \in t[\omega_1] \,\&\, t' \in t[\omega_2[$ или $t' \in t[\omega_1 \cap \omega_2]$, т. к. по утверждению 3 $t[\omega_1 \cap \omega_2] = t[\omega_1] \cap t[\omega_2]$.

На $L_{n,F}$ для операции пересечения выполняются законы идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, которые являются очевидными следствиями соответствующих законов для теоретико-множественного пересечения. Нулем 10 полурешетки $(L_{n,F}, \cap)$ является элемент $e_n = (x_1, \ldots, x_n)$. Ограниченность $(L_{n,F}, \cap)$ следует из конечности $pr_i\omega$ для всех $\omega \in L_{n,F}$, $i = 1, \ldots, n$.

Докажем теперь выполнимость условий [C1]—[C4] для функций из $\Phi_{n,F}$.

[C1] $\varphi(\omega_1 \cap \omega_2) = \varphi(\omega_1) \cap \varphi(\omega_2)$.

Пусть $\varphi = \langle \tau \rangle$, а $\tau_1, \tau_2$ — представители $\omega_1, \omega_2$; $\tau_{12}$ — представитель $\omega_1 \cap \omega_2$. Тогда $\varphi(\omega_1 \cap \omega_2) = \omega$ — максимальное решение уравнения

$$\tau_{12} \circ \tau \circ X = \tau_{12} \circ \tau.$$

Пусть $\omega_1'$ — максимальное решение $\tau_1 \circ \tau \circ X = \tau_1 \circ \tau$,

$\omega_2'$ — максимальное решение $\tau_2 \circ \tau \circ X = \tau_2 \circ \tau$.

Для доказательства [C1] достаточно показать, что $\omega = \omega_1' \cap \omega_2'$.

$$t \in pr_i\omega \Leftrightarrow t[\tau]\,[\tau_{12}] = pr_i\tau[\tau_{12}] \Leftrightarrow \qquad \text{(утв. 4)}$$

$$\Leftrightarrow t[\tau]\,[\omega_1 \cap \omega_2] \cap pr_i\tau[\omega_1 \cap \omega_2] \neq \varnothing \Leftrightarrow \qquad \text{(утв. 5)}$$

$$\Leftrightarrow t[\tau]\,[\omega_1] \cap pr_i\tau[\omega_1] \neq \varnothing \;\&\; t[\tau]\,[\omega_2] \cap pr_i\tau[\omega_2] \neq \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t \in pr_i\omega_1' \;\&\; t \in pr_i\omega_2'.$$

[C2] Единичной функцией является $\langle e_n \rangle$. По определению $\Phi_{n,F}$ $\langle e_n \rangle(\omega) = \omega$ для любого $\omega \in L_{n,F}$.

[C3] Суперпозицией функций $\langle \tau_1 \rangle$ и $\langle \tau_2 \rangle$ является функция $\langle \tau_1 \circ \tau_2 \rangle$.

Действительно, пусть $\langle \tau_1 \rangle(\omega) = \omega'$, а $\tau$ — представитель $\omega$, $\tau'$ — представитель $\omega'$; тогда $\langle \tau_2 \rangle(\langle \tau_1 \rangle(\omega))$ является максимальным решением уравнения

$$\tau' \circ \tau_2 \circ X = \tau' \circ \tau_2,$$

а $\langle \tau_1 \circ \tau_2 \rangle(\omega)$ — максимальное решение уравнения

$$\tau \circ (\tau_1 \circ \tau_2) \circ X = \tau \circ (\tau_1 \circ \tau_2) \Leftrightarrow$$
$$(\tau \circ \tau_1) \circ \tau_2 \circ X = (\tau \circ \tau_1) \circ \tau_2.$$

Но $\chi(\tau \circ \chi_1) = \chi(\tau')$, так как $\tau \circ \tau_1 \circ X = \tau \circ \tau_1$ — уравнение для определения как для $\chi(\tau \circ \tau_1)$, так и для $\omega'$.

[C4] Очевидно, что если $\omega \in L_{n,F}$, то $\omega$ можно получить из $e_n = 0$ только с помощью одной операции из $\Phi_{n,F}$. Действительно, если $\tau$ — представитель $\omega$, то $\langle \tau \rangle(0) = \omega$. Этим доказательство теоремы 1 завершается.

Свободной информационной моделью мы называем именно тройку $(L_{n,F}, \cap, \Phi_{n,F})$ при фиксированных $X_{n,F}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А. Буда, В. К. Сабельфельд. Анализ потока данных и эквивалентность программных машин Сб. „Математическая теория и практика систем программного обеспечения", ВЦ СО АН СССР Новосибирск, 1982.
2. Ч. Чень, Р. Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. Москва, 1983.
3. А. О. Буда. Абстрактные машины программ, препринт № 108, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1978,
4. А. О. Буда. Об одной модели вычислений над паметью с разрешимой проблемой эквивалентности. *ДАН СССР*, 245, 1979, № 1, 40—42.
5. J. B. Kam, J. D. Ullman. Monotone data flow analysis frameworks. *Acta Informatica*, 7, 1977, No 3, 305-318.


*Институт математики*
*София 1090 П. Я. 373*

*Поступила 20. 04. 1988*