

Provided for non-commercial research and educational use.  
Not for reproduction, distribution or commercial use.

# Serdica

## Bulgariacae mathematicae publicationes

---

# Сердика

## Българско математическо списание

---

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.  
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on  
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes  
and its new series Serdica Mathematical Journal  
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>  
or contact: Editorial Office  
Serdica Mathematical Journal  
Institute of Mathematics and Informatics  
Bulgarian Academy of Sciences  
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49  
e-mail: [serdica@math.bas.bg](mailto:serdica@math.bas.bg)

## О РЕАЛИЗАЦИИ И СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

Л. Г. ВОЛКОВ

В работе на примере метода Ньютона излагается подход для исследования сходимости итерационных процессов при реализации неявных разностных схем уравнений нелинейной упругости.

1. Широкое использование вычислительного эксперимента для решения нелинейных задач физики и механики стимулирует постоянный интерес к вопросам о корректности, сходимости и устойчивости нелинейных разностных схем. Последние представляют собой нелинейные системы алгебраических уравнений, размерность которых пропорциональна числу шагов пространственной сетки. Для решения этих систем приходится использовать итерационные методы [1]. В последнее время был предложен ряд подходов для исследования сходимости итерационных процессов при решении уравнений математической физики и механики [2]—[6]. В настоящей работе на примере метода Ньютона показано как работает подход, предложенный в [5], применительно к уравнениям нелинейной упругости.

Идея метода работы [5] состоит в следующем. Обозначим через  $U$  точное решение дифференциальной задачи,  $Y$  — решение разностной схемы, полученное на  $k$ -ом шаге по некоторому итерационному методу,  $h, \tau$  — шаги равномерной сетки  $\omega_{h\tau}$ . Будет ли  $Y \xrightarrow{k} U$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $h, \tau \rightarrow 0$ ? Этот факт для разностных схем первого порядка устанавливается на основании оценки вида

$$\|z\|^k \leq M(h^\alpha + \tau), \quad k \rightarrow \infty,$$

где  $z = U - Y$ ,  $M$  — постоянная, не зависящая от  $h, \tau$ ,  $\alpha = 1, 2$  и  $\|\cdot\|$  — подходящая сеточная норма.

2. Исследование сходимости метода Ньютона будем проводить на примере системы уравнений нелинейной несжимаемой упругости в лагранжевых переменных, [7]

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial P(p, q)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial Q(p, q)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ P &= \frac{\partial W(p, q)}{\partial p}, & Q &= \frac{\partial W(p, q)}{\partial q}. \end{aligned}$$

Здесь  $t$  — время;  $x$  — лагранжевая переменная;  $u, v$  — скорости;  $p, q$  — деформации;  $P, Q$  — напряжения;  $W$  — деформационный потенциал (внутренняя энергия). Систему уравнений (1) будем рассматривать в прямоугольнике  $\pi = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$ ,

на границах которого  $x=0$  и  $x=X$  заданы некоторые краевые условия для неизвестных функций. Пусть в начальный момент задано исходное состояние среды

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x).$$

При  $x=0$  и  $x=X$  заданы скорости

$$(3) \quad u(0, t) = \varphi_0(t), \quad v(0, t) = \psi_0(t), \quad u(x, t) = \varphi_1(t), \quad v(x, t) = \psi_1(t).$$

От уравнения состояния  $W = W(p, q)$  требуем, чтобы на точном решении функция  $W$  имела бы непрерывные частные производные до третьего порядка и

$$(4) \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} \geq \text{const} > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} \geq \text{const} > 0.$$

Заменим область непрерывного изменения независимых переменных сеточной  $\bar{\omega}_{ht} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ ,

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad x_0 = 0, \quad x_N = X, \quad hN = X\}.$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_{j+1} = t_j + \tau, \quad i = 0, 1, \dots, J-1, \quad t_0 = 0, \quad \tau J = T\}.$$

На сетке  $\bar{\omega}_{ht}$  для аппроксимации дифференциальной задачи используем известные классы консервативных разностных схем [6], [8]

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha_i - P_x^{(\sigma_1)}(\gamma, \delta) &= 0, & \beta_i - Q_x^{(\sigma_2)}(\gamma, \delta) &= 0, \\ \gamma_i - \alpha_x^{(\sigma_3)} &= 0, & \delta_i - \beta_x^{(\sigma_4)} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — сеточные функции аппроксимирующих  $u, v, p, q$  соответственно,  $0 \leq \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \leq 1$ ,  $f^{(\sigma)} = \sigma \hat{f} + (1-\sigma)f$ . Начальные данные для системы (5), а также краевые условия для  $p, q$ , аппроксимируются точно и имеют вид

$$(6) \quad \alpha_{i0} = u_0(x_i), \quad \beta_{i0} = v_0(x_i), \quad \gamma_{i0} = p_0(x_i), \quad \delta_{i0} = q_0(x_i),$$

$$(7) \quad \gamma_{0j} = \varphi_0(t_j), \quad \delta_{0j} = \psi_0(t_j), \quad \gamma_{Nj} = \varphi_1(t_j), \quad \delta_{Nj} = \psi_1(t_j).$$

С целью упрощения выкладок (не ограничивая общности исследования) рассмотрим чисто неявную схему:  $\sigma_i = 1, i = \overline{1, 4}$ . Тогда разностная схема (5)—(7) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (1)—(3) с погрешностью  $O(h^2 + \tau)$ .

Для нахождения приближенного решения задачи (1)—(3) получим систему нелинейных (на  $(j+1)$ -ом временном слое) разностных уравнений (5) с начальными (6) и краевыми (7) условиями. Как отмечалось выше, эту систему будем решать итерационным методом Ньютона. При реализации схем (5) для экономии арифметических операций сначала из системы (5) исключаются сеточные функции  $\alpha, \beta$

$$(8) \quad \begin{aligned} \gamma_i - \tau(P(\hat{\gamma}, \hat{\delta}))_{xx} - \alpha_x &= 0, \\ \delta_i - \tau(Q(\hat{\gamma}, \hat{\delta}))_{xx} - \beta_x &= 0. \end{aligned}$$

Соответствующая (8) линеаризованная по методу Ньютона система примет вид

$$\gamma_i^{k+1} - \tau \left( \frac{\partial P}{\partial p} \gamma^{k+1} + \frac{\partial P}{\partial q} \delta^{k+1} \right)_{xx} = \tau \left( P - \frac{\partial P}{\partial p} \gamma^k - \frac{\partial P}{\partial q} \delta^k \right),$$

(9)

$$\delta_t^{k+1} - \tau \left( \frac{\partial Q}{\partial p} \gamma^{k+1} + \frac{\partial Q}{\partial q} \delta_x^{k+1} \right) = \tau \left( Q - \frac{\partial Q}{\partial p} \gamma^k - \frac{\partial Q}{\partial q} \delta_x^k \right),$$

где индекс указывает на номер итерации на  $(j+1)$ -ом слое и  $f_t^{k+1} = (f - f')/\tau$ .

Линейная система уравнений (9) с начальными и краевыми условиями (6), (7) легко решается методом матричной прогонки, который, как отмечено в работе [8], требует меньше машинного времени по сравнению с методом последовательных прогонок.

3. Рассмотрим теперь разностную задачу для погрешности метода Ньютона (1). С этой целью введем сеточные функции погрешности

$$\Delta p = \hat{p} - \gamma, \quad \Delta q = \hat{q} - \delta,$$

где  $\hat{p}, \hat{q}$  — точное решение исходной задачи (1)–(3) в точках  $(j+1)$ -го временного слоя. Неравенства (4) позволяют организовать сеточные нормы, [4], [9], [7],

$$\|z\|_{(1)}^2 = \left\| \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 = \sum_{i=0}^N h \frac{\partial P(p_i, q_i)}{\partial p} z_i^2,$$

$$\|z\|_{(2)}^2 = \left\| \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 = \sum_{i=0}^N h \frac{\partial Q(p_i, q_i)}{\partial q} z_i^2.$$

Дальше наша цель получить некоторое рекуррентное неравенство, связывающее значения нормы вектора  $\Delta Y = (\Delta p, \Delta q, \Delta p_x, \Delta q_x, \Delta p_{x-x}, \Delta q_{x-x})$

$$(10) \quad \begin{aligned} \|\Delta Y\|_{j+1}^2 &= \|\Delta p\|^2 + \|\Delta q\|^2 + \|\Delta p_x\|_{(1)}^2 + \|\Delta q_x\|_{(2)}^2 \\ &+ \tau \|\Delta p_{x-x}\|_{(1)}^2 + \tau \|\Delta q_{x-x}\|_{(2)}^2 \end{aligned}$$

на  $j$ -ом слое, на  $k$ -ой и  $(k+1)$ -ой итерации.

Теорема 3.1. Пусть  $u(x, t), v(x, t), p(x, t), q(x, t) \in C_3^3(\pi)$ , разностная схема (5)–(7) аппроксимирует задачу (1)–(3) с погрешностью  $O(h^2 + \tau)$ , и для временного слоя  $j (j \geq 1)$  имеет место оценка  $\|\Delta Y\|_j = O(h^2 + \tau)$ . Тогда для достаточно малых  $h, \tau$  имеет место рекуррентное неравенство

$$(11) \quad \begin{aligned} \|\Delta Y\|_{j+1}^2 &\leq (1 + \tau a) \|\Delta Y\|_j^2 + b \|\Delta Y\|_{j+1}^2 + c \|\Delta Y\|_{j+1}^2 \\ &+ r \|\Delta Y\|_{j+1}^4 + r((h^2 + \tau)^2), \quad \|\Delta Y\|_0 = 0, \end{aligned}$$

где  $\|\Delta Y\|_j^2$  определяется из соотношения (10) для нижнего временного слоя,

$a_k = \text{const} \geq 0$ , определяется на точном решении задачи (1)–(3),  $b, c$  — некоторые величины, вычисляемые на  $k$ -ой итерации,  $r((h^2 + \tau)^2)$  — величина, зависящая от квадрата погрешностей аппроксимации разностной схемой (5).

Доказательство. Подставляя решение задачи (1)–(3) в схему (5) и исключая функции  $u, v$ , получаем систему



$$(12) \quad \begin{aligned} p_t - \tau P_{x x}(\widehat{p}, \widehat{q}) &= \psi_3 - \tau \psi_{1x} + u_x, \\ q_t - \tau Q_{x x}(\widehat{p}, \widehat{q}) &= \psi_4 - \tau \psi_{2x} + v_x, \end{aligned}$$

где  $\psi_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$  — погрешности аппроксимации соответствующих уравнений (1)–(3) системы разностных уравнений. Вычитаем из каждого уравнения системы (9) соответствующее уравнение системы (10). Тогда для погрешности метода Ньютона получаем следующую систему уравнений:

$$(13) \quad \begin{aligned} \Delta p_t^{k+1} + \tau \left( \frac{\partial \widehat{P}^k}{\partial p} \gamma^{k+1} + \frac{\partial \widehat{P}^k}{\partial q} \delta^{k+1} \right)_{x x} &= \tau \left( \widehat{P} - \widehat{P}^k + \frac{\partial \widehat{P}^k}{\partial p} \gamma^k + \frac{\partial \widehat{P}^k}{\partial q} \delta^k \right)_{x x} \\ &+ (u_x - \alpha_x) + 0,5 \frac{\tau}{h} (\psi_{1,i+1} - \psi_{1,i}) + \psi_{3,i}, \\ \Delta q_t^{k+1} + \tau \left( \frac{\partial \widehat{Q}^k}{\partial p} \gamma^{k+1} + \frac{\partial \widehat{Q}^k}{\partial q} \delta^{k+1} \right)_{x x} &= \tau \left( \widehat{Q} - \widehat{Q}^k + \frac{\partial \widehat{Q}^k}{\partial p} \gamma^k + \frac{\partial \widehat{Q}^k}{\partial q} \delta^k \right)_{x x} \\ &+ (v_x - \beta_x) + 0,5 \frac{\tau}{h} (\psi_{2,i+1} - \psi_{2,i}) + \psi_{4,i}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta p_t^{k+1} = (\Delta p^{k+1} - \Delta p^k) / \tau, \quad \frac{\partial \widehat{P}^k}{\partial p} = \frac{\partial P}{\partial p}(\gamma^k, \delta^k), \quad \widehat{P} = P(\widehat{p}, \widehat{q}) \text{ и т. д.}$$

Преобразуем систему (13) в следующем виде

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta p_t^{k+1} - \tau \left( \frac{\partial \widehat{P}^k}{\partial p} \Delta p^{k+1} + \frac{\partial \widehat{P}^k}{\partial q} \Delta q^{k+1} \right)_{x x} &= -\tau \left( \frac{\partial^2 \widehat{P}^k}{\partial p^2} \Delta p \Delta p^{k+1} \right. \\ &+ \frac{\partial^2 \widehat{P}^k}{\partial p \partial q} \Delta q \Delta p^{k+1} + \frac{\partial^2 \widehat{P}^k}{\partial p \partial q} \Delta p \Delta q^{k+1} + \frac{\partial^2 \widehat{P}^k}{\partial q^2} \Delta q \Delta q^{k+1} \Big)_{x x} \\ &+ \tau \left( \frac{\partial^2 \widehat{P}^k}{\partial p^2} \Delta p^2 + 2 \frac{\partial^2 \widehat{P}^k}{\partial p \partial q} \Delta p \Delta q + \frac{\partial^2 \widehat{P}^k}{\partial q^2} \Delta q^2 \right)_{x x} + r_1(h^2 + \tau), \\ \Delta q_t^{k+1} - \tau \left( \frac{\partial \widehat{Q}^k}{\partial p} \Delta p^{k+1} + \frac{\partial \widehat{Q}^k}{\partial q} \Delta q^{k+1} \right)_{x x} &= -\tau \left( \frac{\partial^2 \widehat{Q}^k}{\partial p^2} \Delta p \Delta p^{k+1} \right. \\ &+ \frac{\partial^2 \widehat{Q}^k}{\partial p \partial q} \Delta q \Delta p^{k+1} + \frac{\partial^2 \widehat{Q}^k}{\partial p \partial q} \Delta p \Delta q^{k+1} + \frac{\partial^2 \widehat{Q}^k}{\partial q^2} \Delta q \Delta q^{k+1} \Big)_{x x} \\ &+ \tau \left( \frac{\partial^2 \widehat{Q}^k}{\partial p^2} \Delta p^2 + 2 \frac{\partial^2 \widehat{Q}^k}{\partial p \partial q} \Delta p \Delta q + \frac{\partial^2 \widehat{Q}^k}{\partial q^2} \Delta q^2 \right)_{x x} + r_2(h^2 + \tau), \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial^2 \widehat{P}^k}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial p^2}(\widehat{p} - \tilde{\theta} \Delta p, \widehat{q} - \tilde{\theta} \Delta q), \quad 0 < \tilde{\theta} < 1 \text{ и т. д.}$$

$r_1(h^2 + \tau)$ ,  $r_2(h^2 + \tau)$  величины порядка  $0(h^2 + \tau)$ . К системе (14) добавим начальные и краевые условия, которые имеют вид

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta p_{i0} &= 0, \quad \Delta q_{i0} = 0, \quad i=0, 1, \dots, N, \\ \Delta p_0^k &= 0, \quad \Delta p_N^k = 0, \quad \Delta q_0^k = 0, \quad \Delta q_N^k = 0 \quad \text{для всех } k. \end{aligned}$$

Для оценки погрешности метода Ньютона умножим скалярно первое уравнение системы (14) на

$$M_1 = 2\tau(\Delta p^{k+1} + \Delta p_t^{k+1} - (\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p} \Delta p_x^{k+1})_x),$$

второе на

$$M_2 = 2\tau(\Delta q^{k+1} + \Delta q_t^{k+1} - (\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial q} \Delta q_x^{k+1})_x).$$

После применения формулы Грина и неравенства Коши — Буняковского, для первого уравнения получим

$$(16) \quad \begin{aligned} & \|\Delta p^{k+1}\|^2 + \|\Delta p_x^{k+1}\|_{(1)}^2 + 2\tau^2(\Delta p_x^{k+1} + \Delta p_t^{k+1}, (\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p} \Delta p)_x + (\frac{\partial \widehat{P}}{\partial q} \Delta q)_x) \\ & + 2\tau^2 [((\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p} \Delta p_x^{k+1})_x, (\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p} \Delta p)_{xx}) + ((\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p} \Delta p_x^{k+1})_x, (\frac{\partial \widehat{P}}{\partial q} \Delta q)_{xx})] \\ & \leq \pi_1 M_1 + \|\Delta p^j\|^2 + \|\Delta p_x^j\|_{(1)}^2, \end{aligned}$$

где  $\pi_1$  правая часть первого уравнения системы (14). Аналогичным образом получается и неравенство

$$(17) \quad \begin{aligned} & \|\Delta q^{k+1}\|^2 + \|\Delta q_x^{k+1}\|_{(2)}^2 + 2\tau^2(\Delta q_x^{k+1} + \Delta q_t^{k+1}, (\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial p} \Delta p)_x + (\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial q} \Delta q)_x) \\ & + 2\tau^2 [((\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial p} \Delta q_x^{k+1})_x, (\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial p} \Delta p)_{xx}) + ((\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial q} \Delta q_x^{k+1})_x, (\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial q} \Delta q)_{xx})] \\ & \leq \pi_2 M_2 + \|\Delta q^j\|^2 + \|\Delta q_x^j\|_{(2)}^2, \end{aligned}$$

где  $\pi_2$  правая часть второго уравнения системы (14). Дальше для оценки скалярных произведений в (16) и (17) используем неравенство Коши — Буняковского,  $\varepsilon$  — неравенство, разностные формулы Грина и теоремы вложения [9], [10]. Приведем некоторые оценки

$$\begin{aligned} & \tau^2(\Delta p_x^{k+1}, (\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p})_x \Delta p^{k+1} (-1)) \leq \tau^2 \|\Delta p_x^{k+1}\| \cdot \|\Delta p^{k+1} (-1)\| \cdot \|(\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p})_x\|_{C(\omega_h)} \\ & \leq \tau^2 K \|(\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p})^{-1} (\frac{\partial \widehat{P}}{\partial p}) \Delta p_x^{k+1}\| \cdot \|\Delta p^{k+1} (-1)\| \leq \tau^2 K \|\Delta p_x^{k+1}\|_{(1)} \|\Delta p^{k+1} (-1)\| \\ & \leq \varepsilon \tau^2 K (\|\Delta p^{k+1} (-1)\|^2 + \frac{\tau^2}{4\varepsilon} \|\Delta p_x^{k+1}\|_{(1)}^2); \\ & \tau^2(\Delta p_t^{k+1}, \frac{\partial \widehat{P}}{\partial p} \Delta p_x^{k+1}) = -\tau \|\Delta p^{k+1}\|_{(1)}^2 - \tau(\Delta p_x^j, \frac{\partial \widehat{P}}{\partial p} \Delta p^{k+1}) \\ & \leq \tau \|\Delta p_x^{k+1}\|^2 + \frac{\tau}{4\varepsilon} \|\Delta p_x^j\|^2 + \tau \varepsilon \|\Delta p_x^{k+1}\|_{(1)}^2 \\ & = \tau(1 + \frac{1}{\varepsilon}) \|\Delta p_x^{k+1}\|^2 + \tau \varepsilon \|\Delta p_x^j\|^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^2 (\Delta p_{t \bar{x}}^{k+1}, (\frac{\partial P}{\partial q})_{\bar{x}} \Delta q^{k+1} (-1)) &\leq \tau K \varepsilon \|\Delta q^{k+1} (-1)\|^2 \\ &+ \frac{\tau K}{4\varepsilon} (\|\Delta p_{\bar{x}}^{k+1}\|^2 + \|\Delta p_{\bar{x}}^j\|^2). \end{aligned}$$

После двукратного дифференцирования (16), (17) появляются члены вида

$$\begin{aligned} \tau^3 ((\frac{\partial \hat{P}}{\partial p})_{\bar{x} \bar{x}} \Delta p^{k+1}, \Delta p_{\bar{x} \bar{x}}^{k+1}) &\leq K \tau^2 \|\Delta p^{k+1}\| \cdot \|\Delta p_{\bar{x} \bar{x}}^{k+1}\| \\ &\leq K \tau^2 (\varepsilon \|\Delta p^{k+1}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\Delta p_{\bar{x} \bar{x}}^{k+1}\|^2). \end{aligned}$$

Более трудоемко, но таким же образом оцениваются слагаемые в  $p_1 M_1$  и  $p_2 M_2$ . Здесь в оценках появляются произведения вторых степеней норм.

Подставляя найденные оценки в (16), (17), после несложных преобразований получаем неравенство (11). Теорема доказана.

**Теорема 3.2.** *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при достаточно малых  $\tau$  и  $h$  и таких, что  $\tau = h^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$ , для погрешности метода Ньютона (12), (15) имеет место при  $k \rightarrow \infty$  оценка*

$$(18) \quad \|\Delta Y\|_{j+1}^2 \leq \exp(at_j) t_j (r + d\tau^{-1} 0 (h^2 + \tau)^2) (h^2 + \tau)^2, \quad d = \text{const},$$

из которой следует сходимость итерационного метода к точному решению исходной задачи в сеточной норме (10).

Доказательство похоже на доказательство теоремы 1 в работе [5]. Предположим, что для временного слоя с номером  $j$  ( $j \geq 1$ ) имеет место оценка  $\|\Delta Y\|_j = 0(h^2 + \tau)$  и значение решения на нулевой итерации берется с нижнего временного слоя, т. е.  $\overset{\circ}{p} = p$ ,  $\overset{\circ}{q} = q$ . Если  $Y$  — сеточная функция, вычисляемая на точных значениях  $p, q$ , то

$$\begin{aligned} \|\Delta \overset{\circ}{Y}\|_{j+1} - \|\hat{Y} - \overset{\circ}{Y}\| &= \|\hat{Y} - Y + Y - \overset{\circ}{Y}\| \\ &\leq \tau \|\frac{\partial Y}{\partial t}\|_j + \|\Delta Y\|_j + 0(\tau + h^2), \end{aligned}$$

так как  $\hat{Y} - Y = \frac{\partial Y}{\partial t} \tau + 0(\tau^2)$ . Раскроем теперь соотношение (11) рекуррентно по  $k$ , используя те же самые приемы, как в [5]. Для произвольного  $k$  получается оценка

$$(19) \quad \|\Delta Y\|_{j+1}^{k+1} \leq \overset{\circ}{q} \overset{\circ}{q} \cdots \overset{\circ}{q} \|\Delta \overset{\circ}{Y}\|_{j+1}^2 + A(1/B + q/B + \cdots + q \overset{\circ}{q} \cdots \overset{\circ}{q}/B),$$

где

$$\begin{aligned} A &= (1 + \tau) \|\Delta Y\|_j^2 + r(h^2 + \tau)^2, \\ B &= 1 - \overset{\circ}{b} \|\Delta Y\|_{j+1}^k, \quad \overset{\circ}{q} = \overset{\circ}{C} \|\Delta Y\|_{j+1}^k. \end{aligned}$$

Как и в [5], можно показать, что при достаточно малых  $h$  и  $\tau$

$$0 \leq \overset{\circ}{q} < 1, \quad B = 1 + 0(h^2 + \tau)^2.$$

Отсюда следует, что

$$1/B + q/B + \cdots + q \overset{\circ}{q} \cdots \overset{\circ}{q}/B \leq (1 + q + \cdots + q^k)/B$$

$$\leq (1-q)^{-1}/B=0(1), \quad q = \max_k q, \quad B = \min_k B,$$

и поэтому, при  $k \rightarrow \infty$ , имеет место предварительная оценка для  $\|\Delta Y\|_j^{k+1}$  вида

$$(20) \quad \|\Delta Y\|_j^{k+1} = 0(A) = 0(h^2 + \tau)^2.$$

Обозначим  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta Y\|_{j+1}^{k+1} = \|\Delta Y\|_{j+1}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} b^k = b$ ,

где  $b$  и  $c$  — ограниченные величины при выполнении условия (20). Перейдя в соотношении (11) к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , приходим к неравенству

$$\|\Delta Y\|_{j+1}^2 \leq (1 + \tau a) \|\Delta Y\|_j^2 + (b + c) \|\Delta Y\|^4 + \gamma(h^2 + \tau)^2, \quad \|\Delta Y\|_0 = 0,$$

раскрывая которое, рекуррентно получим (18). При этом оценка (18) может быть получена для любого  $t_j \in [0, T]$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Следует отметить, что по сравнению с работой [6], здесь дифференциальные уравнения другие и постановка задачи совершенно различная. Там доказана разрешимость разностных схем и сходимость решений, линейризованных по методу Ньютона систем, к решению разностных схем.

**З а м е ч а н и е 2.** Аналогичным образом исследуется сходимость других итерационных методов решения нелинейных систем уравнений [1]. Основные трудности состоят в организации подходящих сеточных норм и построении рекуррентного неравенства.

**4.** Трудности при численном решении динамических задач нелинейной упругости связаны преимущественно с расчетом разрывных решений. С другой стороны, как показывают численные эксперименты, не существует проблем с расчетами контактных разрывов. Это, может быть, объясняется тем, что в лагранжевых координатах длины векторов скорости и деформации оказываются непрерывными функциями над контактными разрывами. Сложным является вопрос о расчете ударных волн, что собственно требует разработки специализированных дифференциальных схем и методов эффективного решения получаемых систем нелинейных алгебраических уравнений.

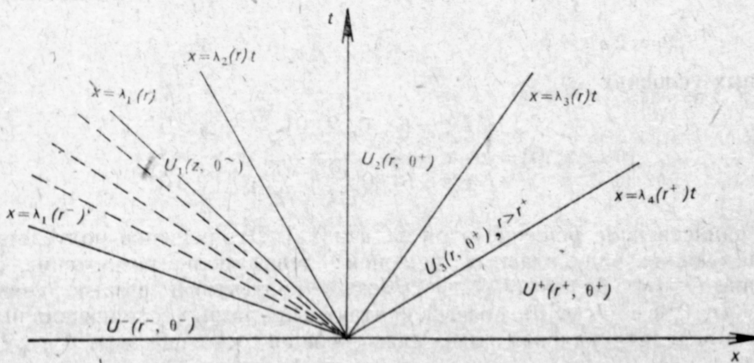


Рис. 1

В качестве теста рассмотрим задачу Римана для системы (1), [11], [12] (задача Коши с начальными данными  $U(x, 0)=U^-$  при  $x < 0$  и  $U(x, 0)=U^+$  при  $x > 0$ ,  $U=(u, v, p, q)$ ,  $U^-, U^+$  постоянные векторы) для упругого тела Синьорини [7], при котором  $W(p, q)=0.5 r^2(a+br^2)$ ,  $r^2=p^2+q^2$ ,  $a, b > 0$  — материальные постоянные.

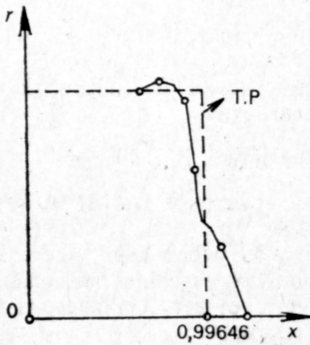


Рис. 2 а

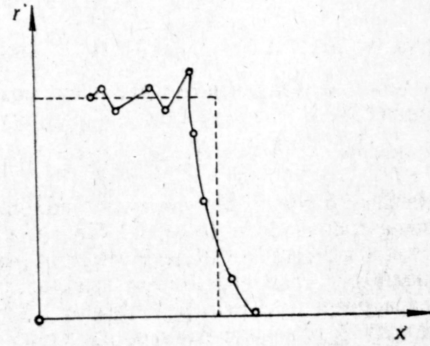


Рис. 2 б

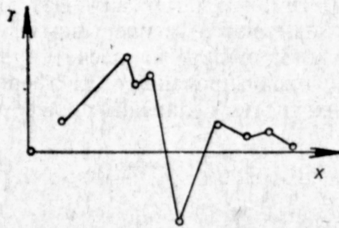


Рис. 2 в

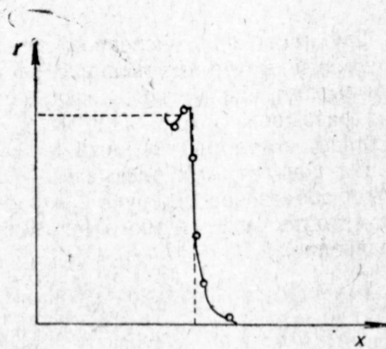


Рис. 3 а

При начальных условиях

$$U(x, 0) = \begin{cases} U^- = (0, 0, 2, 0), & x < 0 \\ U^+ = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), & x > 0 \end{cases}$$

существует единственное решение этой задачи [12]. Это решение получается „склеиванием“ следующих элементарных решений: левая волна разряжения, связывающая состояние  $U^-(r^-, \theta^-)$  с  $U_1(r, \theta^-)$ , левый контактный разрыв, связывающий состояние  $U_1(r, \theta^-)$  с  $U_2(r, \theta)$ , правый контактный разрыв, соединяющий  $U_2(r, \theta^+)$  с  $U_3^+(r, \theta^+)$ , и передняя ударная волна, связывающая состояние  $U_3(r, \theta^+)$  с  $U^+(r^+, \theta^+)$

В случае  $r^+ = 1$ ,  $r^- = 2$ ,  $r = 1,48589325$ ,  $\theta^- = 0$ ,  $\theta^+ = \frac{\pi}{4}$ ,  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{6}$ .



На рис. 1 приведена конфигурация решения,  $\lambda_{1,4}(q) = \mp\sqrt{a+6br^2}$ ,  $\lambda_{2,3} = \mp\sqrt{a+2br^2}$ . Для расчета этого решения вводится равномерная по  $x$  сетка с шагом  $h=0,1$ , а шаг  $\tau$  по времени меняется.

На рис. 2 даны расчеты второй компоненты деформации  $q$  задачи (1), (22) с явными ПКРС (схемы (5)), при которых  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_4 = 0,5$ . При  $\tau=0,01$  реше-

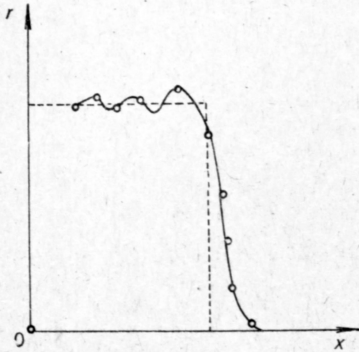


Рис. 3а

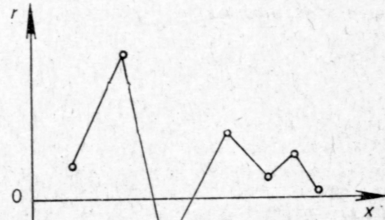


Рис. 3б

ние передается удовлетворительно (рис. 2а) при  $\tau=0,02$  (рис. 2, б) в решении наблюдаются колебания, при  $\tau=0,04$  решение уже испытывает сильные колебания.

На рис. 3 даны расчеты с неявными ПКРС, соответственно с шагами  $\tau=0,02$ ,  $\tau=0,06$ ,  $\tau=0,08$ . Сравнивая их с рис. 2, заключаем, что для решения динамических задач нелинейной упругости эффективны ПКРС в сочетании с методом Ньютона. Построенные на этом принципе алгоритмы позволяют использовать грубые сетки с большим временным шагом.

Автор выражает благодарность П. А. Вакульчику за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Ортега, В. Рейнболдт. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975.
2. В. А. Лапин, А. Д. Ляшко. О сходимости разностных схем для квазилинейных уравнений параболических на решений. *Изв. вузов. Математика*, 1975, № 12, 30—42.
3. В. Н. Абрашин, П. П. Матус. Разностные схемы с кусочно-гладкими решениями. *Диф. уравнения*, 15, 1979, № 17, 1225—1238.
4. Н. В. Арлеян. Метод исследования сходимости нелинейных разностных схем. *Диф. уравнения*, 1987, № 7, 1116—1126.
5. П. А. Вакульчик, А. А. Шорец. О сходимости метода Ньютона решения разностных схем для уравнений газовой динамики с теплопроводностью. *Диф. уравнения*, 22, 1986, № 7, 1141—1149.
6. Л. Г. Волков. О сходимости метода Ньютона при реализации неявных разностных схем несжимаемой упругости. *Труды Восемн. Весенней Конф. С.Б.М.* 1989, 265—271.
7. А. И. Лурье. Нелинейная теория упругости. М., 1980.
8. Л. Г. Волков. Полностью консервативные разностные схемы для уравнении нелинейной упругости. *Вар. ризи. методы мат. физ.* М., 1984.



9. А. А. Самарский. Теория разностных схем. М., 1977.
10. А. А. Самарский, В. Б. Андреев. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976.
11. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М., Наука, 1978.
12. Л. Г. Волков. Задача о распаде произвольного разрыва для несжимаемого изотропного упругого тела. *Дин. спл. среды, СОАН СССР*, вып. 63, 1983, 33—46.

*ВТУ „А. Кънчев“  
Центр математики  
Русе*

*Поступила 5. 12. 1989  
В переработанном  
виде 6. 08. 1990*