Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В СТРОГО ГРАДУИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ

С. В. МИХОВСКИ

Пусть W — произвольное строго G-градуированное кольцо, где G — группа. В работе доказано, что если W — полупервичное кольцо, то все центральные алгебраические элементы кольца W, имеют конечные опорные подгруппы — Теорема 1. Отсюда следует положительное решение проблемы Рудина и Шнайдера (1964) и для строго градуированных колец — Теорема 2. Кроме того, все идемпотенты строго G-градуированного кольца W имеют конечные опорные подгруппы тогда и только тогда, когда G-локально конечная группа или W не содержит нецентральных идемпотентов — Теорема 3.

Пусть G — мультипликативная группа, а W — ассоциативное кольцо с единицей. Напомним [7], что кольцо W называется строго G-градуированным, если адитивная группа $W(+)$ кольца W является прямой суммой

$$W(+)=\sum_{g\in G}\oplus W(g)$$

своих адитивных подгрупп $W(g)$ и

$$W(g)\,W(h)=W(gh) \tag{1}$$

для всех $g, h\in G$. Очевидно, что групповые кольца и скрещенные произведения групп и колец являются строго градуированными кольцами.

Любой элемент r строго G-градуированного кольца W однозначно записывается в виде конечной суммы

$$r=\sum_{g\in G} r(g),$$

где $r(g)\in W(g)$. Следовательно, множество

$$\operatorname{Supp} r=\{g\in G \mid r(g)\neq 0\}$$

конечно для всех $r\in W$ и называется носителем элемента r. Подгруппа $\langle \operatorname{Supp} r\rangle$ группы G, порожденная множеством $\operatorname{Supp} r$, называется опорной подгруппой элемента r. Всегда будем считать, что $\langle \operatorname{Supp} 0\rangle=\{1\}$.

В [8] Рудин и Шнайдер выдвинули гипотезу, что опорные подгруппы центральных идемпотентов группового кольца KG произвольной группы G над ассоциативным кольцом K всегда конечны. Это предположение впервые было доказано в [1] и [2]. Теперь в литературе известны еще несколько разных доказательств этого факта [6], которые используют некоторые специфические свойства групповых колец. В настоящей заметке показано, что в полупервичных строго G-градуированных кольцах все центральные алгебраические элементы имеют конечные опорные подгруппы — Теорема 1. Отсюда следует, что проблема Рудина и Шнайдера имеет положительное решение и для строго G-градуированных колец — Теорема 2. Кроме того доказано, что в таких кольцах все идемпотенты имеют конечные опор-

СЕРДИКА Българско математическо списание. Т. 17, 1991, с. 104-110.

ные подгруппы тогда и только тогда, когда они центральные или группа G локально конечная — Теорема 3.

Пусть W — произвольное строго G-градуированное кольцо. Условие (1) показывает, что $K=W(1)$ является подкольцом кольца W, а $W(g)$ является (K, K) — бимодулем для всех $g\in G$. Если H — подгруппа группы G, то

$$W(H)=\sum_{h\in H} W(h)$$

будет подкольцом кольца W. А если H — нормальная подгруппа группы G и положим

$$W(gH)=\sum_{h\in H} W(gh),$$

то отсюда следует, что

$$W=\sum_{g\in \Pi(G/H)} \oplus W(gH),$$

где $\Pi(G/H)$ — полная система представителей смежных классов группы G по подгруппе H. Поскольку

$$W(g_1H)\,W(g_2H)=W(g_1g_2H)$$

для всех $g_1, g_2\in \Pi(G/H)$, то W является и строго G/H-градуированным кольцом.

Элемент $a\in W$ назовем алгебраическим элементом кольца W, если существует такой полином

$$f(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n \quad (\alpha_i\in K),$$

что α_0 не является делителем нуля в K и $f(a)=0$.

Очевидно, что все идемпотентные, нильпотентные и периодические $/n$ элементы мультипликативной группы кольца W являются алгебраическими элементами.

Лемма 1. *Если a — центральный алгебраический элемент строго G-градуированного кольца W и $f(a)=0$, то существует такой центральный алгебраический элемент a_1 кольца W, что элементы $a-a_1$ и $f(a_1)$ принадлежат первичному радикалу $\operatorname{rad} W$ кольца W, а $\langle \operatorname{Supp} a_1\rangle$ — конечная нормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть

$$a=a(g_1)+a(g_2)+\cdots+a(g_n) \quad (0\neq a(g_i)\in W(g_i))$$

— произвольный центральный алгебраический элемент кольца W и $g\in G$. Известно [4], что существует такой ненулевой элемент $r(g)\in W(g)$, что $a(g_i)\,r(g)\neq 0$ $(1\leq i\leq n)$. Поскольку $ar(g)=r(g)a$, то для некоторого j $(1\leq j\leq n)$ имеет место равенство $a(g_i)\,r(g)=r(g)\,a(g_j)$ и поэтому $g_ig\neq gg_j$. Следовательно, множество $\operatorname{Supp} a$ инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G, а отсюда вытекает, что $H=\langle \operatorname{Supp} a\rangle$ — конечно порожденная нормальная FC — подгруппа [5] группы G. Тогда периодическая часть $N=\pi(H)$ подгруппы H является конечной нормальной подгруппой группы G, а H/N — конечно порожденная абелева группа без кручений [5]. Но так как $W(H)$ — строго H/N-градуированное подкольцо кольца W, $a\in W(H)$ и H/N — линейно упорядоченная группа, то пусть

$$a=a(h_1N)+a(h_2N)+\cdots+a(h_mN),$$

где $a(h_iN)\in W(h_1N)$ для $i=1, 2, \ldots, m$ и

$$h_1N<h_2N<\cdots<h_mN \quad (h_i\in \Pi(H/N)).$$

Если $h\in H$ и $r(hH)\in W(hH)$, то равенство $ar(hN)=r(hN)a$ влечет за собой равенства $a(h_iN)\,r(hN)=r(hN)\,a(h_iN)$, $i=1, 2, \ldots, m$. Следовательно, элементы $a(h_iN)$ ($i=1, 2, \ldots, m$) принадлежат центру кольца $W(H)$.

Если $m>2$, то $h_1N\neq N$ или $h_mN\neq N$. Допустим, что $h_mN\neq N$. Поскольку $f(a)=0$ и H/N — линейно упорядоченная группа, то отсюда получаем, что

$$\alpha_0(a(h_mN))^n=0.$$

Но так как α_0 не является делителем нуля кольца K, то α_0 не является делителем нуля и кольца W [4]. Поэтому $a(h_mN)$ — центральный нильпотентный элемент кольца $W(H)$ и, следовательно, $a(h_mN)\in \operatorname{rad} W(H)$.

Предположим (после перенумераций слагаемых элемента a, если это необходимо), что элементы $a(h_1N), a(h_2N), \ldots, a(h_kN)$ не принадлежат первичному радикалу $\operatorname{rad} W(H)$ подкольца $W(H)$, а $a(h_{k+1}N), \ldots, a(h_mN)\in \operatorname{rad} W(H)$ и положим

$$a_1=a(h_1N)+a(h_2N)+\cdots+a(h_kN),$$

где $h_1N<h_2N<\cdots<h_kN$. Тогда

$$0=f(a)=f(a_1)+\frac{f'(a_1)}{1!}(a-a_1)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a_1)}{n!}(a-a_1)^n=f(a_1)+z,$$

где $z\in \operatorname{rad} W(H)$, так как $a-a_1\in \operatorname{rad} W(H)$. Следовательно, $f(a_1)\in \operatorname{rad} W(H)$ и $f(a_1)$ — нильпотентный элемент и пусть $(f(a_1))^p=0$. Это показывает, что a_1 — алгебраический элемент кольца W. Если $k>1$, то в силу линейной упорядоченности фактор группы H/N, отсюда следует, что $(\alpha_0(a(h_1N))^n)^p=0$ либо $(\alpha_0(a(h_kN))^n)^p=0$. Поскольку α_0 не является делителем нуля в K, то хотя бы один из элементов $a(h_1N)$ и $a(h_kN)$ нильпотентен, а это невозможно. Поэтому $k\leq 1$.

Если $k=0$, то $a_1=0$, a — центральный нильпотентный элемент кольца W и $a\in \operatorname{rad} W$. Тогда $f(a_1)=\alpha_n\in \operatorname{rad} W$, так как

$$0=f(a)=\alpha_0a^n+\alpha_1a^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}a+\alpha_n=u+\alpha_n,$$

где $u\in \operatorname{rad} W$. В этом случае $\langle \operatorname{Supp} a_1\rangle=\{1\}$.

Если $k=1$, то $a_1=a(h_1N)$. Тогда равенство $(f(a_1))^p=0$ эквивалентно некоторому равенству вида

$$\alpha_0(a(h_1N))^{pn}+\beta_1(a(h_1N))^{p_1}+\cdots\beta_s(a(h_1N))^{p_s}=0,$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\in K$ и $np>p_1>\cdots>p_s$. Но если $h_1N\neq N$, то такое равенство невозможно, поскольку $\langle h_1N\rangle$ — бесконечная циклическая группа и $a(h_1N)$ не является нильпотентным элементом. Следовательно, $h_1\in N$ и $\langle \operatorname{Supp} a_1\rangle\subseteq N$. Покажем, что $\langle \operatorname{Supp} a_1\rangle$ — нормальная подгруппа группы G и $a-a_1\in \operatorname{rad} W$.

Действительно, если $g\in G$ и $r(g)\in W(g)$, то сравнивая отдельные слагаемые равенства $ar(g)=r(g)a$, мы приходим к выводу, что элемент $a_1=a(h_1N)$ принадлежит центру кольца W, а для любого элемента $a(h_iN)$ ($i=2, 3, \ldots, m$) существует такой элемент $a(h_jN)$, $2\leq j\leq m$, что выполняется равенство

$$a(h_iN)\,r(g)=r(g)\,a(h_jN)\quad (i, j=2, 3, \ldots, m). \tag{2}$$

Рассмотрим правый идеал $J=a(h_iN)\,W$ кольца W. Если $x\in J^p$, то элемент x имеет представление вида

$$x=\Sigma\, a(h_iN)\,r(g_1)\,a(h_iN)\,r(g_2)\cdots a(h_iN)\,r(g_p),\quad r(g_k)\in W(g_k).$$

Теперь, применяя равенства (2) и имея в виду, что все элементы $a(h_jN)$ ($j=2, 3, \ldots, m$) нильпотентны, мы заключаем, что для достатачно большого числа p всегда $x=0$. Следовательно, правый идеал J нильпотентен и $a(h_iN)\in \operatorname{rad} W$. Таким образом, получаем, что $a-a_1\in \operatorname{rad} W$. Кроме того, $\langle \operatorname{Supp} a_1\rangle$ — нормальная подгруппа группы G, так как $a_1\in \mathfrak{Z}(W)$. Лемма доказана.

Как непосредственное следствие из этой леммы получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Все центральные алгебраические элементы полупервичных строго G-градуированных колец имеют конечные опорные подгруппы.*

Примеры показывают, что если $\operatorname{rad} W \neq 0$, то Теорема 1 для кольца W не верна.

Действительно, пусть $W = KG$ — групповое кольцо FC-группы G над кольцом K. Пусть G содержит непериодический элемент g, а K содержит ненулевой центральный нильпотентный элемент α. Если $g_1 = g, g_2, \ldots, g_n$ — все сопряженные элементы элементу g в группе G, то $a = \alpha(g_1 + g_2 + \cdots + g_n)$ является центральным нильпотентным элементом кольца KG. Следовательно, a — центральный алгебраический элемент кольца W с бесконечной опорной подгруппой. Но в данном случае $\operatorname{rad} W \neq 0$, так как α и a принадлежат радикалу.

Если e — идемпотент кольца W, т. е. $e^2 = e$, то e является алгебраическим элементом кольца W. Для таких элементов докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Все центральные идемпотенты в строго G-градуированных кольцах имеют конечные опорные подгруппы.*

Доказательство. Пусть e — нетривиальный центральный идемпотент строго G-градуированного кольца W, т. е. $e^2 = e \in \mathfrak{Z}(W)$ и $e \neq 0, 1$. Так как e — корень полинома $f(x) = x^2 - x$, то согласно Леммы 1, существует такой центральный элемент e_1 кольца W, что $\langle \operatorname{Supp} e_1 \rangle$ — конечная нормальная подгруппа группы G, а элементы $e - e_1$ и $z = e_1^2 - e_1$ принадлежат радикалу $\operatorname{rad} W$.

Рассмотрим [3] уравнение

$$(x^2 - x)(1 + 4z) + z = 0,$$

которое имеет корень

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - (1 + 4z)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Так как

$$x_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\binom{2i}{i}z^i,$$

а коэффициенты $\frac{1}{2}\binom{2i}{i}$ — целые числа и z — нильпотентный элемент, то $x_1 \in W$. Кроме того, x_1 — центральный элемент кольца W, а

$$\langle \operatorname{Supp} x_1 \rangle \subseteq \langle \operatorname{Supp} z \rangle \subseteq \langle \operatorname{Supp} e_1 \rangle$$

и поэтому $\langle \operatorname{Supp} x_1 \rangle$ — конечная нормальная подгруппа группы G. Тогда элемент

$$\bar{e} = e_1 + x_1(1 - 2e_1)$$

тоже принадлежит центру $\mathfrak{Z}(W)$ и $\langle \operatorname{Supp} \bar{e} \rangle$ — конечная нормальная подгруппа группы G. Поскольку

$$\bar{e}^2 = e_1^2 + 2x_1(e_1 - 2e_1^2) + x_1^2(1 - 2e_1)^2 = (x_1^2 - x_1)(1 + 4z) + z + \bar{e} = \bar{e},$$

то $\bar{e}$ — центральный идемпотент кольца W. Более того, элемент

$$f = e - \bar{e} = (e - e_1) + x_1(1 - 2e_1)$$

принадлежит радикалу $\operatorname{rad} W$, ибо $e - e_1 \in \operatorname{rad} W$ и $x_1 \in \operatorname{rad} W$. Поэтому f — нильпотентный элемент кольца W. Но так как

$$f^3 = e^3 - 3e^2\bar{e} + 3e\bar{e}^2 - \bar{e}^3 = e - \bar{e} = f,$$

то $f^{3^n} = f$ для всех натуральных n и, следовательно, $f = 0$, т. е. $e = \bar{e}$. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть e — идемпотент строго G-градуированного кольца W и $H=\langle \operatorname{Supp} e\rangle$. Если $g\in G$ и e не принадлежит центру $\mathfrak{Z}(W_1)$ подкольца $W_1=W(H_0)$, где $H_0=\langle H, g\rangle$, то существует такой идемпотент $f\in W$, что $\langle \operatorname{Supp} f\rangle=H_0$ и f не принадлежит центру $\mathfrak{Z}(W_1)$.*

Доказательство. 1) Если $g\in H$, то $\langle H, g\rangle=H$, и мы можем положить $f=e$.

2) Пусть $g\bar{\in} H$ и предположим, что существует такой элемент $r(g)\in W(g)$, что $r(g)e\neq er(g)$. Тогда элемент $er(g)e$ не может одновременно совпадать с элементами $r(g)e$ и $er(g)$. Для определенности предположим, что $er(g)e\neq er(g)$. Положим

$$f=e+er(g)e-er(g).$$

Поскольку

$$ef=f,\quad fe=e,\quad (er(g)e-er(g))^2=0,$$

то $f^2=f$ и $f\neq e$. Следовательно, $ef\neq fe$ и $f\bar{\in}\mathfrak{Z}(W_1)$. Если

$$e=r(g_1)+r(g_2)+\cdots+r(g_n),\quad 0\neq r(g_i)\in W(g_i),$$

то легко проверяется, что никакое слагаемое элемента e не уничтожается некоторым слагаемым элемента $er(g)e-er(g)$, так как $g\bar{\in} H$. Следовательно, подгруппа $\langle \operatorname{Supp} f\rangle$ порождается множеством $\operatorname{Supp} e$ и некоторыми элементами вида g_igg_k и gg_k, где $g_i, g_k\in \operatorname{Supp} e$. Поэтому $\langle \operatorname{Supp} f\rangle=H_0$. Аналогично рассматривается и случай, когда $er(g)e\neq r(g)e$.

3) Предположим, что $r(g)e=er(g)$ для всех $r(g)\in W(g)$ и $g\bar{\in} H$, но существует такой элемент $\alpha\in W(1)$, что $\alpha e\neq e\alpha$. Тогда $e\alpha e-e\alpha\neq 0$ или $e\alpha e-\alpha e\neq 0$. Если выполняется первое неравенство, положим

$$f=e+(e\alpha e-e\alpha)r(g),$$

где $r(g)\in W(g)$ такой элемент, что $(e\alpha e-e\alpha)r(g)\neq 0$ [4]. Тогда снова $f^2=f$ и $\langle \operatorname{Supp} f\rangle=H_0$. Аналогично рассматривается и второй случай.

4) Рассмотрим случай, когда $e\alpha=\alpha e$ и $r(g)e=er(g)$ для всех $\alpha\in W(1)$ и $r(g)\in W(g)$. Покажем, что существует такой элемент $r\in W(Hg)$, что $re\neq er$.

Действительно, допустим что все элементы из $W(Hg)$ коммутируют с идемпотентом e. Поскольку

$$W(Hg)=\sum_{h\in H}W(hg)=\sum_{h\in H}W(h)W(g),$$

то и все элементы из $W(h)W(g)$ $(h\in H)$ коммутируют с идемпотентом e. Так как $1\in W(1)=W(g)W(g^{-1})$, то пусть

$$1=u^{(1)}(g)v^{(1)}(g^{-1})+u^{(2)}(g)v^{(2)}(g^{-1})+\cdots+u^{(m)}(g)v^{(m)}(g^{-1})$$

и пусть $r(h)$ — произвольный элемент из $W(h)$. Тогда

$$er(h)u^{(i)}(g)=r(h)u^{(i)}(g)e=r(h)eu^{(i)}(g)$$

и, следовательно,

$$er(h)u^{(i)}(g)v^{(i)}(g^{-1})=r(h)eu^{(i)}(g)v^{(i)}(g^{-1}),\quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Суммируя эти равенства, мы получим, что $er(h)=r(h)e$ для всех $r(h)\in W(H)$. Следовательно, идемпотент e коммутирует с всеми элементами из $W(g)$ и $W(h)$. Покажем, что e коммутирует и с всеми элементами из $W(g^{-1})$. Действительно, $1\in W(g^{-1})W(g)$ и пусть

$$1=a^{(1)}(g^{-1})b^{(1)}(g)+a^{(2)}(g^{-1})b^{(2)}(g)+\cdots+a^{(m)}(g^{-1})b^{(m)}(g),$$

где $a^{(i)}(g^{-1})\in W(g^{-1})$, а $b^{(i)}(g)\in W(g)$. Тогда $eb^{(i)}(g)=b^{(i)}(g)e$ и

$$b^{(i)}(g)r(g^{-1})e=eb^{(i)}(g)r(g^{-1})=b^{(i)}(g)er(g^{-1})$$

для всех $r(g^{-1}) \in W(g^{-1})$. Отсюда следует, что

$$a^{(i)}(g^{-1})\, b^{(i)}(g)\, r(g^{-1})\, e = a^{(i)}(g^{-1})\, b^{(i)}(g)\, er(g^{-1}).$$

Суммируя эти равенства для $i=1, 2, \ldots, m$, мы получим, что $r(g^{-1})e = er(g^{-1})$ для всех $r(g^{-1}) \in W(g^{-1})$.

Если $r \in W(H)$, то

$$r = \sum_{h \in H} r(h), \quad r(h) \in W(h)$$

и пусть

$$h = h_1 g^{s_1} h_2 g^{s_2} \ldots h_n g^{s_n},$$

где

$$h_1, h_2, \ldots, h_n \in H \quad \text{и} \quad s_1, s_2, \ldots, s_n \in Z.$$

Тогда $r(h) \in W(H)\, W(g^{s_1}) \ldots W(H)\, W(g^{s_n})$ и поскольку W — строго градуированное кольцо, а все элементы из $W(H)$, $W(g)$ и $W(g^{-1})$ коммутируют с элементом e, то и элемент $r(h)$ коммутирует с e. Отсюда вытекает, что $re = er$ для всех $r \in W(H_0)$, т. е. $e \in \mathfrak{Z}(W_1)$, а это невозможно. Полученное противоречие показывает, что существует элемент $r \in W(Hg)$, для которого $er \neq re$. Но это означает, что существует и элемент $r(hg) \in W(hg)$, такой, что $r(hg)e \neq er(hg)$, где $h \in H$. Тогда $er(hg)e - er(hg) \neq 0$ или $er(hg)e - r(hg)e \neq 0$. Если имеет место первый случай, то

$$f = e + er(hg)e - er(hg) = f^2,$$

$\langle \operatorname{Supp} f \rangle = H_0$ и f не принадлежит центру подкольца $W_1 = W(H_0)$, так как $ef \neq fe$ Аналогично рассматривается и второй случай. Лемма доказана.

Теорема 2. *Все идемпотенты строго G-градуированного кольца W имеют конечные опорные подгруппы тогда и только тогда, когда W не содержит нецентральных идемпотентов или группа G локально конечна.*

Доказательство. Если G — локально конечная группа или все идемпотенты кольца W центральные, то, в силу теоремы 1, все идемпотенты кольца W имеют конечные опорные подгруппы.

Обратно, пусть все идемпотенты кольца W имеют конечные опорные подгруппы, но группа G не является локально конечной. Тогда покажем, что все идемпотенты кольца W центральные.

Действительно, предположим что W содержит нецентральный идемпотент e, и пусть $er(g_0) \neq r(g_0)e$, где $g_0 \in G$ и $H = \langle \operatorname{Supp} e \rangle$. Если $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ — бесконечная конечно порожденная подгруппа группы G и $H_i = \langle H, g_0, g_1, \ldots, g_i \rangle$, то в силу Леммы 2, мы можем построить такие идемпотенты $f_i \in W(H_i)$, что $\langle \operatorname{Supp} f_i \rangle = H_i$ и f_i не принадлежит центру подкольца $W(H_i)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда опорная подгруппа идемпотента $f_n \in W$ содержит бесконечную подгруппу $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$, а это невозможно. Следовательно, все идемпотенты кольца W центральные и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1) А. А. Бовди, С. В. Миховски. Идемпотенты скрещенных произведений. ДАН СССР. 195, 1971, 263—265.

2) А. А. Бовди, С. В. Миховски. Идемпотенты скрещенных произведений. *Известия на матем. институт на БАН*, 13, 1972, 247—263.

3) И. Ламбек. Кольца и модули. М., 1971.
4) С. В. Миховски, Ж. М. Димитрова, О строго G-градуированных кольцах *ир*-групп, *Сердика* (в печати).
5) С. Н. Черников. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М., 1980.
6) D. S. Passman. The Algebraic Structure of Group Ring, New York, 1977.
7) E. C Dade. Group-graded Rings and Modules, *Math. Z.*, **174**, 1980, 241—262.
8) W. Rudin, H. Schneider, Idempotents in Group Rings, *Duke Math. J.*, **31**, 1964, 585—602

Поступила 16. 01. 1990

Пловдивский университет
Пловдив — 4000
Болгария