Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Д. М. ИПАТЕ, М. М. ЧОБАН

В работах [1]—[3] был исследован вопрос об аппроксимации многозначного отображения непрерывными отображениями. В другом аспекте вопрос об аппроксимации многозначных отображений был исследован в работах [4]—[7].

В работе 1 при построении аппроксимации впервые успешно были применены теоремы о существовании сечений. Фактически аппроксимация многозначного отображения при помощи однозначных ветвей впервые встречается в работах [8]—[9]. Только в [8] строится несчетное семейство аппроксимирующих отображений, а в [9] аппроксимируется отображение при помощи измеримых ветвей.

В настоящей работе аппроксимации строятся методом сечений в сочетании с методом последовательностей покрытий. При исследовании точечно конечных покрытий мы применяем методы из [10]—[11]. Мы используем результаты о сечениях из [12]—[18]. Некоторые теоремы из [12] неточно доказаны и в [16] указан способ исправления этих ошибок.

Предложенный в работе метод построения аппроксимаций основан на ряде элементарных фактов об операциях над многозначными отображениями и в принципе отличается от метода из [1] тем, что в нем не используем аппарат теории опорных функций. Эти элементарные факты изложены в первых двух параграфах. В § 3 и 4 доказываются основные результаты об аппроксимации полунепрерывных снизу отображений непрерывными отображениями. Полученные здесь результаты усиливают теорему 1 из [1] и в случае евклидовых пространств, поскольку мы не всегда предполагаем, что образы точек компактны. Например, из теоремы 5 легко вытекает известная теорема Р. Бора [2].

Несколько замечаний о терминологии и обозначениях.

1. Все пространства предполагаются нормальными и отделимыми.
2. Через $|A|$ обозначается мощность множества A.
3. Через $[L]$ обозначаем замыкание множества L.
4. Основная терминология взята из книги [18].

1. Основные понятия и элементарные утверждения. Пусть X и Y топологические пространства. Обозначим $A(X)$ — все непустые подмножества пространства X, $\mathscr{F}(X)=\{L\in A(X)\mid [L]=L\}$ и $C(X)=\{L\in\mathscr{F}(X)\mid L$-компакт$\}$. Однозначное отображение $\theta\colon Y\to A(X)$ называется многозначным отображением пространства Y в X. Отображение θ полунепрерывно снизу (соответственно сверху) в точке $y_0\in Y$, если для всякого открытого в X множества U, где $U\cap\theta(y_0)\neq\varnothing$ (соответственно $\theta(y_0)\subset U$) найдется окрестность Oy_0 точки y_0 в Y, для которой $Oy_0\subset\theta^{-1}U=\{y\in Y\mid\theta(y)\cap U\neq\varnothing\}$ (соответственно $Oy_0\subset\{y\subset Y\mid\theta(y)\subset U\}$).
Отображение θ непрерывно в точке y_0, если оно одновременно полунепрерывно снизу и сверху в точке y_0.

Если заданы отображения $\theta : Y \to A(x)$, $\varphi : Y \to A(X)$ и $\varphi(y) \subset \theta(y)$ для всех $y \in Y$, то отображение φ называется ветвью или селекцией, или сечением отображения θ.
Если $\mathfrak{A} \subset A(x)$, то запись $\theta : Y \to \mathfrak{A}$ означает, что θ есть многозначное отображение в x и $\theta(y) \in \mathfrak{A}$ для всех $y \in Y$. Запись $f : Y \to X$ используется только для обозначения однозначных отображений.

Лемма 1.1. *Пусть заданы отображения $\theta : Y \to A(X)$ и $\varphi : Y \to A(X)$. Положим $\psi(y) = \varphi(y) \cup \theta(y)$ для всех $y \in Y$.*
Тогда: 1. Если отображения θ и φ полунепрерывны снизу в точке $y_0 \in Y$, то и отображение ψ полунепрерывно снизу в точке y_0.

2. Если отображения θ и φ полунепрерывны сверху в точке $y_0 \in Y$, то и отображение ψ полунепрерывно сверху в точке y_0.

3. Если отображения θ и φ непрерывны или полунепрерывны снизу, или полунепрерывны сверху, то таково и отображение ψ.

Доказательство. Очевидно.

Лемма 1.2. *Пусть заданы полунепрерывное снизу отображение $\theta : Y \to A(X)$, открытое в Y множество V, и полунепрерывное снизу отображение $\varphi : V \to A(X)$. Тогда отображение $\psi : Y \to A(X)$, где $\psi(y) = \theta(y) \cup \varphi(y)$, если $y \in V$ и $\psi(y) = \theta(y)$, если $y \in Y \setminus V$, полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Если U отркыто в X, то $\psi^{-1}U = \theta^{-1}U \cup (\varphi^{-1}U \cap V)$. Доказательство завершено.

При доказательстве леммы 1.2 мы использовали известные факты из [19], что отображение $\theta : Y \to A(X)$ полунепрерывно снизу (сверху) тогда и только тогда, когда $\theta^{-1}U$ открыто (замкнуто) для всякого открытого (замкнутого) в X множества U.

В дальнейшем, на протяжении всего параграфа будем считать, что пространство X метризуемо метрикой ρ. Для каждой точки $x \in X$ и каждого множества $A \subset X$ положим $O(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x; y) < \varepsilon\}$ и $O(A, \varepsilon) = \cup\{O(x, \varepsilon) \mid x \in A\}$, если $\varepsilon > 0$ и $O(x, 0) = \{x\}$, $O(A, 0) = A$.

Лемма 1.3. *Пусть отображения $\theta : Y \to A(X)$ и $\varphi : Y \to A(X)$ полунепрерывны снизу, f — неотрицательная непрерывная функция, определенная на Y, и $\varphi(y) \subset \theta(y)$ для всех $y \in Y$. Положим $\psi(y) = \theta(y) \cap O(\varphi(y); f(y))$ для всех $y \in Y$. Тогда отображение ψ полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Фиксируем $y_0 \in Y$ и открытое в X множество U, где $\psi(y_0) \cap U \neq \varnothing$. Нужно доказать, что существует открытое в Y множество V, для которого $y_0 \in V \subset \psi^{-1}U$.

Возможны три случая:

Случай 1. $f(y_0) = 0$.
В этом случае $\psi(y_0) = \varphi(y_0)$, а множество $V = \varphi^{-1}U$ открыто и $y_0 \in V \subset \psi^{-1}U$. Для этого случая множество V построено.

Случай 2. $f(y_0) = a > 0$ и $\varphi(y_0) \cap U \neq \varnothing$.
И для этого случая множество $V = \varphi^{-1}U$ искомое.

Случай 3. $f(y_0) > 0$ и $\varphi(y_0) \cap U = \varnothing$.
Тогда существуют точки $x_0 \in \varphi(y_0)$ и $x_1 \in \psi(y_0) \cap U$, для которых $\rho(x_0, x_1) < a$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{3}(a - \rho(x_0, x_1))$, $V_0 = \varphi^{-1}O(x, \varepsilon)$ и $V_1 = \theta^{-1}O(x_1, \varepsilon)$.
Найдется открытое в Y множество $V \subset V_0 \cap V_1$ такое, что $y_0 \in V$, и для любого $y \in V$ имеем $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$, то есть $f(y) > a - \varepsilon$. Пусть $y \in V$. Тогда существуют $x_2 \in \varphi(y) \cap O(x_0, \varepsilon)$ и $x_3 \in \theta(y) \cap O(x, \varepsilon)$. По построению $\rho(x_2, x_3) \leq \rho(x_2, x_0) + \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_3) \leq a - \varepsilon < f(y)$.
Значит $x_3 \in \theta(y) \cap O(\varphi(y), f(y)) = \psi(y)$, то есть $V \subset \psi^{-1}U$. Доказательство завершено.

Лемма 1.4. *Пусть заданы непрерывное отображение $\theta : Y \to C(X)$, открытое в Y множество V, непрерывное отображение $\varphi : V \to C(X)$ и неотрицательная непрерывная функция f, определенная на Y, для которой $f^{-1}(0) = Y \setminus V$. Поло-*

жим $\psi(y)=\theta(y)\cup\varphi(y)$, *если* $y\in V$ *и* $\psi(y)=\theta(y)$, *если* $y\in Y\setminus V$. *Если* $\varphi(y)\subset O(\theta(y), f(y))$,*то есть* $\psi(y)\subset O(\theta(y), f(y))$ *для всех* $y\in V$, *то отображение* ψ *непрерывно.*

Доказательство. По лемме 1.2 отображение ψ полунепрерывно снизу. Осталось доказать, что отображение ψ полунепрерывно сверху. Фиксируем $y_0\in Y$ и открытое в X множество $U\supset\psi(y)$.
Нужно доказать, что существует такое открытое в Y множество W, что $y_0\in W\subset\{y\in Y\mid\psi(y)\subset U\}$.

Возможны два случая:

Случай 1. $y_0\in V$. В этом случае $\theta(y_0)\cup\varphi(y_0)\subset U$.
Поэтому множество $W=\{y\in Y\mid\theta(y)\subset U\}\cap y\in V\mid\varphi(y)\subset U\}\subset\{y\in Y\mid\psi(y)\subset U\}$ искомо.

Случай 2. $y_0\in Y\setminus V_0$. В этом случае $\psi(y_0)=\theta(y_0)$ и $f(y_0)=0$.
Найдется такой $\varepsilon>0$, что $O(\theta(y_0), 2\varepsilon)\subset U$.
Фиксируем открытое в Y множество $W_0\in y_0$, где $f(y)<\varepsilon$ для всех $y\in W_0$. Пусть $W_1=\{y\in Y\mid\theta(y)\subset O(\theta(y_0),\varepsilon)\}$. Тогда $y_0\in W=W_0\cap W_1$ и множество W открыто в Y. Если $y\in W$, то $\theta(y)\subset O(\theta(y_0),\varepsilon)$, $\psi(y)\subset O(\theta(y), f(y)\subset O(\theta(y),\varepsilon)\subset O(\theta(y_0), 2\varepsilon)\subset U$. Доказательство завершено.

2. Основные вспомогательные утверждения. Пусть X есть локально выпуклое метризуемое пространство. Тогда в X существует такая метрика ρ, что $\rho(x+z, y+z)=\rho(x; y)=\rho(-x; -y)$, все окрестности вида $O(x,\varepsilon)$ выпуклы, а $\alpha O(x,\varepsilon)\subset O(x,\varepsilon)$ для любого числа α, где $|\alpha|\leq 1$. Поэтому, если множество A выпукло, то и $O(A,\varepsilon)$ выпукло.
Множество точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимо, если $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n=0$ только при условии $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. Мы скажем, что линейная размерность множества H не меньше n и обозначим $dlH\geqq n$, если в H существуют $n+1$ линейно независимых точек.

Рассмотрим отображение $\theta: Y\to A(x)$. Для каждого натурального числа $n\in N=\{0; 1; 2; \ldots\}$ положим $A_n(\theta)=\{y\in Y\mid dl\,\theta(y)\geqq n\}$. Множество $A_0(\theta)\setminus A_1(\theta)$ совпадает с совокупностью всех точек однозначности отображения θ.

Предложение 2.1. *Если отображение* $\theta: Y\to A(x)$ *полунепрерывно снизу, то множества* $\{An(\theta)\mid n\in N\}$ *открыты в* Y. *Если же отображение* θ *полунепрерывно сверху, то множество* $A_1(\theta)$ *является* $\mathscr{F}_\sigma$*-множеством.*

Доказательство. Пусть $y\in A_n(\theta)$ и $n>0$. Фиксируем линейно независимые точки $\{a_0; a_1; \ldots; a_n\}\subset\theta(y)$.
Найдется $\varepsilon>0$ такое, что любое множество $\{b_i\in O(a_i,\varepsilon)\mid i=0; 1; 2; \ldots; n\}$ линейно независимо. Тогда $\cap\{\theta^{-1}O(a_i,\varepsilon)\mid i=0; 1; \ldots; n\}\subset A_n(\theta)$. Первое утверждение доказано.
Положим $U=\cup\{\{y\in Y\mid\theta(y)\subset O(x, 2^{-n})\}\mid x\in X\}$.
Тогда $A_0(\theta)\setminus A_1(\theta)=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. Если θ полунепрерывно сверху, то множества $U_1, U_2,$.. открыты в Y. Доказательство завершено.

Пусть τ бесконечное кардинальное число. Пространство Y называется τ-коллективно нормальным, если для любого дискретного семейства замкнутых подмножеств $\{F_\alpha\mid\alpha\in A\}$, где $|A|\leqq\tau$, существует такое дискретное в Y семейство открытых множеств $\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$, что $F_\alpha\subset U_\alpha$ для всех $\alpha\in A$. Каждое нормальное пространство $\aleph_0$-коллективно нормально.

Семейство $\gamma=\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$ пространства Y σ-дискретно расслоено, если существуют такие дискретные в Y открытые семейства $\{\gamma^n=\{U_\alpha^n\mid\alpha\in A\mid n=1, 2, \ldots\}$ из F_σ-множеств, что $U_\alpha=\cup\{U_\alpha^n\mid n\in N\}=\cup\{[U_\alpha^n]\mid n\in N\}$ для всех $\alpha\in A$.
Если система γ σ-дискретно расслоена, то система γ точечно счетна. В совершенно

нормальном пространстве все счетные системы σ-дискретно расслоены. Если в пространстве X все конечные открытые системы σ-дискретно расслоены, то пространство X совершенно нормально.

Предложение 2.2. *В метрическом пространстве Y каждое открытое точечно счетное семейство σ-дискретно расслоено.*

Доказательство. Пусть $\gamma=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ точечно счетное открытое в Y семейство, а $\{\omega_n=\{V^n_\beta \mid \beta\in B_n\} \mid n\in N\}$ база в Y, где семейства ω_n дискретны. Пусть $\{\alpha\in A \mid [V^n_\beta]\subset U_\alpha\}=\{\alpha(\beta, n, m) \mid m\in N^n_\beta\subset N\}$. Положим $U^{(n,m)}_\alpha=\cup\{V^n_\beta \mid \alpha=\alpha(\beta, n, m)\}$. Тогда $\{\gamma^{(n,m)}=\{U^{(n,m)}_\alpha \mid \alpha\in A \mid n, m\in N\}$ есть искомое σ-дискретное расслоение.

Предложение 2.3. *Пусть $\gamma=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ есть точечно конечное открытое, семейство совершенно нормального τ-коллективно нормального пространства X и $|A|\leqq\tau$. Тогда семейство γ допускает σ-дискретное расслоение.*

Доказательство. Можем считать, что γ есть покрытие пространства X: Положим $A_n=\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in A^n \mid \alpha_i\neq\alpha_j$; при $i\neq j\}$ и $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}\cap\ldots\cup U_{\alpha_n}$.
Семейство $\{U_\beta \mid \beta\in A_n\}$ точечно конечно.
Пусть $M_n=\cup\{U_\beta \mid \beta\in A_n\}$ и $H_n=M_n\setminus M_{n+1}$.
Тогда $A_1=A$ и H_n замкнуто в M_n. Семейство $\{F_\alpha=U_\alpha\cap H_1 \mid \alpha\in A\}$ дискретно и $|A|\leqq\tau$. Поэтому существует открытое дискретное семейство $\gamma^{(1;1;n)}=\{U^{(1;1)}_\alpha \mid \alpha\in A\}$ такое, что $F_\alpha\subset U^{(1;1)}_\alpha\subset[U^{(1;1)}_\alpha]\subset U_\alpha$. Фиксируем $k>1$. Тогда найдутся такие замкнутые в X множества $\{\Phi^n_k \mid n\in N\}$, что $H_k=\cup\{\Phi^n_k \mid n\in N\}$.
Семейство $\{\Phi^n_k\cap U_\beta \mid \beta\in A_k\}$ дискретно и замкнуто в X. Поэтому существует открытое дискретное в X семейство $\{U^{kn}_\beta \mid \beta\in A_k\}$ такое, что $\Phi^n_k\cap U_\beta\subset U^{kn}_\beta]\subset[U^{kn}_\beta]\subset U_\beta$.
Положим $U^{ikn}_\alpha=\cup\{U(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_k) \mid \alpha=\alpha_i\}$ для всех $i\leqq k$, а $\gamma(i, k, n)=\{U^{ikn}_\alpha \mid \alpha\in A\}$.
Тогда $\{\gamma(i, k, n) \mid i\leqq k, k\in N, n\in N\}$ есть искомое σ-дискретное расслоение для γ.

3. σ-дискретно расслоенные отображения.

Определение. *Отображение $\theta: x\to A(Y)$ σ-дискретно расслоено, если для любой открытой в Y системы γ существует вписанная в γ открытая система μ, для которой $\cup\{U\in\mu\}=\cup\{V\in\gamma\}$ и система $\theta^{-1}\mu=\{\theta^{-1}U \mid U\in\mu\}$ σ-дискретно расслоена.*

Лемма 3.1. *Пусть отображение $\theta: x\to A(Y)$ σ-дискретно расслоено. Тогда для любой точки $x\in X$ подмножество $\theta(x)$ наследственно финально компактно.*

Доказательство. Вытекает из того, что σ-дискретные расслоенные системы точечно счетны. Если γ есть открытое покрытие непустого множества $H\subset\theta(x)$, то существует открытое покрытие μ множества H, вписанное в γ, а $\theta^{-1}\mu$ σ-дискретно расслоено. Тогда точка x содержится в счетное число элементов из $\theta^{-1}\mu$. Тогда точечное счетное число элементов из μ пересекает H, то есть в γ можно вписать счетное покрытие множества H.

Лемма 3.2. *Пусть $\theta: X\to C(Y)$ полунепрерывное снизу отображение совершенно нормального τ-коллективно нормального пространства X в совершенно нормальное паракомпактное пространство Y. Пусть Y удовлетворяет одному из условий:*

1. *В Y существует всюду плотное можество мощности $\leqq\tau$.*
2. *Каждое открытое покрытие в Y содержит подпокрытие мощности $\leqq\tau$.*

Тогда отображение θ σ-дискретно расслоено.

Доказательство. Вытекает из предложения 2.3.

Лемма 3.3. *Пусть $\theta: X\to A(Y)$ — полунепрерывное снизу отображение в наследственно паракомпактное пространство Y, в X все точечно счетные системы σ-дискретно расслоены и для каждой точки $x\in X$ подпространство $\theta(x)$*

наследственно финально компактно. Тогда отображения θ *σ-дискретно расслоено.*

Доказательство. Очевидно.

Лемма 3.4. *Пусть* $\theta: Y \to A(X)$ *σ-дискретно расслоенное отображение совершенно нормального пространства* Y. *Если* $\varphi: Y \to A(X)$ *есть полунепрерывное снизу сечение отображения* θ, *то отображение* φ *σ-дискретно расслоено.*

Доказательство. Очевидно.

Рассмотрим локально выпуклое метризуемое пространство X с инвариантной метрикой ρ. Обозначим через $K(X)$ все выпуклые в X непустые множества, $\Pi(X)$ все непустые полные относительно метрики ρ подмножества $CK(X)=C(X)\cap K(X)$, $\Pi K(X)=K(X)\cap\Pi(X)$. Семейство $\Pi(X)$ не зависит от выбора метрики ρ. Если $F\neq\Phi$ $F\in C(X)$, то $[\operatorname{conv} F]\in CK(X)$.

Предложение 3.1. *Пусть задано σ-дискретно расслоенное отображение* $\theta: Y\to\mathcal{F}(X)$ *пространства* Y *в* X. *Тогда:*

1. Существуют метрическое пространство Z, *непрерывное однозначное отображение* $g: Y\to Z$ *и σ-дискретно расслоенное отображение* $\varphi: Z\to\mathcal{F}(x)$ *такое, что* $\theta(y)=\varphi(g(y))$ *для всех* $y\in Y$.

2. *Если или* $\dim Y=0$ *и* $\{\theta(y)\mid y\in Y\}\subset\Pi(X)$ *или* $\{\theta(y)\mid y\in Y\}\subset\Pi K(X)$, *то существует счетное семейство* $\{fn: Y\to X\mid n\in N\}$ *однозначных непрерывных сечений отображения* θ *таких, что* $\theta(y)=[\{f_n(y)\mid y\in Y\}]$ *для всех* $y\in Y$.

Доказательство. Фиксируем $m\in N$. Существует открытое локально конечное покрытие $\gamma_m=\{U^m_\alpha\mid\alpha\in A_m\}$ такое, что система $\theta^{-1}\gamma_m$ σ-дискретно расслоена и $\operatorname{diam} U^m_\alpha<2^{-m}$ для всех $\alpha\in A_m$. Пусть $\{\omega^m_n=\{V^{nm}_\alpha\mid\alpha\in A_m\mid n\in N\}$ σ-дискретное расслоение системы $\theta^{-1}\gamma_m$. Для каждых $n\in N$ и $\alpha\in A_m$ существует непрерывная функция $f_{mn\alpha}: Y\to[0;\ 1]$, такая, что $f^{-1}{}_{mn\alpha}(0)=Y\setminus V^{nm}_\alpha$.
Положим $d(y_1, z)=\Sigma\{2^{-m-n}\mid f_{mn\alpha}(y)-f_{mn\alpha}(z)\mid\alpha\in A_n,\ m\in N\}$.
Тогда $d(y, z)$ — непрерывная на Y псевдометрика. Поэтому существует непрерывное однозначное отображение $g: Y\to Z$ в метрическое пространство такое, что $d(y_1, y_2)=0$ как только $g(y_1)=g(y_2)$. По построению, если $d(y_1, y_2)=0$, то $\theta(y_1)=\theta(y_2)$. Поэтому $\varphi: z\to\mathcal{F}(x)$, где $\varphi(z)=\theta(g^{-1}(z))$ есть искомое многозначное отображение. Первое утверждение доказано.
Сохраняем вышеуказанные обозначения. Фиксируем $\alpha\in A_n$ и $n, m\in N$. Тогда $g^{-1}g(V^{nm}_\alpha)=V^{nm}_\alpha$. Можем считать, что $\dim Y=\dim Z$. Отображение $\varphi_{nm\alpha}: g(V^{nm}_\alpha)\to\Pi(X)$, где $\varphi_{nm\alpha}(Z)=\varphi(Z)\cap U^n_\alpha$, полунепрерывно снизу. Поэтому в силу теорем о сечениях из [12]—[13] существует такое непрерывное сечение $h_{nm}: Z\to X$ отображения φ, что $h_{nm}(z)\in\varphi_{nm\alpha}(z)$ для всех $z\in g(V^{nm}_\alpha)$ и $\alpha\in An$. Положим $f_{nm}(y)=h_{nm}(g(y))$. Сечения $\{f_{nm}\mid n, m\in N\}$ построены.

Предложение 3.2. *Пусть заданы полунепрерывное снизу отображение* $\theta: Y\to\Pi K(X)$ *паракомпактного пространства* Y, *натуральное число* $n>0$ *и открытое* F_σ*-множество* $W\subset A_n(\theta)$.
Тогда существует такое непрерывное отображение $\varphi_w: Y\to CK(X)$, *что* $\varphi_w(y)\subset\theta(y)$ *для всех* $y\in Y$, *а* $dl\varphi_w(y)\geq n$ *для всех* $y\in W$.

Доказательство. По теореме Е. Майкла [12] существует непрерывное отображение $g: Y\to X$, где $g(y)\in\theta(y)$ для всех $y\in Y$. Существует непрерывная на Y функция $0\leq f(y)\leq 1$, для которой $W=f^{-1}(0;\ 1)$. Тогда отображение $\theta_1(y)=\left[\theta(y)\cap O(g(y), \frac{f(y)}{2})\right]$ полунепрерывное снизу и $g(y)=\theta_1(y)$ для всех $y\in Y\setminus W$. Ясно что множество $\theta_1(y)$ выпукло. Кроме того $A_n(\theta_1)=w$. Для каждой точки $y\in W$ по теореме Е. Майкла [12] найдется окрестность Oy и такие непрерывные отображения

$\{\varphi_{iy}:Oy\to X \mid i=0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$, что множество $\{\varphi_{iy}(z)\mid i=0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n\}\subset\theta_1(z)$ линейно независимо для каждой точки $z\in Oy$. Пространство W паракомпактно как F_σ-множество паракомпакта. Поэтому существует открытое локально конечное в W покрытие $\xi=\{W_\alpha\mid\alpha\in A\}$, вписанное в $\{Oy\mid y\in W\}$. Для каждого $\alpha\in A$ фиксируем $y(\alpha)$, для которого $W_\alpha\subset Oy(\alpha)$. Отображение $\varphi_\alpha: W_\alpha\to\Pi K(X)$, где $\varphi_\alpha(z)=[\mathrm{conv}\,\{\varphi_{iy}(\alpha)(z)\mid i=0;\ 1;\ \ldots;\ n\}]$ непрерывно и $dl\,\varphi\alpha(z)=n$ для всех $z\in W_\alpha$ и $\alpha\in A$. Фиксируем в W непрерывное разбиение единицы $\{f_\alpha(y)\mid\alpha\in A\}$, где $f_\alpha^{-1}(0)\subset W\alpha$ и $\Sigma\{f_\alpha(y)\mid\alpha\in A\}=1$ для всех $y\in W_0$. Тогда отображение $\varphi: W\to CK(X)$, где $\varphi(y)=\Sigma\{f_\alpha(y)\cdot\varphi_\alpha(y)\mid\alpha\in A\}$, непрерывно на W. При этом, мы полагаем, что $\varphi_\alpha(y)=0$ и $f_\alpha(y)\cdot\varphi_\alpha(y)=0$, если $y\in W$, чтобы существовало произведение $f_\alpha(y)\cdot\varphi_\alpha(y)$. По построению, $dl\,\varphi(y)=n$ и $\varphi(y)\subset\theta_1(y)\subset O(g(y),\ f(y))$ для всех $y\in W$. Пусть $\varphi(y)=\emptyset$, если $y\in Y\setminus W$. По лемме 1.4 отображение $\psi_w:\to C(X)$, где $\psi_w(y)=g(y)\cup\varphi(y)$, непрерывно. Поэтому отображение $\varphi_w: Y\to CK(X)$, где $\varphi_w(y)=[\mathrm{con}\,v\,\varphi_w(y)]$, искомо. Предложение доказано.

Предложение 3.3. *Пусть заданы полунепрерывные снизу отображения $\theta: Y\to\Pi(X)$ паракомпактного пространства Y, где* $\dim Y=0$, *натуральное число n и открытое F_σ-множество $W\subset An(\theta)$. Тогда существует такое непрерывное отображение $\psi_w: Y\to C(X)$, что $\psi_w(y)\subset\theta(y)$ для всех $y\in Y$, а $dl\,\psi_w(y)\geq n$ и $|\psi_w(y)|\leq n+2$ для всех $y\in W$.*

Доказательство. Проводится также как и доказательство предложения 3.2. При этом, вместо теорем Е. Майкла из [12] нужно использовать теоремы Е. Майкла из [13] или результаты работ [14, 15, 18]. В этом случае фактически фиксируются $g: Y\to X$ и непрерывная функция $f(y)$. Так же строятся Oy и $\{\varphi_{iy}\mid i=0;\ 1;\ 2;\ldots;\ n\}$. Поскольку $\dim W=0$, то покрытие $\xi=\{W\alpha\mid\alpha\in A\}$, дизъюнктно и берется из открыто-замкнутых в Y множеств. В этом случае положим $\psi(z)=\{\varphi_{iy}(\alpha)(Z)\mid i=0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$ для всех $z\in W\alpha$ и $\alpha\in A$, а $\psi w(y)=g(y)\cup\psi(y)$ для всех $y\in Y$. Отображение ψ искомо. Из предложений 3.1 и 3.2 вытекает:

Следствие 3.1. *Пусть заданы $\theta: Y\to\Pi(X)$ σ-дискретно расслоенное отображение и натуральное число n. Пусть, далее, выполняется одно из условий:*
1. $\dim Y=0$;
2. $\{\theta(y)\mid y\in Y\}\subset\Pi K(X)$;

Тогда существует такое непрерывное сечение $\varphi_n: Y\to C(X)$ отображения θ, что $dl\varphi n(y)\geq n$ для всех $y\in A_n(\theta)$.

Теорема 3.1. *Пусть заданы совершенно нормальное паракомпактное пространство Y и полунепрерывное снизу отображение $\theta: Y\to\Pi K(X)$. Тогда существует последовательность непрерывных отображений $\{\psi_n(y)\subset CK(X)\mid n=0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$, для которых:*
1. $\psi_n(y)\subset\psi_{n+1}(y)$ *для всех $y\in Y$ и $n\in N$;*
2. $\cup\{\psi_n(y)\mid n\in N\}\subset\theta(y)$;
3. $A_n(\theta)=A_n(\psi_m)$ *для всех $n\in N$ и $m\geq n$.*

Доказательство. В качестве ψ_0 фиксируем однозначное непрерывное сечение отображения θ. Пусть построено отображение ψ_{n-1}, где $n>0$, Тогда $W=A_n(\theta)$ есть F_σ-множество пространства Y и в силу предложения 3.2 существует непрерывное отображение $\varphi_n: Y\to CK(X)$, где $A_n(\varphi_n)=W$ и $\varphi_n(y)\subset\theta(y)$ для всех $y\in Y$. Положим $\psi_n(y)=[\mathrm{con}\,v(\psi_{n-1}(y)\cup\varphi_n(y))]$.
Тогда отображение ψ_n построено и доказательство завершено.

Рассматривая $\psi_n(y)=\psi_{n-1}(y)\cup\psi_n(y)$ при помощи предложения 3.3 аналитическим образом доказывается:

Теорема 3.2. *Пусть заданы совершенно нормальное паракомпактное пространство Y, где* $\dim Y=0$ *и полунепрерывное снизу отображение $\theta: Y\to\Pi(X)$. Тогда существует последовательность непрерывных отображений $\{\psi n: Y\to C(X)\mid n=0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$, удовлетворяющих условиям 1—3 теоремы 3.1.*

4. Постановка задачи. Необходимые условия. Пусть X есть локально выпуклое, метризуемое линейное пространство.

Определение. *Последовательность* $\{\varphi_n : Y \to C(X) \mid n \in N\}$ *сильно аппроксимирует отображения* $\theta : Y \to \mathscr{F}(X)$, *если:*

1. *Отображения* $\{\varphi n \mid n = 0; 1; 2; \ldots\}$ *непрерывны.*
2. $\varphi_n(y) \subset \varphi_{n+1}(y)$ *для всех* $y \in Y$ и $n \in N$.
3. $[\cup\{\varphi_n(y) \mid_n \in N\}] = \theta(y)$ *для всех* $y \in Y$.
4. $A_n(\theta) = A_n(\varphi_n)$ *для всех* $n \in N$.

Замечание. Если последовательность $\{\varphi_n : Y \to C(X) \mid_{n \in N}\}$ сильно аппроксимирует отображения $\theta : Y \to \Pi K(X)$, то можем считать, что $\{\varphi_n(y) \mid y \in Y,\ n \in N\} \subset CK(X)$. В связи с вышеизложенным определением возникает.

Задача. При каких условиях отображение сильно аппроксимируемо?

Лемма 4.1. *Если последовательность* $\{\varphi_n : Y \to C(X) \mid n \in N\}$ *сильно аппроксимирует отображения* $\theta : Y \to \mathscr{F}(X)$, *то:*

1. *Отображение* θ *полунепрерывно снизу.*
2. *Для каждой точки* $y \in Y$ *подпространство* $\theta(y)$ *сепарабельно.*
3. *Если для точки* $y \in Y$ *множество* $\{\varphi_n(y) \mid n \in N\}$ *выпукло, то и множество* $\theta(y)$ *выпукло.*

Доказательство. Очевидно.

Через R обозначим действительную прямую.

Лемма 4.2. *Если для пространства* Y *каждое полунепрерывное снизу отображение* $\theta : Y \to CK(R)$ *сильно аппроксимируемо, то пространство* Y *совершенно нормально.*

Доказательство. Рассмотрим открытое в Y множество U. Строим отображение $\theta : Y \to CK(R)$, где $\theta(y) = [0; 1]$, если $y \in U$ и $\theta(y) = \{0\}$, если $y \notin U$. Отображение θ полунепрерывно снизу. Пусть последовательность $\{\varphi_n : Y \to C(R) \mid_{n \in N}\}$ сильно аппроксимирует отображение θ. Тогда $\varphi_n^{-1}\left[\frac{1}{n},\ 1\right]$ есть замкнутое в Y множество и $U = \cup\left\{\varphi_n^{-1}\left[\frac{1}{n}, 1\right] \mid n \in N\right\}$. Доказательство завершено.

Лемма 4.3. *Пусть* $\xi = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ *открытая точечно-счетная система множеств пространства* Y. *Тогда существует банахово пространство* B *и полунепрерывное снизу отображение* $\theta_\xi : Y \to \Pi K(B)$, *для которых:*

1. *Множество* $\theta_\xi(y)$ *сепарабельно для всех* $y \in Y$;
2. *Если отображение* θ_ξ *сильно аппроксимируемо, то система* ξ σ*-дискретно расслоенна;*
3. *Вес пространства* B *равен* $|A| + \aleph_0$.

Доказательство. Рассмотрим такое банахово пространство B, в котором содержится такое подмножество $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$, что $\|x_\alpha\| \geq 1$ и $\|x_\beta - x_\alpha\| \geq 1$ для всех α, $\beta \in A$, где $\alpha \neq \beta$ и 0 есть нуль пространства B; а $\|\cdot\|$ — норма в B. Положим $\psi_\xi^{-1} V = \cup\{U_\alpha \mid x_\alpha \in V\}$ и $\theta_\xi(y) = [\mathrm{conv}\ \psi_\xi(y)]$ для всех $y \in Y$.
Если $v \subset B$, то $\psi_\xi^{-1} V = Y$, если $0 \in V$ и $\psi_\xi^{-1} V = \cup\{U_\alpha \mid x_\alpha \in V\}$, если $0 \in V$. Поэтому отображение ψ_ξ полунепрерывно снизу и множества $\psi_\xi(y)$ счетны. Тогда и отображение θ_ξ полунепрерывно снизу и множества $\theta_\xi(y)$ сепарабельны. Пусть последовательность $\{\varphi_n : Y \to C(B) \mid n \in N\}$ сильно аппроксимирует отображение θ_ξ. Положим $V_\alpha = \left\{x \in B \mid \|x - x_\alpha\| < \frac{1}{3}\right\}$.
Система $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ дискретна в B. По построению $\theta_\xi^{-1} V_\alpha = U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Поэтому $\xi_n = \{U_\alpha^n = \varphi_n^{-1} V\alpha \mid \alpha \in A\}$ локально конечная система F_σ-множеств пространства Y и $U_\alpha = \cup\{U_\alpha^n \mid n \in N\}$. Теперь нетрудно построить и σ-дискретное расслоение системы

5. Построение сильных аппроксимаций.

Теорема 5.1. *Пусть $\theta : Y \to \Pi(X)$ полунепрерывное снизу отображение метризуемого пространства Y в метризуемое локально выпуклое линейное пространство X и выполняются условия:*
1. *Множества $\theta(y)$ сепарабельны для всех $y \in Y$.*
2. *Или $\dim Y = 0$ или $\{\theta(y) \mid y \in Y\} \subseteq \Pi K(X)$.*

Тогда для θ существует сильная аппроксимация.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 и 3.2 существует последовательность непрерывных отображений $\{\psi_n : Y \to C(X) \mid n \in N\}$ такая, что $A_n(\theta) = A_n(\psi_n)$ и $\psi_n(y) \subset \psi_{n+1}(y) \subset \theta(y)$ для всех $n \in N$ и $y \in Y$. Согласно предложения 3.1 существует последовательность $\{f_n : Y \to X \mid n \in N\}$ однозначных сечений отображения θ, для которых $[\{f_n(y) \mid n \in N\}] = \theta(y)$ для всех $y \in Y$.
Положим $\varphi_n(y) = \psi_n(y) \cup \{f_n(y)\}$. Тогда последовательность $\{\varphi_n : X \to C(Y) \mid n \in N\}$ сильно аппроксимирует отображения θ.

Следствие 5.1. *Пусть относительно полунепрерывного снизу отображения $\theta : Y \to \Pi(X)$ пространства Y в метризуемое локально выпуклое пространство X веса τ выполняется одно из условий:*
1. *$\dim Y = 0$ и отображения σ-дискретно расслоено.*
2. *$\{\theta(y) \mid y \in Y\} \in \Pi K(x)$ и отображения σ-дискретно.*
3. *Множества $\{\theta(y) \mid y \in Y\}$ сепарабельны, $\dim X = 0$ и каждое открытое точечно счетное семейство пространства Y мощности $\leq \tau$ σ-дискретно расслоено.*
4. *Множества $\{\theta(y) \mid y \in Y\}$ сепарабельны и выпуклы и каждое открытое точечно счетное семейство пространства Y мощности $\leq \tau$ σ-дискретно расслоено.*

Тогда отображение θ сильно аппроксимируемо.
Если X-метризуемо локально выпуклое линейное пространство, то $S(X)$ состоит из всех сепарабельных подмножеств пространства X, $\Pi S(X) = \Pi(X) \cap S(X)$, $\Pi KS(X) = \Pi K(X) \cap S(X)$.

Теорема 5.2. *Для пространства X и бесконечного кардинального числа τ следующие условия равносильны:*

1. *Каждое точечно счетное открытое покрытие пространства Y мощности $\leq \tau$ σ-дискретно расслоено.*

2. *Каждое полунепрерывное снизу отображение $\theta : Y \to \Pi KS(X)$ в локально выпуклое метризуемое линейное пространство X веса $\leq \tau$ сильно аппроксимируемо.*

Доказательство. Импликация $1 \to 2$ вытекает из следствия 5.1. Импликация $2 \to 1$ вытекает из леммы 4.3.
Аналогично доказывается,

Теорема 5.3. *Для пространства Y и бесконечного кардинального числа τ следующие утверждения равносильны:*

1. *$\dim Y = 0$ и каждое точечно счетное открытое покрытие пространства Y мощности $\leq \tau$ σ-дискретно расслоено.*

2. *Каждое полунепрерывное снизу отображение $\theta : Y \to \Pi S(X)$ в локально выпуклое метризуемое пространство X веса $\leq \tau$ сильно аппроксимируемо.*

Следствие 5.2. *Для пространства Y следующие утверждения равносильны:*

1. *Пространство Y совершенно нормально.*

2. *Каждое полунепрерывное снизу отображение $\theta : Y \to \Pi K(X)$ в сепарабельное метризуемое линейное пространство X сильно аппроксимируемо.*

Следствие 5.3. *Для пространства Y следующие утверждения равносильны:*

1. *$\dim Y = 0$ и пространство Y совершенно нормально.*

2. *Каждое полунепрерывное снизу отображение $\theta : Y \to \Pi(X)$ в сепарабельное*

локально выпуклое метрическое линейное пространство X сильно аппроксимируемо.

Следствие 5.4. *Пусть $\theta: Y \to C(X)$ — полунепрерывны снизу отображения совершенно нормального τ-коллективно нормального пространства Y в локально выпуклое метризуемое пространство X веса τ. Пусть далее, или* $\dim Y = 0$ *или* $\{\theta(y) \mid y \in Y\} \subset K(X)$. *Тогда отображение θ сильно аппроксимируемо.*

Замечение: Существует совершенно нормальное паракомпактное метризуемое пространство Y с точечно счетной базой.
Если B-точечно счетная база пространства Y, то согласно леммы 4.3 существует полунепрерывное снизу отображение $A: Y \to \Pi KS(B)$ и банахово пространство B, которое не сильно аппроксимируемо.

6. Комментарий к полунепрерывным функциям. Функция $f: X \to R$ полунепрерывна сверху* (снизу), если для каждого $x \in R$ множество $f^{-1}(-\infty, x)$ (соответственно, $f^{-1}(x; +\infty)$ открыто. Эти понятия двойственны **).

Рассмотрим функцию $f: X \to R$. Строим многозначные отображения $f_+, f_-: X \to \Pi K(R)$, где $f_+(x) = (f(x); +\infty)$ и $f_-(x) = (-\infty, x)$. Тогда $f_+^{-1}(a; b) = f^{-1}(-\infty, b)$ и $f_-^{-1}(a, b) = f^{-1}(a; +\infty)$, где $a < b$. Поэтому отображение f — (соответственно f^+) полунепрерывны снизу тогда и только тогда, когда функция f полунепрерывна снизу (соответственно сверху).

Пусть функция f полунепрерывна снизу и пространство X совершенно нормально. Тогда для отображения f-существует сильная аппроксимация $\{\varphi_n: X \to CK(R) \mid n \in N\}$. Итак, $\varphi_n(x) \subset (f(x); +\infty)$. Функция $f_n: X \to R$, где $f_n(x) = \inf \varphi_n(x)$ непрерывна, поскольку отображение φ_n непрерывно. По построению $\lim f_n = f$ и $f(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ для всех $n \in N$ и $x \in X$. Если функция f полунепрерывна сверху, то таким образом строится монотонно возрастающая последовательность непрерывных функций, сходящихся к f. Пусть теперь функция f полунепрерывна снизу, функция g полунепрерывна сверху и $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in X$. Рассмотрим отображения $\psi: X \to CK(R)$, где $\psi(x) = [g(x), f(x)]$. Если $a < b$, то $\psi^{-1}(a, b) = f^{-1}(a; +\infty) \cap g^{-1}(-\infty, b)$. Поэтому отображение ψ полунепрерывно снизу. Для отображения φ существует однозначное непрерывное сечение $h: X \to R$. Тогда $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$. Итак, теорема Бора есть следствие теоремы о сечениях, а вопрос об аппроксимации полунепрерывных функций монотонными последовательностями непрерывных функций аналогичен задаче о сильной аппроксимации отображений.

Пример 6.1. Пусть Z есть нормальное пространство, в котором существует замкнутое на σ-множество F. Рассмотрим функцию $f: Z \to R$ и отображение $\theta: Z \to CK(R)$, где $f(z) = 0$ и $\theta(z) = \{0\}$, если $z \in F$ и $f(z) = 1$ и $\theta(z) = [0; 1]$, если $z \in Z \setminus F$. Функция f и отображение θ полунепрерывны снизу. Если $f = \lim\limits_{n\to\infty} fn$, где функции непрерывны, и $f_n(x) \leq f(x)$ для всех $x \in z$, то $F = \cap \left\{ f_n^{-1}\left(-\infty; \frac{1}{m}\right) \middle| n \in N,\ m \in N \right\}$ есть σ_δ-множество. Итак, f не аппроксимируется монотонно возрастающей последовательностью непрерывных функций.

Из леммы 4.2 вытекает, что для θ не верна теорема 5.2.

В случае функций полунепрерывности снизу и сверху являются двойственными понятиями. В случае же многозначных отображений эти понятия не двойственны. Поэтому утверждения о полунепрерывных снизу отображениях не дают информацию о строении полунепрерывных сверху отображений и наоборот.

Аналог теоремы Бора для полунепрерывных сверху отображений доказывается более сложными методами. Некоторые результаты в этом направлении получены в [4]—[7].

---

* — Функция всегда предполагается однозначным отображением

** — Понятия полунепрерывных снизу и сверху отображений не двойственны.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Асеев. Приближение полунепрерывных многозначных отображений непревывными. *Изв. АН СССР. Сер. Математика.* **46**, 1982, № 3, 460—476.
2. R. Baire. Sur les series à termes continus et tous de meme signe. *Bull. Soc. Math. de France.*, **32**, 1984, 125—128.
3. S. C. Zaremba. Sur les equations . . . — *Bull. Sci. Math.* (2), **60**, 1936, 139—160.
4. Д. М. Ипате, М. М. Чобан. О топологии равномерной сходимости на пространствах отображений. *Известия АН СССР*, **3**, 1977, 20—25.
5. М. М. Чобан, Д. М. Ипате. Об аппроксимации многозначных отображений и их приложения к теории игр. I. *Известия АН МССР*, 1980, № 3, 25—29.
6. М. М. Чобан, Д. М. Ипате. Об аппроксимации многозначных отображений и их приложения к теории игр. II. *Известия АН МССР*, 1981, № 1, 33—39.
7. М. М. Чобан, Д. М. Ипате О сходимости пространств с отношениями и теоретико-игровых следствиях. В сб. Общая алгебра и дискретная геометрия. Кишинев, 1980, 135—144.
8. E. Michael. Dense families of continuous selections. *Fund. Math.*, **47**, 1959, No 173—178.
9. А. Д. Йоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М., 1974.
10. E. Michael. Point-finite and locally finite coverings. *Canadian J. Math.*, **7**, 1953, 275—276.
11. М. М. Чобан. О σ-паракомпактных пространствах. *Вестник Московского университета*, 1969, № 1, 20—27.
12. E. Michael. Continuous selections. I *Annals of Math.*, **63**, 1956, No 2, 361—382.
13. E. Michael. Selected selection theorems. *Amer. Math. Monthly*, **63**, 1956, 233—238.
14. М. М. Чобан. Многозначные отображения и борелевские множества. II. *Труды Моск. мат. общества*, **23**, 1970, 277—301.
15. М. М. Чобан. Общие теоремы о сечениях и их приложения. *Сердика*, **4**, 1973, 74—90.
16. М. М. Чобан, В. Въялов. Об одной теореме Э. Майкла о сечениях. *Докл. Болг. Акад. наук*, **28**, 1975, 871—873.
17. С. Й. Недев, М. М. Чобан. Факторизационные теоремы для многозначных отображений, многозначные сечения и топологическая размерность. *Matematica Balkanika*, 82, 1974 № 4, 457—460.
18. S. I. Nĕdev. Selection and factorization theorems for set-valued mappings. *Serdica*, **6**, 1980, 291—317.
19. К. Куратовский. Топология I. М., 1966.

Тирасполь, 278000 Молдавская ССР
ул. Одесская 90, кв. 50

Поступила 16. 11. 1990