Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СЕРДИКА – Българско
математическо списание
17 (1991) 220-227

О ТОЧНОСТИ *RC*–КОМПЛЕКСОВ *RC*–СТРУКТУР

Л. Н. АПОСТОЛОВА

ABSTRACT. The systems of complex vector fields $L_1, \ldots, L_n$ on a N-dimensional real manifolds M, s.t. the system of equations $L_1 u = 0, \ldots, L_n u = 0$ possess locally independent solutions $Z^1, \ldots, Z^{N-n}$, has their non-coordinate analogue. These are the subbundles V of the complexified tangent bundle $\mathbb{C}TM$, whose annihilating bundle $V^{\perp}$ is the complexified cotangent bundle is generated locally by exact differential forms. The known problem for local solvability of the system $L_1 u = f_1, \ldots, L_n u = f_n$ for some suitable right hand side generalizes in the problem for exactness of the so called RC-complexes, namely, exactness in the terms $(0, q)$ where $q > \dim V - \dim V \cap \bar{V}$, as well as necessary and sufficient condition for exactness of some RC-complex in the case $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = 1$ are obtained in this paper.

1. Введение. Пример Х. Леви дифференциального уравнения первого порядка в частных производных с переменными комплексными коэффициентами, которое не имеет решения был опубликован в 1957 году в [1]. Необходимые и достаточные условия для существования решений таких уравнений обнаружены Л. Хермандером [3], Л. Ниренбергом и Ф. Тревом [2] и др. См. также §6.1 в книге [4]. Этот вопрос обобщается в вопросе о разрешимости систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными комплексными коэффициентами, а для бескоординатной формой исследования – это вопрос о точности в $(0,1)$-формах некоторых RC-комплексов так называемых RC-структур. RC-структуры (от сокращения Real/Complex) данного гладкого действительного многообразия M с размерностью N называются подрасслоения V комплексифицированного касательного расслоения $\mathbb{C}TM$, для которых аннигилирующее относительно естественной дуальности подрасслоение $V^{\perp}$ в комплексифицированном кокасательном расслоении $\mathbb{C}T^{*}M$ порождается точными одноформами. В локальной координатной карты $(u; x^1, \ldots, x^N)$, над которой расслоение V локально тривиально, оно порождается своей базой векторных полей $(L_1, \ldots, L_n)$. При этом система векторных полей $L_1, \ldots, L_n$ должна быть локально интегрируемой. Это означает, что для любой точки области определения векторных полей существует окрестность u и функции $z^1, \ldots, z^{N-n}$ на ней с линейно независимыми дифференциалами, которые являются решениями системы однородных дифференциальных уравнений $L_1 u = 0, \ldots, L_n u = 0$. Локальная интегрируемость этой системы эквивалентна условию, что аннигилирующее в комплексифицированном кокасательном расслоении $\mathbb{C}T^{*}M$ подрасслоение $V^{\perp}$ данного расслоения V порождается локально базой точных одноформ $dz^1, \ldots, dz^{N-n}$.

Частным случаем RC-структуры – это рассматриваемые в комплексном анализе CR-структуры. CR-структура V –это такая RC-структура, для которой $V \cap \bar{V} =$

(0), где $\bar{V}$ есть комплексно сопряженное расслоение к расслоению V, а (0) есть нулевое расслоение на многообразии M. Для CR-структур рассматриваются касательные комплексы Коши–Римана. Они связаны с решением так называемой $\bar{\partial}$-проблемы. В работе[5] А. Андреотти, Г. Фредерикс и М. Начинович доказали, что касательный комплекс Коши–Римана данной CR-структуры точен во всех членах, за исключением членов с номерами p и q, где p – число положительных, а q – число отрицательных собственных значений формы Леви этой CR-структуры.

Аналогично касательному комплексу Коши–Римана, для RC-структур вводятся так называемые RC-комплексы. В этой работе рассматриваются условия о точности RC-комплексов в разных членах. Отметим, что условие о точности в $(0,1)$-формах этих комплексов эквивалентна условию о локальной разрешимости системы уравнений $L_1 u = f_1, \dots, L_n u = f_n$ для любой базы векторных полей $L_1, \dots, L_n$ данной RC-структуры V при любой согласованной правой части $f_1, \dots, f_n$. При этом также стоит вопрос о гладкости данных объектов и получаемых решений. Это отражается на гладкость (p,q)-форм, рассматриваемых в RC-комплексах.

В работе доказано, что RC-комплексы любой одинаковой гладкостью точны в членах $(0,q)$, где $q > \dim V - \dim V \cap \bar{V}$. Для случая $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = 1$ доказано, что соответствующий RC-комплекс точен во всех членах тогда и только тогда, когда форма Леви является нулевой. В остальных случаях, форма Леви имеет ровно одно ненулевое собственное значение для некоторых элементов характеристического расслоения и RC-комплекс точен во всех членах за исключением $(0,1)$-форм.

Некоторые сведения о RC-структурах и RC-комплексах можно найти в [6,7,8].

Пользуюсь случаем поблагодарить С. Г. Димиева за постоянное внимание к моей работе.

2. RC-комплексы RC-структур. Пусть M – бесконечно гладкое действительное многообразие размерности $N = n + m$, где N и n натуральные числа, а m – целое, неотрицательное число. Обозначим через TM его касательное расслоение, через T^*M – дуальное ему кокасательное расслоение, а через $\mathbb{C}TM$ и $\mathbb{C}T^*M$ – их комплексификации.

Пусть V - гладкая RC-структура на многообразии M, т.е. V – гладкое подрасслоение комплексифицированного касательного расслоения $\mathbb{C}TM$ такое, что аннигилирующее подрасслоение $V^\perp$ в комплексифицированном касательном расслоении $\mathbb{C}T^*M$ порождается локальной базой точных одноформ. Будем предполагать, что слои множества $V + \bar{V}$, где $\bar{V}$ – комплексно сопряженное расслоение к расслоению V, как и слои его инволютивного пополнения имеют постоянную размерность. Размерность слоя расслоения V будем обозначать через n, размерность слоя расслоения $V + \bar{V}$ обозначим через $n + r$, а размерность слоя его инволютивного пополнения относительно коммутаторов векторных полей – через k. Тогда согласно работе [8] для любой точки многообразия M существует координатная окрестность

$$(u; x^1, \dots, x^r, s^1, \dots, s^{k-n-r}, t^1, \dots, t^{m+n-k}; y^1, \dots, y^n), \tag{1}$$

такая, что расслоение V порождается над u векторными полями

$$\left|\begin{array}{ll} L_\mu = -2i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\mu} + \sum_{\sigma=1}^{k-n-r} c_{\mu\sigma}(z,s,t)\frac{\partial}{\partial s^\sigma} & \mu = 1, \dots, r \\ L_\mu = \frac{\partial}{\partial y_\mu} & \mu = r+1, \dots, n \end{array}\right. \tag{2}$$

где как обычно $\dfrac{\partial}{\partial \bar z \mu} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x \mu} + i\dfrac{\partial}{\partial y \mu}\Big)$, $\mu = 1, \dots, r$. Эти векторные поля коммутируют между собой и для них выполнено $L_\mu y^\nu = \delta^n_\mu u$ ($\delta^n_\mu u$ – символ Кронекера). Отметим, что благодаря этому, дифференциалы $dy^1, \dots, dy^n$ порождают дополнительное расслоение к расслоению $V^\perp$ в комплексифицированном кокасательном расслоении $\mathbb{C}T^*U$.

RC-комплексы строятся следующим образом (см. [6,7]). Пусть $\Lambda\mathbb{C}TM$ – внешняя алгебра комплекснозначных форм на многообразии M. В пространстве $\Lambda^{p+q}\mathbb{C}TM$ внешних $p+q$-форм рассматривается подпространство $\tilde\Lambda^{p,q}$, порожденное формами вида $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q$, где, $\alpha_1, \dots \alpha_p$ – сечения векторного расслоения $V^\perp$. Фактор–пространство $\tilde\Lambda^{p,q}/\tilde\Lambda^{p+1,q-1}$, которое корректно определено, называется пространством (p,q)-форм, ассоциированном с данной RC-структурой V и обозначается через $\Lambda^{p,q}$. Если профакторизируем внешний дифференциал, действующий на подпространстве $\tilde\Lambda^{p,q}$, то получаем связывающее дифференциальное отображение $d'_{p,q}$, действующее на пространстве (p,q)-форм $\lambda^{p,q}$ и принимающее значения в $\Lambda^{p,q+1}$. Рассматриваемая последовательность пучков сечений пространств (p,q)-форм $\Gamma(\Lambda^{p,q})$ получаем RC-комплексы разной гладкости.

Определение. *Последовательность пучков сечений (бесконечно гладких, аналитических или распределений), вместо со связывающими гомоморфизмами*

$$\Gamma(\Lambda^{p,0}) \xrightarrow{d'_{p,0}} \Gamma(\Lambda^{p,1}) \xrightarrow{d'_{p,1}} \dots \xrightarrow{d'_{p,n-p}} \Gamma(\Lambda^{p,n-p}) \xrightarrow{d'_{p,n-p}} 0 \tag{3}$$

образуют RC-комплексы данной RC-структуры, $p = 1, \dots, m$.

Приведем одно координатное представление (p,q)-форм и связывающих гомоморфизмов $d'_{p,q}$ в координатной системе …1. Пусть $z^1, \dots, z^m$ – функции с независимыми дифференциалами, для которых дифференциалы $dz^1, \dots, dz^m$ порождают аннигилирующее расслоение $V^\perp$ для данной RC-структуры. Как уже было отмечено, $dy^1, \dots, dy^n$ порождают дополнительное к нему расслоение и $L_\mu y^\nu = \delta^\nu_\mu$. Тогда (p,q)-формы, ассоциированные с данной RC-структурой V представляются следующими формами

$$f = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} f_{IJ} dz^I \wedge dy^J,$$

где $I = (i_1, \dots, i_p,\ 1 \le i_1 < \dots < i_p \le m$ и $J = (j_1, \dots, j_q,\ 1 \le j_1 < \dots < j_q \le n$ – мультииндексы, а $dz^I = dz^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_p}$ и $dy^J = dy^{j_1} \wedge \dots \wedge y^{j_q}$ – внешние формы. Связывающие дифференциальные отображения $d'_{p,q}$ будут иметь вид

$$d'_{p,q} f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} L_j(f_{IJ}) dy^j \wedge dz^I \wedge dy^J.$$

3. Точность RC-комплексов в членах $(0,q)$, где $q > \dim V - \dim V \cap \bar V$. RC-комплексы, которые будем рассматривать в этом пункте будут комплексы (3) сечений одинаковой гладкости – бесконечно гладкие, сечений–распределетий или аналитические, предполагая в последнем случае, что многообразие M и RC-структура V являются аналитическими.

Теорема. *Пусть V – RC-структура на многообразии M. Тогда ее RC-комплекс (3) точен во всех членах $(0,q)$, где $q > \dim V - \dim V \cap \bar{V}$, а $\bar{V}$-комплексно сопряженное расслоение к расслоению V.*

Доказательство. Доказательство будет вестись индуктивно по целому числу $r = \dim V - \dim V \cap \bar{V}$. Отметим, что это число неотрицательное.

Пусть $r = 0$. Тогда $V = V \cap \bar{V} = V + \bar{V}$ и существует такое подрасслоение V' касательного расслоения TM, что $V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V'$. Из локальной интегрируемости расслоения V вытекает формальная интегруемость расслоений V и V', т.е. замкнутость этих расслоений относительно коммутатора их сечений. Тогда из теоремы Фробениуса вытекает, что расслоение V' также локально интегруемо. Его RC-комплекс совпадает с комплексом де Рама относительно переменных $y^1, \ldots, y^n$ с параметрами – остальные, переменные локальной карты (1). Этот комплекс точен во всех членах $(0,q)$, где $q > 0$ и это доказывает утверждение теоремы в случое $r = 0$.

Допустим, что утверждение теоремы верно для всех RC-структур, для которых $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = r+1$, т.е. соответствующие RC-комплексы в этих случаях точны в членах $(0,q)$, где $q > \dim V - \dim V \cap \bar{V}$.

Пусть тепер, V – RC-структура на многообразии M, для которой $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = r+1$. Выбираем для фиксированной точки многообразия M окрестность вида (1) и порождающие векторные поля вида (2). Далее рассмотрим расслоение V_0 на множестве U, порожденном векторными полями $L_2, \ldots, L_n$. Функции $z^1, \ldots, z^m, y^1$ являются решениями системы уравнений $L_2 u = 0, \ldots, L_n u = 0$ и следовательно их дифференциалы порождают аннигилирующее расслоение V_0 расслоению. Это показывает, что V_0 является RC-структурой. Для нее выполнено равенство $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = r$ индуктивное предположение выполнено, т.е. соответствующий RC-комплекс точен в членах $(0,q)$, где $q > \dim V - \dim V \cap \bar{V}$. Для этого комплекса $(0,q)$-формы имеют вид

$$f = \sum_{|J|=q} f_J \, dyJ, \qquad 2 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$$

а связывающее дифференциальное отображение ${}_0d'_{0,q}$ действует по формуле

$${}_0d'_{0,q} f = \sum_{j=2}^{n} \sum_{|J|=q} L_j(f_J) dy^j \wedge dy^J .$$

Пусть теперь $f = \sum\limits_{|J|=q} f_J \, dy^J$ является замкнутой дифференциальной $(0,q)$-формой для RC-структуры V такой, что $q > \dim V - \dim V \cap \bar{V}$. Это означает, что

$$d'_{(0,q)} f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|J|=q} L_j(f_J) dy^j \wedge dy^J = 0. \tag{4}$$

Выделяя все слагаемые, в которых участвует как множитель одноформа dy^1, разлагаем форму f на две слагаемые: $f = f^0 + dy^1 \wedge f^1$, где f^0 есть $(0,q)$-форма, а f^1

– $(0, q-1)$-форма, в которой не участвует дифференциал dy^1. Тогда условие (4) о замкнутости формы f можно записать

$$\sum_{|J|=q} L_1(f_J^0)dy^1 \wedge dy^J - dy^1 \wedge \sum_{j=2}^{n} \sum_{2\le j_2<\dots<j_q\le n} L_j(f_{J'}^1)dy^j \wedge dy^{J'} = 0 \tag{5}$$

и

$$\sum_{j=2}^{n} \sum_{|J|=q} L_j(f_J^0)dy^j \wedge dy^J = 0. \tag{6}$$

Условие (6) означает, что $(0, q)$-форма f^0 является замкнутой относительно дифференциального отображения ${}_0d'_{0,q-1}$ структуры V_0. Кроме того $q > \dim V_0 - \dim V_0 \cap \bar{V}_0$ и согласно индуктивному предположению она должна быть точной, т.е. существует $(0, q-1)$-форма g^0 RC-структуры V_0 такая, что

$$ {}_0d'_{0,q-1}g^0 = f^0. \tag{7}$$

Дальше рассмотрим дифференциальную форму f^1 структуры V_0 и вычислим ее дифференциал ${}_0d'_{0,q-1}f^1$:

$$ {}_0d'_{0,q-1}f^1 = \sum_{j=2}^{n} \sum_{2\le j_2<\dots<j_q\le n} L_j(f_{J'}^1)dy^j \wedge dy^{J'}$$

$$= \sum_{|J|=q} L_1(f_J^0)dy^J = L_1(f^)) = L_1({}_0d'_{0,q-1}g^0) = {}_0d'_{0,q-1}L_1g^0;$$

и так получаем

$$ {}_0d'_{0,q-1}(f^1 - L_1g^0) = 0. \tag{8}$$

В написанной выше последовательности равенств, второе следует из равенства (5), первое и третье из определений, четвертое из равенства (7), а последнее из за коммутирования векторных полей $L_1, \dots, L_n$. Таким образом мы получили, что дифференциальная форма $f^1 - L_1g^0$ есть замкнутая форма для RC-структуры V_0. По индуктивному предположению она должна быть точной, т.е. существует такая $(0, q-2)$-форма g^1 для RC-структуры V_0, что $f^1 - L_1g^0 = {}_0d'_{0,q-2}g^1$.

Наконец покажем, что форма f равна $d'_{0,q-1}g$, где $g = g^0 + dy^1 \wedge g^1$. Действительно, выполнены следующие равенства

$$f = f^0 + dy^1 \wedge f^1 = {}_0d'_{0,q-1}g^0 + dy^1 \wedge ({}_0d'_{0,q-2}g^1 + L_1g^0) = d'_{0,q-1}(g^0 + dy^1 \wedge g^1) = d_{0,q-1}g$$

так как ${}_0d'_{0,q-1}g^0 + dy^1 \wedge L_1g^0 = d'_{0,q-1}g^0$ и $dy^1 \wedge {}_0d'_{0,q-2}g^1 = d'_{0,q-1}(dy^1 \wedge g^1)$

Этим точность формы f и теорема доказаны.

4. Случай RC-структур, для которых $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = 1$. Отметим сначала как вводится форма Леви для RC-структур [7]. Если V является RC-структурой, для которой размерность слоя множества $V + \bar{V}$, как и его инволютивное пополнение – постоянны, то пересечение $T^0 = V^\perp \cap T^*M$ имеет постоянную размерность слоя и называется характеристическим расслоением для V. Для любого элемента

(x,θ) характеристического расслоения T^0, $x \in M$, $\theta \in T^0_x$ вводится эрмитовая форма $\mathcal{L}_{x,\theta}\langle v_1, v_2\rangle := \frac{1}{2i}(\theta[\bar{L}_2, L_1])_x$, где $x \in M$, $\Theta \in T^0_x$, L_2, L_2 – векторные поля окрестности точки x, для которых $L_1(x) = v_1$, $L_2(x) = v_2$, $[\cdot,\cdot]$ – коммутатор векторных полей, $(\cdot,\cdot)_x$ –сдвоение между комплексифицированными кокасательном и касательном векторными расслоениями. Форма Леви $\mathcal{L}_{x,\theta}$ является нулевой тогда и только тогда, когда расслоение $V + \bar{V}$ – формально интегрируемо, т.е. коммутатор любых двух его сечений является тоже сечением этого расслоения. Отметим также, что если $v_1, v_2 \in V_x \cap \bar{V}_x$, то $\mathcal{L}_{x,\theta}\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Таким образом ранг формы $\mathcal{L}_{x,\theta}$ не превосходит число $r = \dim V - \dim V \cap \bar{V}$. В случае $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = 1$ ранг формы $\mathcal{L}_{x,\theta}$ не превосходит 1, т.е. либо для некоторого $x, \theta \in T^0$ она имеет ровно одно ненулевое собственное значение.

Пусть теперь $r = \dim V - \dim V \cap \bar{V} = 1$. Тогда согласно отмеченному в пункте 2. существует координатная окрестность вида ...1. такая, что расслоение V порождается векторными полями

$$
\left|
\begin{aligned}
&L_1 = -2i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \sum_{\sigma=1}^{k-n-1} c_\sigma(z^1, s^1, \ldots, s^{k-n-1}, t^1, \ldots, t^{N-k})\frac{\partial}{\partial s^\sigma}\\
&L_2 = \frac{\partial}{\partial y^2}\\
&\ldots\\
&L_n = \frac{\partial}{\partial y^n}
\end{aligned}
\right. \tag{9}
$$

Перенесем следующий результат Л. Хёрмандера (гл.6,гл.8 книги [4], см. также [2]) для системы указанного вида.

Теорема. (Хёрмандер) *Пусть L комплексное, бесконечно гладкое векторное поле на M, для которого $L(x) \neq 0$. Тогдо для любой бесконечно гладкой функции f, определенной в некоторой окрестности точки x, уравнение $L(u) = f$ имеет решение – распределение в некоторой окрестности U тогда и только тогда, когда существует окрестность точки x, в которой векторное поле $[L, \bar{L}]$ является линейной комбинацией векторных полей L и $\bar{L}$.*

Теорема. *Пусть V – бесконечно гладкая или аналитическая RC-структура на действительном гладком или аналитическом многообразии M, для которой $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = 1$. Тогда комплекс пучком бесконечно гладких или соответствено аналитических сечений и связывающих гомоморфизмов*

$$
\Gamma(\Lambda^{0,0}) \xrightarrow{d'_{0,0}} \Gamma(\Lambda^{0,1}) \xrightarrow{d'_{0,1}} \ldots \xrightarrow{d'_{0,n-1}} \Gamma(\Lambda^{0,n}) \xrightarrow{d'_{0,n}} 0 \tag{10}
$$

точна во всех членах тогда и только тогда, когда форма Леви $\mathcal{L}_{(x,\theta)}$ структуры нулевая для любого $(x,\theta) \in T^0$.

Доказательство. Как уже отметили выше, в рассматриваемом случае $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = 1$ форма Леви либо нулевая, и это условие эквивалентно формальной интегруемости расслоения $V + \bar{V}$, либо ненулевая и имеет ровно одно ненулевое собственное значение для некоторых элементов характеристического расслоения T^0.

В первом случае, согласно результату работы [9] комплекс (10) точен в члене $\Gamma(\Lambda^{0,1})$, т.е. система уравнений

$$L_1 u = f_1, \ldots, L_n u = f_n \tag{11}$$

локально имеет гладкое или соответствено аналитическое решение для любой правой части $f_1, \ldots, f_n$ сответственной гладкости, удовлетворяющее соотношения

$$L_i f_j = l_j f_i = \sum_{s=1}^{n} c_{ij}^s f_s, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где $L_1, \ldots, L_n$ – векторные поля, образующие базы расслоения V и удовлетворяющие соотношения $[L_i, L_j] = \sum_{s-1}^{n} c_{ij}^s L_j$.

Наоборот, если комплекс (10) точен в члене, т.е. если локально существует гладкое или аналитическое решение системы (11), то это будет верно и для системы с векторными полями выбранными как и (9). В этом случае уравнение

$$L_1 u = f_1(z^1; s^1, \ldots, s^{k-n-1}; t^1, \ldots, t^{N-k}) \tag{13}$$

локально имеет гладкое или аналитическое решение для любой провой части f_1 соответствующей гладкости, зависящей от указанных переменных. Тогда согласно теоремы Л. Хёрмандера, векторное поле $[L_1, \bar{L}_1]$ будет суммой векторных полей L_1 и $\bar{L}_1$ со соотствующими коэффициентами. Остальные коммутаторы векторных полей $L_1, \ldots, L_n, \bar{L}_1$ из (9) ненулевые, т.е. в этом случае $V + \bar{V}$ – формально интегруемое расслоение.

Таким образом, формальная интегрируемость расслоения $V + \bar{V}$, т.е. ненулевость формы Леви для любых $(x, \theta) \in T^0$, необходимое и достаточное условие для точности комплекса (10) в члене $\Gamma(\Lambda^{0,1})$ при условии $\dim V - \dim V \cap \bar{V} = 1$. Согласно пункту 3., точность в остальных членах комплекса (10) при этом условии всегда выполнена.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Lewy. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Ann. of Math.* **66** (1957) 155–158.

[2] L. L. Nirenberg, F. Treves. Solvability of first order linear partial differential equation. *Comm. on Pure and Appl. Math.* **16** (1963) 331–351.

[3] L. Hormander. Differential equations without solutions. *Math. Ann.* **140** (1960) 169–173.

[4] L. Hormander. Linear Partial Differential Operators. Berlin, 1963.

[5] A. Andreotti, G. Fredrics, M. Nacinovich. On the absence of Poincare lemma in tangential Cauchy–Riemann complexes. *Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa,* Ser. IV, **8** (1981) 365–404.

[6] F. Treves. Approximation and Representation of Functions and Distributions Annihilated by a System of Complex Vector Fields. École Polytechnique Paris, 1981.

[7] F. Treves. A remark on the Poincare lemma in analytic complexes with nondegenerate Levi form. *Comm. in PDE*, **7** (1982) 1467–1482.

[8] А. В. Абросимов. Комплексные дифференциальные системы и касательные уравнения Коши–Римана. *Мат. сб.* **122** (1983) 419–434.

[9] L. N. Apostolova. On local solvability of systems of complex vector fields. *Bull. Sci., Lettr. Lodz*, Series Recherches sur les deformations, **7** *73* (1991).

Институт математики с ВЦ
Болгарская Академия Наук
София 1090, П.К. 373
Болгария

Поступило 24.06.1991