Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СЕРДИКА – Българско
математическо списание
18 (1992) 79-89

ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЕФФИЦИЕНТАМИ
1. СВОЙСТВА И РЕШЕНИЯ

ТОДОР Р. ГИЧЕВ

Резюме. Дифференциальные уравнения с разными особенностями в правых частях – нарушение непрерывности, неоднозначная определенность, импульсивное воздействие – рассматриваются в монографии Филиппова (1985). В настоящей работе изучается один класс линейных систем, в правых частях которых специальным образом входит неограничено возрастающая функция. Уравнениями этого типа описываются быстропротекающие процессы коммутации в теории электрических цепей см. Попов (1985) и Ангелова и др. (1990) и в теории удара, Кильчевский (1969). Работа состоит из двух частей. В первой изучаются свойства решения рассматриваемых систем. Характеризуется поведение значений решения в правом конце интервала когда длина этого интервала стремится к нулю. Предлагается дискретная аппроксимация с переменным шагом. Вторая часть работы посвещена некоторым приложениям полученных в первой части работы результатов. Сначала изучается одна задача оптимального управления и ее дискретная аппроксимация. Потом анализируется модель прямого центрального соударения двух материальных точек и модель включения одной электрической цепи. Отмечается эквивалентность этих двух процессов.

Пусть $\Delta = [t_0, T_0]$ - фиксированный отрезок и $T \in (t_0, T_0)$. Для $t \in (t_0, T_0)$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + By + f \\ \dot{y} &= ax + by + g, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R_n$ и $y \in R_1$. Предполагается, что

$$\begin{aligned} B &= B_1 + G_T B_2, \quad b = b_1 + G_T b_2 \\ a &= a_1 + G_T a_2, \quad\ \ g = g_1 + G_T g_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где G_T – скалярная функция, которая определена, непрерывна и неотрицательная для $t \in (t_0, T)$. Матричные функции A, f и B_i, a_i, b_i, g_i при $i = 1, 2$ определены и непрерывны на отрезке Δ и их размеры определяются векторами x и y. Отметим следующее

Предположение А. *Пусть $T_0 - t_0 < 1$ и на отрезке Δ функция b_2 имеет непрерывную первую производную, а $b_2(t) < 0$. Кроме того на отрезке Δ выполняется по крайней мере одно из следующих двух условий:*

a) функции a_2 и g_2 аннулируются тождествено, а функция B_2 имеет непрерывную первую производную;

b) функция B_2 аннулируется тождествено, а функции a_2 и g_2 имеют непрерывные первые производные.

Если через $z_T = (x_T, y_T)$ обозначено решение системы (1) с начальными условиями

$$x(t_0) = v, \qquad y(t_0) = w \tag{3}$$

и $\|\cdot\|$ – некоторая векторная норма, то имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполняется предположение А. Тогда существует такая постоянная M, что для всех $T \in (t_0, T_0)$ выполняется соотношение*

$$\sup_{t_0 \le t < T} \|z_T(t)\| \le M.$$

Доказательство. Через $X(t,\tau), Y(t,\tau), Y_1(t,\tau), Y_2(t,\tau)$ обозначим нормированные при $t = \tau$ фундаментальные матрицы уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad \dot{y} = b(t)y, \qquad \dot{\xi} = b_1(t)y, \qquad \dot{\eta} = G_T(t)b_2(t)\eta.$$

Тогда имеет место равенство $Y(t,\tau) = y_1(t,\tau)Y_2(t,\tau)$. Так как для $t \in [t_0, T]$ выполняется $b_2(t)G_T(t) \le 0$, то при любом фиксированном $\tau \in [t_0, T)$ функция

$$Y_2(t,\tau) = \exp\Big(\int_\tau^t b_2(s)G_T(s)ds\Big)$$

не возрастает для $t \in [\tau, T)$, причем ее вариация не превосходит 1. В силу (1) и (3) имеем

$$x_T(t) = X(t,t_0)v + \int_{t_0}^t X(t,\tau)B(\tau)y_T(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t X(t,\tau)f(\tau)d\tau \tag{4}$$

$$y_T(t) = Y(t,t_0)w + \int_{t_0}^t Y(t,\tau)a(\tau)x_T(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t Y(t,\tau)g(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Далее случаи a) и b) из предположения А рассматриваются отдельно.

В случае *a*) вводится обозначение

$$\gamma_T(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)y_T(\tau)d\tau$$

и $x_T(t)$ в равенстве (5) выражается через (4). Обе стороны равенства умножаются слева на $X(\theta,t)B(t)$ и после этого оно почленно интегрируется от t_0 до θ. Тогда меняя порядок интегрирования в повторных интегралах, при обозначениях

$$h(\theta) = X(\theta,t_0)\frac{B_2(t_0)}{b_2(t_0)}w - \frac{B_2(\theta)}{b_2(\theta)}Y(\theta,t_0)w$$

$$q(\tau) = \int_{\tau}^{\theta} X(\theta,t)B(t)Y(t)dt$$

равенство записывается в виде

$$\begin{aligned} \gamma_T(\theta) + h(\theta) \quad &= q(t_0)w + h(\theta) \\ &+ \int_{t_0}^{\theta} q(\tau)\{a(\tau)[X(\tau,t_0)v - h(\tau) + \int_{t_0}^{\tau} X(\tau,s)f(s)ds] + g(\tau)\}d\tau \\ &+ \int_{t_0}^{\theta} q(\tau)a(\tau)(\gamma_T(\tau) + h(\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

И так как

$$\begin{aligned} q(\tau) \quad &= \int_{\tau}^{\theta} X(\theta,t)B_1(t)Y(t,\tau)dt + \int_{\tau}^{\theta} X(\theta,t)\frac{B_2(t)}{b_2(t)}Y_1(t,\tau)dY_2(t,\tau) \\ &= \int_{\tau}^{\theta} X(\theta,t)B_1(t)Y(t,\tau)dt + \frac{B_2(\theta)}{b_2(\theta)}Y(\theta,\tau) - X(\theta,\tau)\frac{B_2(\tau)}{b_2(\tau)} \\ &- \int_{\tau}^{\theta} X(\theta,t)\frac{B_2(t)}{b_2(t)}Y_1(\theta,\tau))Y_2(\theta,\tau)dt, \end{aligned}$$

то из (6) и из ограниченности вариации $Y_2(t,\tau)$ с помощью неравенства Гронуолла доказывается, что при подходящим образом выбранной постоянной $M_1 > 0$ для $\theta \in [t_0,T)$ и $T \in (t_0,T_0)$ имеет место неравенство

$$\|\gamma_T(\theta) + h(\theta)\| \le (T - T_0)M_1 \tag{7}$$

Из (7) получается ограниченость $\gamma_T(\theta)$, а потом из (4) следует ограниченость x_T, а из (5) – ограниченость y_T. Этим при первом из условий предположения А теорема доказана.

В случае, когда выполняется условие b) из предположения А в равенстве (5) $x_T(t)$ снова выражается через (4). Меняя порядок интегрирования и вводя обозначения

$$\begin{aligned} h_1(t) = & \Big(\frac{a_2(t)}{b_2(t)}X(t,t_0) - Y(t,t_0)\frac{a_2(t_0)}{b_2(t_0)}\Big)v, \\ h_2(t) = & \frac{g_2(t)}{b_2(t)} - Y(t,t_0)\frac{g_2(t_0)}{b_2(t_0)}, \\ q_1(s) = & \int_s^t Y(t,\tau)a(\tau)X(\tau,s)d\tau, \end{aligned}$$

полученное равенство записывается в виде

$$\begin{aligned} y_T(t) + h_1(t) + h_2(t) - Y(t,t_0)w = q_1(t_0)v + h_1(t) + \big(h_2(t) + \int_{t_0}^t Y(t,\tau)g(\tau)d\tau\big) \\ + \int_{t_0}^t q_1(s)\big(f(s) - B(s)(h_1(s) + h_2(s) + Y(s,t_0)w)\big)ds \\ + \int_{t_0}^t q_1(s)B(s)\big(y_t(s) + h_1(s) + h_2(s) - Y(s,t_0)w\big)ds. \end{aligned}$$

Далее с помощью аналогичных проведенным в первом случае рассуждений доказывается существование такой постоянной $M_2 > 0$, что при всех $\theta \in [t_0, t)$ и $T \in (t_0, T_0)$ имеет место неравенство

$$\|y_T(t) + h_1(t) + h_2(t) - Y(t,t_0)w\| \le (T - t_0)M_2 \tag{8}$$

Из (8) следует ограниченость y_t и тогда из (4) следует и ограниченость n_T. Этим доказательство и во втором случае заканчивается.

Введем обозначения $x_T(t_0^+) = \lim\limits_{T\to t_0}\lim\limits_{t\to T} x_T(t)$; $y_T(t_0^+) = \lim\limits_{T\to t_0}\lim\limits_{t\to T} y_T(t)$.

Следствие 1. *Пусть выполняется предположение А и*

$$G = \lim_{T\to t_0}\int_{t_0}^T b_2(\tau)G_T(\tau)d\tau,$$

где интеграл понимается в несобственном смысле. Тогда:

a) если $G = -\infty$, то

$$x_T(t_0^+) = v - \frac{B_2(t_0)}{b_2(t_0)}w, \quad y_T(t_0^+) = -\frac{a_2(t_0)v + g_2(t_0)}{b_2(t_0)}; \tag{9}$$

b) если $G = 0$, *то*

$$x_T(t_0^+) = v, \quad y_T(t_0^+) = w. \tag{10}$$

Доказательство соотношений (9) и (10) получается с помощью неравенств (7) и (8).

Следствие 2. *Пусть выполняется предположение A. Тогда:*

a) если при некотором числе $\alpha_1 > 0$ *для всех* $T \in (t_0, T_0)$ *имеет место неравенство* $G_T(t) \geq (t - t_0)^{\alpha_1}(T - t)^{-1}$, *то выполняются соотношиния (9);*

b) если при некотором $\alpha \in (0,1)$ *для всех* $T \in (t_0, T_0)$ *имеет место неравенство* $G_T(t) \leq (T - t)^{-\alpha}$, *то выполняются соотношения (10).*

Доказательство. Непосредствено проверяется, что выполняются соответствующие предположения следствия 1, откуда следуют необходимые утверждения.

Следующее предположение ограничивает рост функции G_T.

Предположение B1. *При некоторых постоянных* $L < 0$ *и* $\alpha > 0$ *для всех тех* s *и* t, *для которых* $t_0 \leq s \leq t < T$, *выполняется неравенство*

$$\int_s^t b_2(\tau) G_T(\tau) d\tau \geq L(t - s)\Big(\frac{1}{(T - t)^\alpha} + \frac{1}{(T - s)^\alpha}\Big).$$

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения A и B1. Тогда для любого положительного числа* ε *существует такое положительное число* σ, *что если* $0 \leq t - s < (T - s)^{\alpha+\sigma}$, *то* $\|z_T(t) - z_T(s)\| < \varepsilon$.

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что если $0 \leq t - s < (T - s)^{\alpha+\sigma}$, для вариации неубывающей функции $Y_2(t, \cdot)$ имеет место

$$0 \leq Y_2(t, t) - Y(t, s) < \varepsilon. \tag{11}$$

Для любого $\sigma > 0$, $\alpha + \sigma \geq 1$, если $0 \leq t - s < (T - s)^{\alpha_\sigma}$, из предположения

В1 следует, что

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq Y_2(t,t) - Y_2(t,s) \leq 1 - \exp\Big[L(t-s)\big(\frac{1}{(T-t)^\alpha} + \frac{1}{(T-s)^\alpha}\big)\Big] \\
&\leq 1 - \exp\Big[L(t-s)\big(\frac{1}{(T-s-(T-s)^{\alpha+\sigma})^\alpha} + \frac{1}{(T-s)^\alpha}\big)\Big] \\
&\leq 1 - \exp\Big[L\frac{(T-s)^{\alpha+\sigma}}{(T-s)^\alpha}\big(\frac{1}{(1-(T-s)^{\alpha+\sigma-1})^\alpha} + 1\big)\Big] \\
&\leq 1 - \exp\big(\frac{2L(T-s)^\sigma}{(1-(T-t_0)^{\alpha+\sigma-1})^\alpha}\big).
\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что действительно при всех достаточно больших σ выполняется неравенство (11).

Пусть для $\tau \leq \sigma \leq t$ введены обозначения

$$\Delta X(t,s,t) = \big(X(t,s) - X(s,s)\big)X(s,\tau),$$

$$\Delta Y(t,s) = Y(t,s) - Y(s,s).$$

Тогда из (4) и (5) следует, что

$$\begin{aligned}
x_T(t) - x_T(s) \quad &= \Delta X(t,s,t_0)v + \int_{t_0}^{s} \Delta X(t,s,\tau)\big(f(\tau) + B(\tau)y_T(\tau)\big)d\tau \\
&+ \int_{s}^{t} X(t,\tau)\big(f(\tau) + B(\tau)y_T(\tau)\big)d\tau \\
y_T(t) - y_T(s) \quad &= \Delta Y(t,s)Y(s,t_0)w + \Delta Y(t,s)\int_{t_0}^{s} Y(s,\tau)\big(g(\tau) + a(\tau)x_T(\tau)\big)d\tau \\
&+ \int_{s}^{t} Y(t,\tau)\big(a(t,\tau)x_T(\tau) + g(\tau)\big)d\tau.
\end{aligned} \tag{12}$$

Утверждение теоремы в случае в) предположения А следует из равенства (12) причем используется непрерывность функции в правой части системы (1), ограниченость x_T и y_T, которая имеет место в силу теоремы 1 и доказанные свойства вариации $Y_2(t,\tau)$.

В случае *а*) из предположения А сначала $y_T(t)$ в (4) выражается через (5) и потом составляются равенства соответствующие равенствам (12). Дальше доказательство заканчивается как и в предыдущем случае.

Пусть Λ – некоторая окрестность точки λ_0 в R_m. В дальнейшем будем предполагать, что все функции в (1) и (2), за исключением G_T, определены, непрерывны и имеют непрерывные первые производные по t для всех $(t,\lambda) \in [t_0,T] \times \Lambda$. Если $\mu = (v,w,\lambda)$, где $v \in R_n$, $w \in R_1$ и $\lambda \in \Lambda$, через

$z_\mu = (x_\mu, y_\mu)$ обозначим решение системы (1) при только что сделаных дополнительных предположениях с начальными условиями (3). При исследовании непрерывной зависимости решения системы (1) от начальных условий (3) и от параметра λ существеную роль имеют следующие две предположения, первое из которых ограничиваен рост функции G_T.

Предположение B2. *При некоторых постоянных $L_1 > 0$ и $\alpha > 0$ для всех $t \in [t_0, T)$ имеет место неравенство*

$$G_T(t) \leq \frac{L_1}{(T-t)^\alpha}.$$

Предположение C. *При некоторых постоянных $C > 0$ и $\alpha_0 > 0$ для всех $t \in [t_0, T)$ и $\lambda_1 \in \Lambda$, $\lambda_2 \in \Lambda$ выполняется неравенство*

$$|b_2(t, \lambda_1) - b_2(t, \lambda_2)| \leq C\|\lambda_1 - \lambda_2\|(T-t)^{\alpha_0}.$$

Отметим, что если для функции G_T выполняется предположение B2, то она удовлетворяет и предположению B1.

Теорема 3. *Пусть при каждом $\lambda \in \Lambda$ выполняется предположение A и, кроме того, при $\alpha_0 > \max[0, \alpha - 1]$ имеют место предположения B2 и C. Тогда если $\mu_0 = (v_0, w_0, \lambda_0)$ – фиксированная точка из множества $H = R_n \times R_1 \times \Lambda$, то для любого числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что если $\mu \in H$ и*

$$\|v_0 - v\| + |w_0 - w| + \|\lambda - \lambda_0\| < \delta,$$

то

$$\sup_{t_0 \leq t < T} \|z_\mu(t) - z_{\mu_0}(t)\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Через $Y_2(t, \tau, \lambda)$ обозначим нормированную при $t = \tau$ фундаментальную матрицу уравнения $\dot{y} = G_T(t) b_2(t, \lambda) y$. Докажем, что при предположениях теоремы для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $\|\lambda_1 - \lambda_2\| < \delta$, то

$$\sup_{t_0 \leq \tau \leq t < T} |Y_2(t, \tau, \lambda_1) - Y_2(t, \tau, \lambda_2)| < \varepsilon.$$

Для этой цели сначала рассмотрим разность

$$|Y_2(t, \tau, \lambda_1) - Y_2(t, \tau, \lambda_2)|$$

$$= exp\Big(\int_\tau^t b_2(s,\lambda_2)G_T(s)ds\Big)\Big|\exp\Big(\int_\tau^t (b_2(s,\lambda_1)-b_2(s,\lambda_2))G_T(s)ds\Big)-1\Big|$$

$$\leq \Big|\exp\Big(\int_\tau^t (b_2(s,\lambda_1)-b_2(s,\lambda_2))G_T(s)ds\Big)-1\Big|.$$

И так как в силу сделанных предложений

$$\Big|\int_\tau^t (b_2(s,\lambda_1)-b_2(s,\lambda_2))G_T(s)ds\Big|$$

$$\leq L_1C\|\lambda_1-\lambda_2\|\int_\tau^t \frac{(T-s)^{\alpha_0}}{(T-s)^{\alpha}}ds \leq \frac{L_1C\|\lambda_1-\lambda_2\|}{\alpha_0-\alpha+1}(T-t_0)^{\alpha_0-\alpha+1},$$

то из этого неравенства следует искомое утверждение.

Далее доказательство теоремы проводится отдельно для обеих случаев предположения A, причем существенным образом используется доказанное выше свойство матрицы $Y_2(t,\tau,\lambda)$.

В дальнейшем рассматривается дискретная аппроксимация системы (1) по методу Эйлера. При $N=1,2,\dots$ и $\sigma_N>0$ для $k=0,1,\dots$ введем числа

$$\begin{aligned} &\tau_0^N = t_0,\\ (13)\qquad &h_k^N = (T-\tau_k^N)^{\alpha+\sigma_N},\\ &\tau_{k+1}^N = \tau_k^N + h_k^N. \end{aligned}$$

Сначала докажем следующий вспомагательный результат.

Лемма 1. *Если $T-t_0<1$ и $\gamma_N=\alpha+\sigma_N>1$, то имеет место равенство*

$$t_0+\sum_{k=0}^{\infty} h_k^N = T$$

Доказательство. Так как $\gamma_N>1$, то

$$t_0+\sum_{k=1}^{\infty} = \tau_n^N + h_n^N = \tau_n^N + (T-\tau_n^N)^{\gamma_N} \leq \tau_n^N + (T-\tau_n^N) = T.$$

и неубывающая последовательность парциальных сумм рядь ограничена сверху. Следовательно она сходится и пусть τ^* ее предел. Допустим, что $\tau^*<T$. Тогда найдется такой индекс n_0, что

$$\tau_{n_0}^N > \tau^* - \frac{(T-\tau^*)^{\gamma_N}}{2}$$

и так как $\tau_{n_0}^N < \tau^*$, то

$$\tau_{n_0+1}^N = \tau_{n_0}^N + (T - \tau_{n_0}^N)^{\gamma_N} > \frac{(T-\tau^*)^{\gamma_N}}{2} + (T - \tau_{n_0}^N)^{\gamma_N} > \tau^* + \frac{(T-\tau_{n_0})^{\gamma_N}}{2} > \tau^*$$

Из достигнутого противоречия следует, что $\tau^* = T$. Этим лемма доказана.

Пусть все функции в правой части (1) и в (2) удовлетворяют перечисленым выше требованиям и $\{\lambda_N\}_1^\infty$ – последовательность чисел $\lambda_N \in \Lambda$. При λ_N через $z_N = (x_N, y_N)$ обозначим решение системы(1) с фиксироваммаными начальными условиями(3). Если при $N = 1, 2, \ldots$ числа h_k^N и τ_k^N определяютcя по формулам (13), через $z_k^N = (x_k^N, y_k^N)$ обозначим решение системы

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + (A(\tau_k^N, \lambda_n)x_k + B(\tau_k^N, \lambda_N)y_k + f(\tau_k^N, \lambda_N))h_k^N \\
y_{k+1} &= y_k + (a(\tau_k^N, \lambda_n)x_k + b(\tau_k^N, \lambda_N)y_k + g(\tau_k^N, \lambda_N))h_k^N
\end{aligned}
\tag{14}
$$

с начальными условиями $x_0 = v$, $y_0 = w$.

Теперь, вводится новое ограничение на рост функции G_T.

Предположение В3. *Функция G_T имеет непрерывную первую производную и при некоторых постоянных $L_2 > 0$ и $\alpha > 0$ для всех $t \in [t_0, T)$ выполняется равенство*

$$G_T'(t) \le \frac{L_2}{(T-t)^{\alpha+1}}.$$

Теорема 4. *Пусть $\{\lambda_N\}_1^\infty$ такая последовательность чисел $\lambda_N \in \Lambda$, что $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda_N = \lambda_0$ и при каждом λ_N выполняется предположние А. Пусть, кроме того, при $\alpha_0 > \max[0, \alpha - 1]$ имеют место предположения В3 и С. Тогда если $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = +\infty$ и ε – произвольное положительное число, то найдется такое натуральное N_0, что если $N > N_0$, то $\sup_{k=0,1,\ldots} \|z_N(\tau_k^N) - z_k^N\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Из формулы Тейлора следует, что

$$
\begin{aligned}
x_N(\tau_{k+1}^N &= x_N(\tau_k^N) + \dot{x}_N(\tau_k^N)h_k^N + \ddot{x}_N(\theta_k')\tfrac{(h_k^N)^2}{2} \\
y_N(\tau_{k+1}^N &= y_N(\tau_k^N) + \dot{y}_N(\tau_k^N)h_k^N + \ddot{y}_N(\theta_k'')\tfrac{(h_k^N)^2}{2},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где θ_k' и θ_k'' – числа из интервала (τ_k^N, τ_{k+1}^N). В силу сделанных предположений решения z_N, $N = 1, 2, \ldots$, ограничены в интервале $[t_0, T)$ и при некоторой постоянной $L_3 > 0$ имеют место неравенства

$$
\begin{aligned}
&G_T(t) \le L_3(T-t)^{-\alpha}, && h_k^N G_T(\tau_k^N) \le L_3(T - \tau_k^N)^{\sigma_N} \\
&h_K^N G_T'(\tau_k^n) \le L_3(T-\tau_k^N)^{\sigma_N - 1}, && h_K^N (G_T(\tau_k^n))^2 \le (T - \tau_k^N)^{\sigma_N - \alpha}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Введем обозначения

$$\zeta_k^N = \|x_n(\tau_k^N) - x_k^N\| + \|y_N(\tau_k^N) - y_k^N\|, \quad \zeta_0^N = 0.$$

Вычитая почленно соответствующие уравнения из (14) и (15), потом применяя традиционное при оценивании ошибки для метода Эйлера представление производных с помощью системы (1) и наконец используя неравенства (16), приходим к выводу, что при некоторой постоянной $C_1 > 0$ и $\beta_k^N = 1 + C_1 h_k^N$ имеют место неравенства

$$\zeta_{k+1}^N \le \beta_k^N \zeta_k^N + C_1 h_k^N (T - \tau_k^N)^{\sigma_n - \alpha}. \tag{17}$$

Отметим, что при выводе этого неравенства существенно использовалось, что $b_2(t, \lambda) < 0$. Выражая в (17) ζ_k^N через ζ_{k-1}^N, потом ζ_{k-1}^N через ζ_{k-2}^N и т.д. приходим к выводу, что для всех достаточно больших N выполняется

$$\zeta_{k+1}^N \le C_1 (T - t_0)^{\sigma_N - \alpha} \Big(h_k^N + h_{k-1}^N e^{h_k^N c_1} + \ldots + h_0^N e^{c_1 (h_k^N + \ldots + h_1^N)} \Big)$$

$$\le C_1 (T - t_0)^{\sigma_N - \alpha} \Big(\int_{\tau_{k-1}^N}^{\tau_k^N} e^{c_1(\tau_k^N - t)} dt + \ldots + \int_{\tau_0^N}^{\tau_1^N} e^{c_1(\tau_k^N - t)} dt \Big)$$

$$= C_1 (T - t_0)^{\sigma_N - \alpha} \int_{\tau_0^N}^{\tau_k^N} e^{c_1(\tau_k^N - t)} dt \le (T - t_0)^{\sigma_N - \alpha} (e^{C_1 T} - 1).$$

Из этого неравенства следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Пусть $T \in (t_0, T_0)$ и $T_0 - t_0 < 1$. В интервале $[t_0, T)$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}(t) \frac{d^{n-k} x}{dt^{n-k}} = f(t),$$

где

$$a_{n-k}(t) = b_{n-k}(t) + G_T(t) c_{n-k}(t), \quad f(t) = g(t) + G_T(t) h(t).$$

Функции $b_s(t)$, $c_s(t)$ для $s = 0, 1, \ldots, (n-1)$ и $g(t)$, $h(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_0, T_0]$. Кроме того $c_{n-1}(t) > 0$ для $t \in [t_0, T_0]$. Функция G_T определена и непрерывна и $G_T(t) \ge 0$ для $t \in [t_0, T)$. Через x_T обозначим решение уравнений с начальными условиями

$$\left. \frac{d^s x}{dt^s} \right|_{t = t_0} = v_s, \qquad s = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

Тогда если

$$\lim_{t \to T} G_T(t) = +\infty, \quad \lim_{T \to t_0} \int_{t_0}^{T} c_{n-1}(t) G_T(t) dt = +\infty,$$

то применяя следствие 1 к эквивалентной системе получим соотношения

$$\left.\frac{d^s x_T}{dt^s}\right|_{t=t_0^+} = v_s, \qquad s = 0, 1, \ldots, (n-2).$$

$$\left.\frac{d^{n-1} x_T}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0^+} = \left(h(t_0) - \sum_{s=0}^{n-2} c_s(t_0) v_s\right) c_{n-1}(t_0)^{-1}.$$

При соответствующих предположениях можно сформулировать аналоги теорем 1 – 4 для уравнения n-ого порядка.

Замечание 2. Пусть функция G_T определена и непрерывна и $G_T(t) \geq 0$ для $t \in (t_0, T]$. Тогда через $z_T = (x_T, y_T)$ обозначим решение системы (1) с начальными условиями (3), которое определяется по формулам (4), (5), причем интегралы в этих формулах понимаются в несобственном смысле при $t \to t_0$. Пре предположениях теоремы 1 существует такая постоянная $M_1 > 0$, что для $T \in (t_0, T_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t_0 < t \leq T} \|z_T(t)\| \leq M_1.$$

Доказательство этого утверждения получается по схеме доказательства теоремы 1 с той розницой, что интегралы понимаются с несобственном смысле. В этом случае имеют место утверждения аналогичные следствиям 1 и 2, причем формулировка следствия 1 сохраняется полностью.

REFERENCES

[1] А. Ф. Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

[2] В. П. Попов. Основы теории цепей. М., 1985.

[3] Р. К. Ангелова, Т. Р. Гичев. Анализ процесса коммутации в сложных линейных электрических цепях. *Электротехника* **9** (1990) 58-61.

[4] Н. Кильчевский. Теория соударения твердых тел. *Наукова думка*, 1969.

УАСГ
бул. Хр. Смирненски 1
София 1000
Болгария

Поступило 07.02.1992