Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica
Mathematical Journal
Сердика
Математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or
institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or
licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Mathematical Journal
which is the new series of
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

Serdica Math. J. **38** (2012), 523–538

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

APPROXIMATION PAR DES MORPHISMES DE CHAÎNES ET POINTS FIXES DES APPLICATIONS MULTIVOQUES

Robert Cauty

Communicated by J. P. Revalski

Abstract. In this paper, we consider u.s.c. multivalued maps with compact point images. We develop a notion of approximation of such maps by chain mappings between the singular chain complexes of the spaces, and use this notion to prove fixed point theorems.

1. Introduction. Une fonction multivoque à valeurs compactes $f : X \multimap Y$ fait correspondre à tout point $x \in X$ un sous-ensemble compact non vide de Y. Une telle fonction est dite semi-continue supétieurement, ou s.c.s., si, pour tout ouvert U de Y, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \subset U$ est ouvert dans X. La fonction f est dite compacte si elle est à valeurs compactes et s'il existe un sous-ensemble compact C de Y tel que $f(X) \subset C$.

Nous avons récemment introduit l'utilisation des chaînes singulières dans l'étude des points fixes (voir [1] et [2]), une méthode qui a l'avantage de s'appliquer à tous les sous-ensembles convexes des espaces métriques linéaires. Nous

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C60, 54H25.
Key words: chain morphism, fixed point, weighted map.

utiliserons ici cette approche pour étudier les points fixes des applications multivoques compactes s.c.s. Nous introduirons une notion d'approximation des fonctions s.c.s. à valeurs compactes par des morphismes de chaînes, et l'utiliserons pour associer à certaines fonctions s.c.s. compactes $f : X \multimap X$ un nombre de Lefschetz $\Lambda(f)$ permettant d'obtenir une généralisation du théorème de Lefschetz-Hopf : si $\Lambda(f) \neq 0$, alors f a un point fixe.

Cette approche algébrique fonctionne dans la classe des rétractes absolus de voisinage algébriques, que nous avons introduite dans [1]. Cette classe d'espaces métrisables contient en particulier les rétractes absolus de voisinage, les groupes métrisables localement contractiles, les sous-ensembles convexes des espaces métriques linéaires, et tous les rétractes de voisinage de tels espaces.

A la section 4, nous étudierons les fonctions multivoques pondérées à valeurs compactes $f : X \multimap Y$, et nous montrerons que si Y est un rétracte absolu de voisinage algébrique et si, pour tout $x \in X$, $f(x)$ est réunion d'un nombre fini de composantes qui sont acycliques pour la cohomologie de Čech, alors f est approximable par des morphismes de chaînes. La définition du nombre de Lefschetz pour les applications compactes approximables par des morphismes de chaînes d'un rétracte de voisinage algébrique dans lui-même et le théorème de Lefschetz-Hopf correspondant seront donnés dans la section 5.

2. Notations et rappels. *Dans tout cet article, R désignera un corps commutatif.* Tous les complexes de chaînes que nous utiliserons sont augmentés, et *tout morphisme de chaînes entre deux tels complexes sera supposé conserver l'augmentation*

Pour tout espace topologique X, nous notons $S(X,R)$ le complexe des chaînes singulières de X à coefficients R, et $H(X,R)$ son groupe gradué d'homologie. Nous identifions chaque simplexe singulier σ de X à l'élément $1 \cdot \sigma$ de $S(X,R)$. Si A est un sous-espace de X, nous identifions naturellement $S(A,R)$ à un sous-complexe de $S(X,R)$. Le support d'une chaîne $c \in S(X,R)$ est noté $\|c\|$; c'est le plus petit sous-ensemble C de X tel que $c \in S(C,R)$. En particulier, l'image du simplexe singulier σ est notée $\|\sigma\|$. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, nous notons $S(X,\mathcal{U},R)$ le sous-complexe de $S(X,R)$ engendré par les simplexes singuliers dont l'image est contenue dans un élément de $\mathcal{U}$. Il est connu (voir [8], §4.4) qu'il existe un morphisme de chaînes $Sd : S(X,R) \to S(X,\mathcal{U},R)$ tel que $Sd(c) = c$ pour $c \in S(X,\mathcal{U},R)$ et que $\|Sd(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne c. En outre, notant ι l'inclusion de $S(X,\mathcal{U},R)$ dans $S(X,R)$, il existe une homotopie $h : S(X,R) \to S(X,R)$ entre l'identité et $\iota \circ Sd$ telle que $\|h(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne c. Un tel morphisme Sd est appelé un opérateur de subdivision.

Soient X, Y deux espaces topologiques et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de

X. Un morphisme de chaînes $\varphi : S(X,\mathcal{U},R) \to S(Y,R)$ sera dit compact s'il existe un sous-ensemble compact C de Y tel que $\varphi(S(X,\mathcal{U},R)) \subset S(C,R)$. En particulier, φ est compact si son image est de type fini (i.e. engendrée par un nombre fini d'éléments).

Les deux notions suivantes ont été introduites dans [1].

Définition 1. *Un sous-espace A d'un espace X est appelé un R-rétracte de voisinage algébrique de X s'il existe un voisinage U de A dans X, un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U et un morphisme de chaînes $\mu : S(U,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ vérifiant*

(*i*) *$\mu(c) = c$ pour $c \in S(A,R) \cap S(U,\mathcal{U},R)$,*

(*ii*) *pour tout $x \in A$ et tout voisinage V de x dans A, il existe un voisinage W de x dans X tel que $\mu(S(W,R) \cap S(U,\mathcal{U},R)) \subset S(V,R)$.*

Définition 2. *Un espace métrisable X est un R-rétracte absolu de voisinage algébrique si c'est un R-rétracte de voisinage algébrique de tout espace métrisable le contenant comme fermé.*

Si K est un complexe simplicial, nous notons $|K|$ sa réalisation géométrique ; en particulier, la réalisation géométrique d'un simplexe s de K est notée $|s|$. La subdivision barycentrique de K est notée K'. Nous notons $C(K,G)$ le complexe des chaînes orientées de K à coefficients G, et identifions $C(L,G)$ à un sous-complexe de $C(K,G)$ si L est un sous-complexe de K. Rappelons que $C(K,\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre ayant une base en correspondance biunivoque avec les simplexes de K, le générateur correspondant à ce simplexe étant une orientation de ce simplexe.

Si L est un CW-complexe, nous notons $C(L,R)$ le complexe des chaînes cellulaires de L à coefficients R. C'est un R-module libre ayant une base en correspondance biunivoque avec les cellules de L. Si L' est un sous-CW-complexe de L, nous identifions $C(L',R)$ à un sous-complexe de $C(L,R)$. Si $r : L_1 \to L_2$ est une application cellulaire entre CW-complexes, nous notons $r_\# : C(L_1,R) \to C(L_2,R)$ le morphisme qu'elle induit.

Nous dirons qu'un CW-complexe est spécial si toutes ses cellules sont des sous-complexes et s'il admet une subdivision simpliciale. Si K est une subdivision simpliciale du CW-complexe spécial L, alors toute cellule $|\tau|$ de L est la réalisation géométrique d'un sous-complexe τ_K de K, et il existe un morphisme de chaînes $\psi : C(L,R) \to C(K,R)$ tel que $\psi(C(|\tau|,R)) \subset C(\tau_K,R)$ pour toute cellule $|\tau|$ de L. Ce morphisme s'obtient en tensorisant avec R un morphisme de chaînes $\psi' : C(L,\mathbb{Z}) \to C(K,\mathbb{Z})$ construit comme suit. Soient $|\tau|$ une n-cellule de

L et $|s_1|, \dots, |s_k|$ les n-simplexes de $|K|$ contenus dans $|\tau|$. Le générateur $\hat{\tau}$ de $C(L, \mathbb{Z})$ correspondant à $|\tau|$ détermine une orientation de la cellule $|\tau|$; l'orientation induite sur chaque $|s_i|$ détermine un générateur $\hat{s}_i$ de $C(K, \mathbb{Z})$, et ψ' est défini par $\psi'(\tau) = \hat{s}_1 + \cdots + \hat{s}_k$. La vérification du fait que ψ' commute avec les différentielles est une conséquence facile du corollaire V.6.11 et de la proposition VIII.4.5 de [5].

A la section 4, nous utiliserons la réalisation géométrique, au sens de Giever [6], du complexe singulier de l'espace X. C'est un CW-complexe spécial $\Sigma(X)$ dont les cellules sont en correspondance biunivoque avec les simplexes singuliers de X. Pour tout simplexe singulier σ de X, nous noterons $|\sigma|$ la cellule correspondante de $\Sigma(X)$; si σ est un p-simplexe, alors $|\sigma|$ est de dimension p. Si les cellules $|\sigma|$ de $\Sigma(X)$ sont naturellement orientées, alors $S(X, R)$ est naturellement isomorphe à $C(\Sigma(X), R)$, l'image de σ par cet isomorphisme étant un élément du sous-complexe $C(|\sigma|, R)$ de $C(\Sigma(X), R)$.

Une fonction multivoque à valeurs compactes $f : X \multimap Y$ est dite semi-continue inférieurement si, pour tout ouvert U de Y, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \cap U \neq \emptyset$ est ouvert ; elle est dite continue si elle est simultanément semi-continue inférieurement et supérieurement.

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace X et A un sous-ensemble de X, nous notons $\mathrm{St}(A,\mathcal{U})$ la réunion des éléments de $\mathcal{U}$ rencontrant A. Nous notons $\mathrm{St}(\mathcal{U})$ le recouvrement $\{\mathrm{St}(U,\mathcal{U}) \,|\, U \in \mathcal{U}\}$.

3. Approximation par des morphismes de chaînes. La définition suivante introduit l'outil principal utilisé dans cet article.

Définition 3. *Soit $f : X \multimap Y$ une fonction multivoque s.c.s. à valeurs compactes. Nous dirons que f est approximable par des morphismes de chaînes si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{G}$ de Y, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X et un morphisme de chaînes $\varphi : S(X, \mathcal{V}, R) \to S(Y, R)$ tels que, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ contenant V et vérifiant $\varphi(S(V, R)) \subset S(\mathrm{St}(f(U), \mathcal{G}), R)$.*

Si ce morphisme φ peut toujours être choisi compact, nous dirons que f est approximable par des morphismes de chaînes compacts.

Dans certains cas, une fonction multivoque compacte s.c.s. qui peut être approximée par des morphismes de chaînes est aussi automatiquement approximable par des morphismes de chaînes compacts.

Théorème 1. *Soit $f : X \multimap Y$ une fonction multivoque compacte qui est approximable par des morphismes de chaînes. Si Y est un R-rétracte absolu* *de voisinage algébrique, alors f est approximable par des morphismes de chaînes compacts.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit C un compact de Y contenant $f(X)$. Fixons un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X et un recouvrement ouvert $\mathcal{G}$ de Y. Soit $\mathcal{G}_1$ un recouvrement ouvert de Y tel que $\mathrm{St}(\mathcal{G}_1)$ soit plus fin que $\mathcal{G}$. Le théorème 2 de [1] et la remarque qui le suit nous permettent de trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{H}$ de Y plus fin que $\mathcal{G}_1$, un complexe simplicial K, des morphismes de chaînes $\psi : S(Y, \mathcal{H}, R) \to C(K', R)$ et $\zeta : C(K', R) \to S(Y, R)$, ainsi qu'un voisinage ouvert W de C dans Y vérifiant

(1) Pour tout simplexe singulier σ de $S(Y, \mathcal{H}, R)$, il existe $G \in \mathcal{G}_1$ contenant $\|\sigma\| \cup \|\zeta \circ \psi(\sigma)\|$.

(2) Il existe un sous-complexe fini L de K' tel que $\psi(S(Y, \mathcal{H}, R) \cap S(W, R)) \subset C(L, R)$.

Soit W_1 un voisinage ouvert de C tel que $\overline{W}_1 \subset W$, et soit $\mathcal{H}_1$ le recouvrement de Y formé des ensembles $H \cap W$ et $H \setminus \overline{W}_1$, où H parcourt $\mathcal{H}$. Puisque f est approximable par des morphismes de chaînes, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X et un morphisme de chaînes $\varphi : S(X, \mathcal{V}, R) \to S(Y, R)$ tels que, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U_V \in \mathcal{U}$ contenant V et vérifiant $\varphi(S(V, R)) \subset S(\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{H}_1), R)$. Soit $Sd : S(Y, R) \to S(Y, \mathcal{H}, R)$ un opérateur de subdivision, et soit $\xi = \zeta \circ \psi \circ Sd \circ \varphi : S(X, \mathcal{V}, R) \to S(Y, R)$.

Soit $V \in \mathcal{V}$. Puisque $f(U_V) \subset f(X) \subset C$, $f(U_V)$ ne rencontre aucun des ensembles $H \setminus \overline{W}_1$, donc $\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{H}_1)$ est contenu dans W. Puisque Sd n'augmente pas les supports, $Sd \circ \varphi(S(V, R))$ est contenu dans $S(Y, \mathcal{H}, R) \cap S(W, R)$. Alors (2) entraîne que $\psi \circ Sd \circ \varphi(S(V, R))$ est contenu dans $C(L, R)$. Par suite, $\xi(S(X, \mathcal{V}, R))$ est contenu dans $\zeta(C(L, R))$. Puisque L est fini, $C(L, R)$ est de type fini, donc il en est de même de $\zeta(C(L, R))$; il existe alors un compact $M \subset Y$ tel que $\zeta(C(L, R)) \subset S(M, R)$. A fortiori, $\xi(S(X, \mathcal{V}, R)) \subset S(M, R)$, donc ξ est un morphisme de chaînes compact.

Soit σ un simplexe singulier de $S(V, R)$, $V \in \mathcal{V}$. Si $Sd \circ \varphi(\sigma) \neq 0$, il s'écrit $Sd \circ \varphi(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sigma_i$, où les λ_i sont des scalaires et les σ_i des simplexes singuliers tels que $\|\sigma_i\|$ soit contenu dans $\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{H}_1)$ et dans un élément de $\mathcal{H}$. Pour $1 \leq i \leq k$, (1) entraîne l'existence d'un $G_i \in \mathcal{G}_1$ contenant $\|\sigma_i\| \cup \|\zeta \circ \psi(\sigma_i)\|$. Puisque G_i contient $\|\sigma_i\|$, il est contenu dans $\mathrm{St}(\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{H}_1), \mathcal{G}_1)$, donc ce dernier ensemble contient $\|\xi(\sigma)\|$, et nous avons $\xi(S(V, R)) \subset S(St(\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{H}_1), \mathcal{G}_1), R)$. Puisque $\mathcal{H}_1$ est plus fin que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ plus fin que $\mathcal{G}_1$, $\mathrm{St}(\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{H}_1), \mathcal{G}_1)$ est contenu dans $\mathrm{St}(\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{G}_1), \mathcal{G}_1)$, lequel est contenu dans $\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{G})$ puisque $\mathrm{St}(\mathcal{G}_1)$ est plus fin que $\mathcal{G}$. Nous avons donc $\xi(S(V, R)) \subset S(\mathrm{St}(f(U_V), \mathcal{G}), R)$ pour tout $V \in \mathcal{V}$, d'où le théorème. $\square$

Si $f : X \multimap Y$ et $g : Y \multimap Z$ sont des fonctions multivoques s.c.s. à valeurs compactes, alors leur composée $g \circ f : X \multimap Z$ est aussi s.c.s. à valeurs compactes. Dans certains cas, la composée de deux fonctions s.c.s. à valeurs compactes approximables par des morphismes de chaînes est aussi approximable par des morphismes de chaînes.

Théorème 2. *Soient $f : X \multimap Y$ et $g : Y \multimap Z$ des fonctions s.c.s. à valeurs compactes qui sont approximables par des morphismes de chaînes. Si g est continue et si Y et Z sont paracompacts, alors $g \circ f$ est approximable par des morphismes de chaînes.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X et $\mathcal{G}$ un recouvrement ouvert de Z. Puisque Z est paracompact, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{G}_1$ de Z tel que $\mathrm{St}(\mathcal{G}_1)$ soit plus fin que $\mathcal{G}$. La continuité de g nous permet de trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{H}$ de Y tel que $g(y_1) \subset \mathrm{St}(g(y_2), \mathcal{G}_1)$ si y_1 et y_2 sont deux points d'un même élément de $\mathcal{H}$. En effet, soit $y \in Y$. Recouvrons le compact $g(y)$ par un nombre fini d'éléments $G_1, \ldots, G_k$ de $\mathcal{G}_1$ tels que $G_i \cap g(y) \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq k$. La continuité de g nous permet de trouver un voisinage ouvert H_y de y tel que, pour tout $z \in H_y$, $g(z) \subset G_1 \cup \cdots \cup G_k$ et $g(z) \cap G_i \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq k$. Si y_1, y_2 sont deux points de H_y, nous avons alors $g(y_1) \subset G_1 \cup \cdots \cup G_k \subset \mathrm{St}(g(y_2), \mathcal{G}_1)$, donc $\mathcal{H} = \{H_y \mid y \in Y\}$ est le recouvrement cherché. Notons que, pour tout $H \in \mathcal{H}$,

$$(\star) \qquad \mathrm{St}(g(H), \mathcal{G}_1) \subset \mathrm{St}(g(y), \mathcal{G}) \text{ pour tout } y \in H.$$

En effet, pour tout $z \in H$, nous avons $g(z) \subset \mathrm{St}(g(y), \mathcal{G}_1)$, donc $\mathrm{St}(g(H), \mathcal{G}_1) = \bigcup_{z \in H} \mathrm{St}(g(z), \mathcal{G}_1)$ est contenu dans $\mathrm{St}(\mathrm{St}(g(y), \mathcal{G}_1), \mathcal{G}_1) \subset \mathrm{St}(g(y), \mathcal{G})$ puisque $\mathrm{St}(\mathcal{G}_1)$ est plus fin que $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{H}_1$ un recouvrement ouvert de Y tel que $\mathrm{St}(\mathcal{H}_1)$ soit plus fin que $\mathcal{H}$. Puisque g est approximable par des morphismes de chaînes, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{W}$ de Y et un morphisme de chaînes $\psi : S(Y, \mathcal{W}, R) \to S(Z, R)$ tels que, pour tout $W \in \mathcal{W}$, il existe $H \in \mathcal{H}_1$ vérifiant $W \subset H$ et $\psi(S(X, R)) \subset S(\mathrm{St}(g(H), \mathcal{G}_1), R)$.

Puisque f est approximable par des morphismes de chaînes, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X et un morphisme de chaînes $\xi : S(X, \mathcal{V}, R) \to S(Y, R)$ tels que, pout tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ vérifiant $V \subset U$ et $\xi(S(V, R)) \subset S(\mathrm{St}(f(U), \mathcal{H}_1), R)$.

Soit $Sd : S(Y, R) \to S(Y, \mathcal{W}, R)$ un opérateur de subdivision, et soit $\varphi = \psi \circ Sd \circ \xi : S(X, \mathcal{V}, R) \to S(Z, R)$.

Soient $V \in \mathcal{V}$ et $U \in \mathcal{U}$ tels que $V \subset U$ et $\xi(S(V,R)) \subset S(\mathrm{St}(f(U),\mathcal{H}_1),R)$. Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que $\varphi(S(V,R)) \subset S(\mathrm{St}(g\circ f(U),\mathcal{G}),$ $R)$. Soit σ un simplexe singulier de $S(V,R)$. Si $Sd\circ\xi(\sigma) \neq 0$, c'est une combinaison linéaire $Sd\circ\xi(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\sigma_i$, où le support de σ_i est contenu dans $\mathrm{St}(f(U),\mathcal{H}_1)$ et dans un élément W_i de $\mathcal{W}$. Soit H_i un élément de $\mathcal{H}_1$ tel que $W_i \subset H_i$ et $\psi(S(W_i,R)) \subset S(\mathrm{St}(g(H_i),\mathcal{G}_1),R)$. Puisque $\|\sigma_i\|$ est contenu dans $\mathrm{St}(f(U),\mathcal{H}_1)$, il existe $H_i' \in \mathcal{H}_1$ tel que $\|\sigma_i\|\cap H_i' \neq \emptyset \neq H_i'\cap f(U)$. Soit $y_i \in H_i'\cap f(U)$. Puisque $\mathrm{St}(\mathcal{H}_1)$ est plus fin que $\mathcal{H}$, il existe $\widehat{H}_i \in \mathcal{H}$ tel que $H_i \cup H_i' \subset \widehat{H}_i$. Nous avons

$$\psi(\sigma_i) \in \psi(S(W_i,R)) \subset S(\mathrm{St}(g(H_i),\mathcal{G}_1),R) \subset S(\mathrm{St}(g(\widehat{H}_i),\mathcal{G}_1),R),$$

et, d'après $(\star)$,

$$\mathrm{St}(g(\widehat{H}_i),\mathcal{G}_1) \subset \mathrm{St}(g(y_i),\mathcal{G}) \subset \mathrm{St}(g\circ f(U),\mathcal{G}),$$

donc $\varphi(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\psi(\sigma_i)$ appartient bien à $S(\mathrm{St}(g\circ f(U),\mathcal{G}),R)$. $\square$

4. Fonctions multivoques pondérées. Si $f : X \multimap Y$ est une fonction multivoque s.c.s., nous noterons $\mathcal{C}(x,f)$ l'ensemble des composantes connexes de $f(x)$, et $\mathcal{C}(f)$ la réunion disjointe de tous les $\mathcal{C}(x,f)$, $x \in X$. L'élément générique de $\mathcal{C}(x,f)$ sera noté $C(x)$. Si $g : \mathcal{C}(f) \to R$ est une fonction, une notation du type $\sum_{C(x)\subset A} g(C(x))$ désignera la somme sur tous les $C(x) \in \mathcal{C}(x,f)$ qui sont contenus dans l'ensemble A.

Définition 4. *Soient $f : X \multimap Y$ une fonction multivoque s.c.s. à valeurs compactes et $m : \mathcal{C}(f) \to R$ une fonction. Nous dirons que f est une fonction multivoque R-pondérée, de fonction de pondération m, si les deux conditions suivantes sont véifiées.*

(1) *$\mathcal{C}(x,f)$ est fini pour tout $x \in X$,*

(2) *Pour tout $x_0 \in X$, si $C_1(x_0),\dots,C_s(x_0)$ sont les composantes de $f(x_0)$ et si $V_1,\dots,V_s$ sont des voisinages disjoints de $C_1(x_0),\dots,C_s(x_0)$, il exite un voisinage U de x_0 tel que*

(*a*) *$f(U) \subset \bigcup_{i=1}^{s} V_i$,*

(*b*) *$m(C_i(x_0)) = \sum_{C(x)\subset V_i} m(C(x))$ pour tout $x \in U$ et tout $i = 1,\dots,s$.*

Pour $x \in X$, nous poserons alors $\widehat{m}(x) = \sum_{C(x)} m(C(x))$.

La notion de fonction multivoque pondérée a été introduite par G. Darbo [4].

Pour tout espace X, nous notons $\widetilde{H}(X,R)$ le module gradué d'homologie réduite de X à coefficients R et, pour $X \subset Y$, nous notons $\widetilde{H}(X|Y)$ l'image de l'homomorphisme de $\widetilde{H}(X,R)$ dans $\widetilde{H}(Y,R)$ induit par l'inclusion. $\widetilde{H}_k(X,R)$ et $H_k(X|Y)$ désigneront les composantes de degré k de $\widetilde{H}(X,R)$ et $\widetilde{H}(X|Y)$ respectivement. Un sous-ensemble X d'un espace Y est dit $\mathrm{uv}^\infty(R)$ dans Y si, pour tout voisinage U de X dans Y, il existe un voisinage V de X dans Y qui est contenu dans U et tel que $\widetilde{H}(V|U)=0$.

Théorème 3. *Soient X, Y deux espaces paracompacts et $f : X \multimap Y$ une fonction multivoque R-pondérée, de fonction de pondération m. Supposons vérifiées les conditions suivantes.*

(i) Y est localement connexe par arcs,

(ii) pour tout $x \in X$, chaque composante de $f(x)$ est $\mathrm{uv}^\infty(R)$ *dans Y,*

(iii) $\widehat{m}(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$.

Alors f est approximable par des morphismes de chaînes.

Démonstration. Pour tout $r \in R$, l'ensemble X_r des points $x \in X$ tels que $\widehat{m}(x)=r$ est ouvert dans X, donc X est la somme topologique des X_r avec $r \neq 0$. Si $\mathcal{V}_r$ est un recouvrement ouvert de X_r, alors $\mathcal{V}=\bigcup_r \mathcal{V}_r$ est un recouvrement ouvert de X et $S(X,\mathcal{V},R)=\bigoplus_r S(X_r,\mathcal{V}_r,R)$. En utilisant cela, il est facile de vérifier que si la restriction de f à X_r est approximable par des morphismes de chaînes pour tout $0 \neq r \in R$, alors f est approximable par des morphismes de chaînes. Nous pouvons donc supposer que la fonction $\widehat{m}$ est constante sur X, et notons encore $\widehat{m}$ cette valeur constante.

Fixons un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X et un recouvrement ouvert $\mathcal{G}$ de Y. Pour $x \in X$, soient $C_1(x),\dots,C_{s(x)}(x)$ les composantes de $f(x)$.

Pour $n \geq 0$, nous construirons un recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{V}_n=\{V_\alpha \,|\, \alpha \in A_n\}$ de X. Nous choisirons les ensembles d'indices A_n deux à deux disjoints et, pour $n \geq 1$, construirons une fonction $\pi_n : A_n \to A_{n-1}$ telle que $V_\alpha \subset V_{\pi_n(\alpha)}$. Pour tout $\alpha \in A=\bigcup_{n=0}^\infty A_n$, nous construirons un entier $s(\alpha)$ et, pour $1 \leq r \leq s(\alpha)$, un ouvert connexe O_α^r de Y ; nous poserons $O_\alpha=\bigcup_{r=1}^{s(\alpha)} O_\alpha^r$ et $P_\alpha=\bigcup\{O_\beta \,|\, \beta \in A_n \text{ et } V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset\}$. Nous voulons que les conditions suivantes soient vérifiées.

(1) Pour tout $\alpha \in A_0$, il existe $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tel que $V_\alpha \subset U_\alpha$ et $P_\alpha \subset \mathrm{St}(f(U_\alpha),\mathcal{G})$.

(2) Pour tout $\alpha \in A$, $O_\alpha^r \cap O_\alpha^{r'}=\emptyset$ pour $r \neq r' \in \{1,\dots,s(\alpha)\}$.

(3) Pour tout $\alpha \in A$, $f(V_\alpha) \subset O_\alpha$ et la fonction $\sum_{C(y) \subset O_\alpha^r} m(C(y))$ est constante sur V_α pour $1 \leq r \leq s(\alpha)$.

(4) Pour tout $n \geq 1$ et tout $\alpha \in A_n$, $P_\alpha \subset O_{\pi_n(\alpha)}$ et $\widetilde{H}(P_\alpha \cap O^r_{\pi_n(\alpha)} | O^r_{\pi_n(\alpha)})=0$ pour $1 \leq r \leq s(\alpha)$.

Soit $\mathcal{U}'$ un recouvrement ouvert de X tel que $\mathrm{St}(\mathcal{U}')$ soit plus fin que $\mathcal{U}$. Pour tout $x \in X$, $\mathrm{St}(f(x), \mathcal{G})$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y. Puisque Y est localement connexe, nous pouvons, pour $1 \leq r \leq s(x)$, trouver un voisinage ouvert connexe O_x^r de $C_r(x)$ vérifiant $O_x^r \subset \mathrm{St}(f(x), \mathcal{G})$ et $O_x^r \cap O_x^{r'} = \emptyset$ si $r \neq r' \in \{1, \ldots, s(x)\}$. Soit $O_x = \bigcup_{r=1}^{s(x)} O_x^r$. Puisque f est une fonction s.c.s. pondérée, nous pouvons trouver un voisinage $V_0(x)$ de x dans X, qui est contenu dans un élément U_x' de $\mathcal{U}'$ et tel que $f(V_0(x)) \subset O_x$ et $m(C_r(x)) = \sum_{C(y) \subset O_x^r} m(C(y))$ pour tout $y \in V_0(x)$ et $1 \leq r \leq s(x)$. Soit $\mathcal{V}_0 = \{V_\alpha \,|\, \alpha \in A_0\}$ un recouvrement ouvert localement fini plus fin que le recouvrement $\{V_0(x) \,|\, x \in X\}$. Pour $\alpha \in A_0$, prenons $x_\alpha \in X$ tel que $V_\alpha \subset V_0(x_\alpha)$, et posons $s(\alpha) = s(x_\alpha)$ et $O_\alpha^r = O_{x_\alpha}^r$ pour $1 \leq r \leq s(\alpha)$. Les conditions (2) et (3) sont vérifiées. Soit $U_\alpha \in \mathcal{U}$ contenant $\mathrm{St}(U_{x_\alpha}', \mathcal{U}')$. Si $V_\beta \cap V_\alpha \neq \emptyset$, alors x_β appartient à U_α et $O_\beta \subset \mathrm{St}(f(x_\beta), \mathcal{G}) \subset \mathrm{St}(f(U_\alpha), \mathcal{G})$, donc $\mathrm{St}(f(U_\alpha), \mathcal{G})$ contient P_α.

Soit $n \geq 1$, et supposons $\mathcal{V}_{n-1}$ construit. Pour obtenir $\mathcal{V}_n$, nous construirons d'abord un recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{V}' = \{V_\gamma' \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ de X, une fonction $\pi : \Gamma \to A_{n-1}$ et, pour $\gamma \in \Gamma$, un ouvert O_γ' de Y de façon que, posant $P_\gamma' = \bigcup\{O_\delta' \,|\, V_\gamma' \cap V_\delta' \neq \emptyset\}$, les conditions suivantes soient vérifiées.

(5) $f(V_\gamma') \subset O_\gamma'$.

(6) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $P_\gamma' \subset O_{\pi(\gamma)}$ et $\widetilde{H}(P_\gamma' \cap O_{\pi(\gamma)} | O_{\pi(\gamma)}) = 0$ pour $1 \leq r \leq s(\pi(\gamma))$.

Pour $x \in X$, soient $A_x = \{\alpha \in A_{n-1} \,|\, x \in V_\alpha\}$ et $L_x = \bigcap_{\alpha \in A_x} O_\alpha$. Puisque $\mathcal{V}_{n-1}$ est localement fini, A_x est fini et, comme $f(V_\alpha) \subset O_\alpha$, L_x est un voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y. Pour $1 \leq u \leq s(x)$, soit L_x^u la composante connexe de L_x contenant $C_u(x)$; c'est un voisinage ouvert de $C_u(x)$ dans Y, donc nous pouvons trouver un voisinage ouvert $Q_u(x)$ de $C_u(x)$, contenu dans L_x^u et tel que $\widetilde{H}(Q_u(x) | L_x^u) = 0$. Quitte à diminuer ces $Q_u(x)$, nous pouvons les supposer deux à deux disjoints. Soit $Q(x) = \bigcup_{u=1}^{s(x)} Q_u(x)$. Notons que, pour tout $\alpha \in A_x$, nous avons

$$\widetilde{H}(Q(x) \cap O_\alpha^r | O_\alpha^r) = 0 \text{ pour } 1 \leq r \leq s(\alpha). \tag{7}$$

En effet, comme Y est localement connexe par arcs, l'ouvert connexe O_α^r est connexe par arcs, donc $\widetilde{H}_0(O_\alpha^r, R) = 0$. Pour $k > 0$, $H_k(Q(x), R)$ est somme directe des $H_k(Q_u(x), R)$, $1 \leq u \leq s(x)$, et $Q_u(x) \subset L_x^u$ est contenu dans l'un des O_α^r, donc $\widetilde{H}_k(Q(x) \cap O_\alpha^r | O_\alpha^r)$ est somme des $\widetilde{H}_k(Q_u(x) | O_\alpha^r)$ tels que $Q_u(x) \subset O_\alpha^r$. Pour un tel u, nous avons $Q_u(x) \subset L_x^u \subset O_\alpha^r$, et $\widetilde{H}_k(Q_u(x) | O_\alpha^r)$ est trivial, étant un quotient du module trivial $\widetilde{H}_k(Q_u(x) | L_x^u)$.

Soit V_x' un voisinage de x dans X, contenu dans $\bigcap_{\alpha \in A_x} V_\alpha$ et tel que $f(V_x') \subset Q(x)$. Soit $\mathcal{W} = \{W_x \,|\, x \in X\}$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que $W_x \subset V'_x$ pour tout x. Prenons pour $\mathcal{V}'$ un recouvrement ouvert localement fini tel que $\mathrm{St}(\mathcal{V}')$ soit plus fin que $\mathcal{W}$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, choisissons un point x_γ de X tel que $\mathrm{St}(V'_\gamma, \mathcal{V}') \subset W_{x_\gamma}$. Posons

$$E_\gamma = \{\delta \in \Gamma \mid V'_\gamma \cap V'_\delta \neq \emptyset\}.$$

Si δ appartient à E_γ, alors W_{x_δ} contient V'_γ ; comme $\mathcal{W}$ est localement fini, E_γ est fini, donc $O'_\gamma = \bigcap_{\delta \in E_\gamma} Q(x_\delta)$ est ouvert dans Y, et nous avons

$$f(V'_\gamma) \subset \bigcap_{\delta \in E_\gamma} f(W_{x_\delta}) \subset \bigcap_{\delta \in E_\gamma} Q(x_\delta) = O'_\gamma.$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, fixons $\pi(\gamma) \in A_{x_\gamma}$. Nous avons $V'_\gamma \subset W_{x_\gamma} \subset V'_{x_\gamma} \subset V_{\pi(\gamma)}$. En outre, si $\delta \in \Gamma$ est tel que $V'_\delta \cap V'_\gamma \neq \emptyset$, alors $\gamma \in E_\delta$, donc $O'_\delta \subset Q(x_\gamma)$. Il en résulte que P'_γ est contenu dans $Q(x_\gamma) \subset L_{x_\gamma} \subset O_{\pi(\gamma)}$, donc, pour $1 \leq r \leq s(\pi(\gamma))$, $\widetilde{H}(P'_\gamma \cap O^r_{\pi(\gamma)} | O^r_{\pi(\gamma)})$ est contenu dans $\widetilde{H}(Q(x_\gamma) \cap O^r_{\pi(\gamma)} | O^r_{\pi(\gamma)})$, et (6) résulte de (7).

Pour $x \in X$, soient $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid x \in V'_\gamma\}$ et $L'_x = \bigcap_{\gamma \in \Gamma_x} O'_\gamma$. Puisque $\mathcal{V}'$ est localement fini, Γ_x est fini et, comme $f(V'_\gamma) \subset O'_\gamma$, L'_γ est un voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y. Nous pouvons trouver, pour $1 \leq r \leq s(x)$, un voisinage ouvert connexe $O^r_x(n)$ de $C_r(x)$ de façon que $O^r_x(n) \subset L'_x$ et $O^r_x(n) \cap O^{r'}_x(n) = \emptyset$ si $r \neq r' \in \{1, \ldots, s(x)\}$. Soit $V_n(x)$ un voisinage de x dans X tel que $f(V_n(x)) \subset \bigcup_{r=1}^{s(x)} O^r_x(n)$ et $m(C_r(x)) = \sum_{C(y) \subset O^r_x(n)} m(C(y))$ pour tout $y \in V_n(x)$ et $1 \leq r \leq s(x)$. Prenons pour $\mathcal{V}_n$ un recouvrement localement fini plus fin que $\mathcal{V}_{n-1}$ et que le recouvrement $\{V_n(x) \mid x \in X\}$. Pour chaque $\alpha \in A_n$, fixons un $x_\alpha \in X$ tel que $V_\alpha \subset V_n(x_\alpha)$. Posant $s(\alpha) = s(x_\alpha)$ et $O^r_\alpha = O^r_{x_\alpha}(n)$ pour $1 \leq r \leq s(\alpha)$, les conditions (2) et (3) sont vérifiées. Fixons un élément $\pi'(\alpha) \in \Gamma_{x_\alpha}$, et posons $\pi_n(\alpha) = \pi(\pi'(\alpha))$. Par construction, nous avons $O_\alpha \subset L'_{x_\alpha} \subset O'_{\pi'(\alpha)}$. Si α et β sont deux éléments de A_n tels que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, alors $\emptyset \neq V_n(x_\alpha) \cap V_n(x_\beta) \subset V'_{\pi'(\alpha)} \cap V'_{\pi'(\beta)}$, ce qui entraîne que P_α est contenu dans $P'_{\pi'(\alpha)}$. La condition (4) résulte alors de (6).

Soit $\Sigma(X)$ la réalisation géométrique du complexe singulier de X. Pour $n \geq 0$, soit Σ_n le sous-complexe de $\Sigma(X)$ réunion des cellules $|\sigma|$ telles que le simplexe singulier σ appartienne à $S(X, \mathcal{V}_n, R)$. Pour $k \geq 0$, soit Σ^k_n le k-squelette de Σ_n. Soit $\eta : C(\Sigma_0, R) \to S(X, \mathcal{V}_0, R)$ l'isomorphisme naturel. Pour tout simplexe singulier σ de $S(X, \mathcal{V}_0, R)$, soit $\hat{\sigma} = \eta^{-1}(\sigma)$; c'est un élément de $C(|\sigma|, R)$. Soit $T = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k_0 \times [k, \infty) \subset \Sigma_0 \times [0, \infty)$; c'est un CW-complexe de cellules $|\sigma_n| = |\sigma| \times \{n\}$ et $|\sigma_{[n,n+1]}| = |\sigma| \times [n, n+1]$, où $|\sigma|$ parcourt les cellules de Σ_0 et $n \geq \dim |\sigma|$. Pour $A \subset \Sigma_0$, soit $T_A = (A \times [0, \infty)) \cap T$. Soit $|K|$ une subdivision simpliciale de Σ_0, et soit $\widetilde{T}$ la subdivision cellulaire de T dont les cellules sont de la forme $|s| \times \{n\}$ et $|s| \times [n, n+1]$, où s est un simplexe de T.

Pour toute cellule $|\sigma|$ de Σ_0, $|\sigma|$ est la réalisation géométrique d'un sous-complexe de K, que nous notons σ_K. Comme expliqué à la section 2, il existe un morphisme de chaînes $\psi : C(\Sigma_0, R) \to C(K, R)$ tel que $\psi(C(|\sigma|, R)) \subset C(\sigma_K, R)$ pour toute cellule $|\sigma|$ de Σ_0.

Pour tout simplexe s de K, $T_{|s|}$ est contractile, et $T_{|s|} \subset T_{|s'|}$ si s est face de s', donc il existe un morphisme de chaînes $\vartheta : C(K, R) \to C(\widetilde{T}, R)$ tel que $\vartheta(s) \in C(T_{|s|}, R)$ pour tout simplexe s de K. Soit $r : \widetilde{T} \to T$ une approximation cellulaire de l'identité telle que $r(T_{|\sigma|}) \subset T_{|\sigma|}$ pour toute cellule $|\sigma|$ de Σ_0. Nous allons construire un morphisme de chaînes $\mu : C(T, R) \to S(Y, R)$ tel que, pour tout $\alpha \in A_0$, $\mu(C(T_{\Sigma(V_\alpha)}, R)) \subset S(P_\alpha, R)$, et nous poserons $\varphi = \mu \circ r_\# \circ \vartheta \circ \psi \circ \eta^{-1}$. Pour tout $\alpha \in A_0$ et tout simplexe singulier σ de V_α, $r_\# \circ \vartheta \circ \psi \circ \eta^{-1}(\sigma)$ appartient à $C(T_{\Sigma(V_\alpha)}, R)$, donc $\varphi(\sigma)$ appartient à $S(P_\alpha, R) \subset S(\mathrm{St}(f(U_\alpha), \mathcal{G}), R)$ d'après (1), d'où le théorème.

Définissons des générateurs σ_n et $\sigma_{[n,n+1]}$ de $C(T, R)$ correspondant aux cellules $|\sigma_n|$ et $|\sigma_{[n,n+1]}|$ comme suit (dans cette définition, nous convenons, pour $\gamma = \sum_i \lambda_i \sigma^i \in C(\Sigma_0, R)$ $(\lambda_i \in R)$, de poser $\gamma \times n = \sum_i \lambda_i \sigma^i_n$ et $\gamma \times [n, n+1] = \sum_i \lambda_i \sigma^i_{[n,n+1]}$). Prenons σ_n de façon que la projection l'envoie sur $\hat{\sigma}$, et définissons $\sigma_{[n,n+1]}$ inductivement de façon que $\partial \sigma_{[n,n+1]} = \sigma_{n+1} - \sigma_n - \partial\sigma \times [n, n+1]$.

Soit ι_n l'inclusion de $S(X, \mathcal{V}_n, R)$ dans $S(X, \mathcal{V}_{n-1}, R)$. Pour $n > 0$, il y a un opérateur de subdivision $Sd_n : S(X, \mathcal{V}_{n-1}, R) \to S(X, \mathcal{V}_n, R)$ et une homotopie h_n de $S(X, \mathcal{V}_{n-1}, R)$ dans lui-même vérifiant $\partial h_n + h_n \partial = \iota_n \circ Sd_n - id$, $Sd_n(\sigma) = \sigma$ si σ appartient à $S(X, \mathcal{V}_n, R)$ et $\|Sd_n(c)\| \cup \|h_n(c)\| \subset \|c\|$ pour toute chaîne $c \in S(X, \mathcal{V}_{n-1}, R)$. Posons $\widetilde{Sd_n} = Sd_n \circ \cdots \circ Sd_1 : S(X, \mathcal{V}_0, R) \to S(X, \mathcal{V}_n, R)$, et notons $\widetilde{Sd_0}$ l'identité de $S(X, \mathcal{V}_0, R)$.

Pour $n \geq 0$, soit $M_n = \Sigma^n_n \times [n, n+1]$, et soit $M = \bigcup_{n=0}^\infty M_n$, de sorte que $M \cap (\Sigma_0 \times \{n\}) = \left(\Sigma^{n-1}_{n-1} \cup \Sigma^n_n\right) \times \{n\}$ pour $n > 0$. Définissons un morphisme de chaînes $\chi : C(T, R) \to C(M, R)$ en posant $\chi(\sigma_n) = \widetilde{Sd_n} \times \{n\}$ et

$$\chi(\sigma_{[n,n+1]}) = \widetilde{Sd_{n+1}}(\sigma) \times [n, n+1] + (h_{n+1} \circ \widetilde{Sd_n}(\sigma)) \times \{n\}.$$

Nous allons construire un morphisme de chaînes $\nu : C(M, R) \to S(Y, R)$, et poserons $\mu = \nu \circ \chi$. Pour tout $n \geq 0$, définissons la restriction de ν à $C(\Sigma^n_n \times \{n\}, R)$ comme suit. Si σ est un 0-simplexe singulier d'image x, fixons un point y^x_r dans chaque composante $C_r(x)$ de $f(x)$ et posons

$$\nu(\sigma_n) = \sum_{r=1}^{s(x)} \frac{m(C_r(x))}{\widehat{m}} y^x_r$$

pour tout n. Cette définition respecte l'augmentation. Si σ est un 1-simplexe singulier de $S(X, \mathcal{V}_n, R)$, il existe $V_\alpha \in \mathcal{V}_n$ tel que $\|\sigma\| \subset V_\alpha$. Soit $\partial\sigma = x_1 - x_0$. D'après (3), nous avons, pour $1 \leq t \leq s(\alpha)$,

$$\sum_{C(x_1) \subset O_\alpha^t} m(C(x_1)) = \sum_{C(x_0) \subset O_\alpha^t} m(C(x_0)),$$

donc, si $J_i^t = \{r \in \{1, \ldots, s(x_i)\} \,|\, C_r(x_i) \subset O_\alpha^t\}$ $(i = 0, 1)$, alors

$$a_t = \frac{1}{\widehat{m}} \left(\sum_{r \in J_i^t} m(C_r(x_1)) y_r^{x_1} - \sum_{r \in J_0^t} m(C_r(x_0)) y_r^{x_0} \right)$$

représente un élément de $\widetilde{H}(O_\alpha^t, R) = 0$ (O_α^t est connexe par arcs), donc il existe une 1-chaîne $b_t \in S(O_\alpha^t, R)$ telle que $\partial b_t = a_t$. Posons $\nu(\sigma) = \sum_{t=1}^{s(\alpha)} b_t$; c'est un élément de $S(O_\alpha, R)$ tel que $\partial\nu(\sigma) = \nu\partial(\sigma)$. Inductivement, supposons que, pour un $1 \leq k < n$, $\nu(\sigma_n)$ ait été défini pour tout k-simplexe singulier σ de $S(X, \mathcal{V}_n, R)$ de façon qu'il existe $\alpha \in A_{n-k+1}$ tel que $\|\sigma\| \subset V_\alpha$ et $\nu(\sigma) \in S(O_\alpha, R)$. Soit σ un $(k+1)$-simplexe singulier de $S(X, \mathcal{V}_n, R)$, et soient σ_i, $0 \leq i \leq k+1$ ses k-faces. Puisque $\mathcal{V}_n$ est plus fin que $\mathcal{V}_{n-k+1}$, il existe $\alpha \in A_{n-k+1}$ tel que $\|\sigma\| \subset V_\alpha$. Pour $0 \leq i \leq k+1$, il existe $\alpha_i \in A_{n-k+1}$ tel que $\|\sigma_i\| \subset V_{\alpha_i}$ et $\nu(\sigma_i) \in S(O_{\alpha_i}, R)$. Comme $\emptyset \neq \|\sigma_i\| \subset \|\sigma\| \subset V_\alpha$, nous avons $V_\alpha \cap V_{\alpha_i} \neq \emptyset$, donc les O_{α_i} sont contenus dans $P_\alpha \subset O_{\pi_{n-k+1}(\alpha)}$, où $\pi_{n-k+1}(\alpha) \in A_{n-k}$. Puisque $\partial\nu(\partial\sigma) = \nu(\partial\partial\sigma) = 0$, $\nu(\partial\sigma)$représente un élément de $H_k(P_\alpha, R)$. Les ouverts $O^t_{\pi_{n-k+1}(\alpha)}$ avec $1 \leq t \leq s(\pi_{n-k+1}(\alpha))$ étant disjoints, $\widetilde{H}_k(P_\alpha | O_{n-k+1}(\alpha))$ est somme directe des $\widetilde{H}_k(P_\alpha \cap O^t_{\pi_{n-k+1}(\alpha)} | O^t_{\pi_{n-k+1}(\alpha)})$, donc est trivial d'après (4), et il existe un élément $\nu(\sigma) \in S(O_{\pi_{n-k+1}(\alpha)}, R)$ tel que $\partial\nu(\sigma) = \nu(\partial\sigma)$.

Puisque $Sd_n(\sigma) = \sigma$ si σ appartient à $\Sigma_{n-1}^{n-1} \cap \Sigma_n^n$, nous pouvons, pour $n > 0$, prolonger ν à $C(M \cap (\Sigma_0 \times \{n\}), R)$ en posant $\nu(\sigma_n) = \nu(Sd_n(\sigma) \times \{n\})$ pour $\sigma_n \in \Sigma_{n-1}^{n-1} \times \{n\}$.

Reste à définir $\nu(\sigma_{[n,n+1]})$ pour un k-simplexe de $S(Y, \mathcal{V}_n, R)$ $(0 \leq k \leq n)$. Si $k = 0$, nous avons $\nu(\sigma_n) = \nu(\sigma_{n+1})$, et nous pouvons prendre $\nu(\sigma_{[n,n+1]}) = 0$. Pour $k > 0$, nous construirons $\nu(\sigma_{[n,n+1]})$ inductivement de façon qu'il existe $\alpha \in A_{n-k}$ tel que $\|\sigma\| \subset V_\alpha$ et $\nu(\sigma_{[n,n+1]}) \in S(O_\alpha, R)$. Par construction de $\nu(\sigma_n)$, il existe $\beta \in A_{n-k+1}$ tel que $\|\sigma\| \subset V_\beta$ et $\nu(\sigma_n) \in S(O_\beta, R)$. Soit $Sd_{n+1}(\sigma) = \sum_{i=1}^{u} \lambda_i \hat{\sigma}_i$, où $\lambda_i \in R$ et $\hat{\sigma}_i$ est un k-simplexe de $S(X, \mathcal{V}_{n+1}, R)$ tel que $\|\hat{\sigma}_i\| \subset \|\sigma\|$. Pour $1 \leq i \leq u$, il existe $\alpha_i \in A_{n-k+2}$ tel que $\|\hat{\sigma}_i\| \subset V_{\alpha_i}$ et $\nu(\hat{\sigma}_i) \in S(O_{\alpha_i}, R)$. Soit $\beta_i = \pi_{n-k+2}(\alpha_i) \in A_{n-k+1}$. Puisque $\emptyset \neq \|\hat{\sigma}_i\| \subset V_{\alpha_i} \cap V_\beta$, nous avons $O_{\alpha_i} \subset O_{\beta_i} \subset P_\beta$, donc $\nu(\sigma_{n+1}) \in S(P_\beta, R)$. Si $k > 1$, et si $\sigma^0, \ldots, \sigma^k$ sont les

$(k-1)$-faces de σ, il existe, pour $0 \le j \le k$, un élément β'_j de A_{n-k+1} tel que $\|\sigma^j\| \subset V_{\beta'_j}$ et $\nu(\sigma^j_{[n,n+1]}) \in S(O_{\beta'_j}, R)$. Puisque $\emptyset \ne \|\sigma^j\| \subset V_{\beta'_j} \cap V_\beta$, nous avons $O_{\beta'_j} \subset P_\beta$, donc $\nu(\partial\sigma \times [n, n+1]) \in S(P_\beta, R)$. Il résulte de tout cela que le cycle $\nu(\partial\sigma_{[n,n+1]})$ est un élément de $S(P_\beta, R)$. Comme $\widetilde{H}(P_\beta | O_{\pi_{n-k+1}(\beta)}) = 0$, il existe un élément $\nu(\partial\sigma_{[n,n+1]}) \in S(O_{\pi_{n-k+1}(\beta)}, R)$ tel que $\partial\nu(\sigma_{[n,n+1]}) = \nu(\partial\sigma_{[n,n+1]})$.

Soit V_α un élément de $\mathcal{V}_0$. Si τ est une cellule de $T_{\Sigma(V_\alpha)}$, alors $\chi(\tau)$ est une combinaison linéaire $\chi(\tau) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \tau_j$, où τ_j correspond à une cellule de $M \cap T_{\Sigma(V_\alpha)}$. Pour tout j, il existe $V_{\alpha_j} \in \mathcal{V}_0$ tel que $\|\tau_j\| \subset T_{V_{\alpha_j}}$ et $\nu(\tau_j) \in S(O_{\alpha_j}, R)$. Puisque τ_j appartient à $T_{\Sigma(V_\alpha)}$, nous avons $V_\alpha \cap V_{\alpha_j} \ne \emptyset$, et il en résulte que $\mu(\tau) = \sum_j \lambda_j \nu(\tau_j)$ appartient à $S(P_\alpha, R)$. Nous avons donc bien $\mu(C(T_{\Sigma(V_\alpha)}, R)) \subset S(P_\alpha, R)$ pour tout $\alpha \in A_0$. $\square$

Si X est un R-rétracte absolu de voisinage algébrique, il est facile de caractériser les sous-ensembles compacts de X ayant la propriété $\mathrm{uv}^\infty(R)$ dans X. Pour tout compact C, nous notons $\check{H}(C, R)$ le module gradué de cohomologie de Čech *réduite* de C à coefficients R.

Lemme. *Soit X un R-rétracte absolu de voisinage algébrique. Un sous-ensemble compact C de X a la propriété* $\mathrm{uv}^\infty(R)$ *dans X si, et seulement si, $\check{H}(X, R) = 0$.*

Démonstration. La proposition 3 (i) de [1] affirme que, pour tout $x \in X$ et tout voisinage U de x dans X, il existe un voisinage V de x contenu dans U et tel que $\widetilde{H}(V|U) = 0$ (i.e. X est localement connexe au sens de l'homologie singulière à coefficients R). Cela entraîne que, pour tout ouvert U de X, la (co)homologie singulière de U à coefficients R est naturellement isomorphe à la (co)homologie de Čech à coefficients R (voir [7] ; ce résultat y est prouvé pour les espaces homologiquement localement connexes sur $\mathbb{Z}$ et tout groupe abélien de coefficients, mais la démonstration s'applique aussi aux espaces homologiquement localement connexes pour l'homologie singulière à coefficient R).

Nous notons $H^*(U, R)$ le module de cohomologie singulière réduite à coefficients R d'un ouvert U de X et, pour $V \subset U$, nous notons $\widetilde{H}^*(U|V)$ l'image de $H^*(U, R)$ dans $H^*(V, R)$ par l'homomorphisme induit par l'inclusion.

Supposons que C ait la propriété $\mathrm{uv}^\infty(R)$ dans X. Si U est un voisinage ouvert de C dans X, il existe un voisinage ouvert V de C contenu dans U et tel que $\widetilde{H}(V|U) = 0$. Le théorème des coefficients universels implique que l'inclusion de V dans U induit aussi l'application nulle sur la cohomologie (singulière, donc aussi de Čech), et la continuité de la cohomologie de Čech entraîne que $\check{H}(C, R) = 0$.

Supposons inversement que $\check{H}(C, R) = 0$. Soit U un voisinage ouvert de C dans X. La proposition 3 (ii) de [1] entraîne l'existence d'un voisinage ouvert

V de C contenu dans U tel que $\widetilde{H}(V|U)$ soit de type fini. Le théorème des coefficients universels implique que $\widetilde{H}^*(U|V)$ est aussi de type fini. La continuité de la cohomologie de Čech garantit alors l'existence d'un voisinage ouvert $W \subset V$ tel que l'homomorphisme induit par l'inclusion de W dans V envoie $\widetilde{H}^*(U|V)$ sur 0, donc $\widetilde{H}^*(U|W) = 0$. Mais alors, toujours par le théorème des coefficients universels, $\widetilde{H}(W|U) = 0$, donc C a la propriété $\mathrm{uv}^\infty(R)$ dans X. $\square$

5. Points fixes. Dans toute cette section, X est un R-rétracte absolu de voisinage algébrique.

Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, l'inclusion de $S(X,\mathcal{U},R)$ dans $S(X,R)$ est une équivalence homotopique, donc induit un isomorphisme sur l'homologie ; nous identifions l'homologie de $S(X,\mathcal{U},R)$ à $H(X,R)$ par cet isomorphisme. Si $\varphi : S(X,\mathcal{U},R) \to S(X,R)$ est un morphisme de chaînes compact, la proposition 3 (ii) de [1] entraîne que l'image de φ_* est un sous-complexe de type fini de $H(X,R)$, ce qui permet de définir le nombre de Lefschetz $\Lambda(\varphi_*)$ de φ_* (voir [2], où nous avons construit un indice de point fixe pour les morphismes de chaînes compacts).

Si $f : X \to X$ est une application multivoque compacte s.c.s. qui est approximable par des morphismes de chaînes compacts, il est possible, comme indiqué dans [3], de lui associer un « nombre de Lefschetz », qui est soit un élément de R, soit l'anneau R. Rappelons cette définition.

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{G}$ deux recouvrements ouverts de X. Pour $i = 1,2$, soient $\mathcal{V}_i$ un recouvrement ouvert de X et $\varphi_i : S(X,\mathcal{V}_i,R) \to S(X,R)$ un morphisme de chaînes compact tels que, pour tout $V_i \in \mathcal{V}_i$, il existe $U_i \in \mathcal{U}$ contenant V_i et vérifiant $\varphi_i(S(V_i,R)) \subset S(\mathrm{St}(f(U_i),\mathcal{G}),R)$. Soit $\mathcal{V}$ le recouvrement ouvert de X formé des ensembles $V_1 \cap V_2$ où V_i appartient à $\mathcal{V}_i$. Pour $i = 1,2$, soit φ'_i la restriction de φ_i à $S(X,\mathcal{V},R)$; alors $\Lambda(\varphi'_{i*}) = \Lambda(\varphi_{i*})$. Pour tout $r \in R$, soit $\varphi_r = r\varphi'_1 + (1-r)\varphi'_2$; c'est un morphisme de chaînes compact de $S(X,\mathcal{V},R)$ dans $S(X,R)$ (qui conserve l'augmentation). Si $V = V_1 \cap V_2$ appartient à $\mathcal{V}$ et si U_1 et U_2 sont comme ci-dessus, alors

$$\begin{aligned}\varphi_r(S(V,R)) \subset S(\mathrm{St}(f(U_1),\mathcal{G}),R) + S(\mathrm{St}(f(U_2),\mathcal{G}),R)&\\ \subset S(f(\mathrm{St}(\mathrm{St}(U_1),\mathcal{U}),\mathcal{G}),R),&\end{aligned}$$

donc φ_r et $\mathcal{V}$ vérifient les conditions de la définition 3 relativement à $\mathrm{St}(\mathcal{U})$ et $\mathcal{G}$. Si $\Lambda(\varphi_{1*}) \neq \Lambda(\varphi_{2*})$,alors

$$\Lambda(\varphi_{r*}) = r\Lambda(\varphi_{1*}) + (1-r)\Lambda(\varphi_{2*})$$

est un élément arbitraire de R. Deux cas sont possibles :

(1) Il existe des recouvrements ouverts $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{G}_0$ et un élément $r_0 \in R$ tels que, si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{G}$ sont des recouvrements ouverts plus fins que $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{G}_0$ respectivement, alors, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ et tout morphisme de chaînes compact $\varphi : S(X, \mathcal{V}, R) \to S(X, R)$ vérifiant les conditions de la définition 3 relativement à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, on a $\Lambda(\varphi_*) = r_0$. Nous posons alors $\Lambda(f) = r_0$.

(2) Quels que soient les recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{G}$ de X et l'élément $r \in R$, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X et un morphisme de chaînes compact $\varphi : S(X, \mathcal{V}, R) \to S(X, R)$ vérifiant les conditons de la définition 3 relativement à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{G}$ et tel que $\Lambda(\varphi_*) = r$. Nous posons alors $\Lambda(f) = R$.

Le théorème suivant est démontré dans [3] pour $R = \mathbb{Q}$, mais l'argument s'applique à tout corps R.

Théorème 4. *Soient X un R-rétracte absolu de voisinage algébrique et $f : X \multimap X$ une fonction multivoque compacte approximable par des morphismes de chaînes compacts. Si $\Lambda(f) \neq 0$, alors f a un point fixe.*

Soit $f : X \to X$ une fonction multivoque compacte R-pondérée dont la fonction de pondération ne s'annule pas. Les résultats des sections 3 et 4 entraînent que si, pour tout $x \in X$, $\check{H}(C, R) = 0$ pour toute composante C de $f(x)$, alors f est approximable par des morphismes de chaînes compacts, donc le nombre de Lefschetz $\Lambda(f)$ est défini. Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate du théorème 4.

Théorème 5. *Soient X un R-rétracte absolu de voisinage algébrique et $f : X \multimap X$ une fonction multivoque compacte pondérée dont la fonction de pondération ne s'annule pas, et telle que $\check{H}(C(x), R) = 0$ pour toute composante d'un des ensembles $f(x)$, $x \in X$. Si $\widetilde{\check{H}}(X, R) = 0$, alors f a un point fixe.*

Le théorème 8 de [1] entraîne que le résultat précédent s'applique en particulier à tous les sous-ensembles convexes métrisables des espaces vectoriels topologiques.

REFERENCES

[1] R. Cauty. Rétractes absolus de voisinage algébriques. *Serdica Math. J.* **31**, *4* (2005), 309–354.

[2] R. Cauty. Indice de point fixe pour les morphismes de chaînes. *Serdica Math. J.* **35**, *3* (2009), 217–250.

[3] R. Cauty. Points fixes des applications compactes dans les espaces ULC. `arXiv:1010.2401`.

[4] G. Darbo. Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per transformazioni plurivalente di bicelle. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **19** (1950), 371–395.

[5] A. Dold. Lectures on Algebraic Topology. Berlin-Heidelberg-New York, Springer Verlag, 1972.

[6] J. B. Giever. On the equivalence of two singular homology theories. *Ann. Math.* (*2*) **51** (1950), 178–191.

[7] S. Mardéšić. Comparison of singular and Čech homology in locally connected spaces. *Michigan Math. J.* **6** (1959), 151–166.

[8] E. H. Spanier. Algebraic Topology. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York etc., McGraw-Hill Book Company, 1966.

Université Paris 6
Institut de mathématiques
4, place Jussieu
75252 Paris cedex 05
e-mail : `cauty@math.jussieu.fr`

Received December 1, 2011
Revised June 6, 2012