

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Mathematical Journal
which is the new series of
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES FONCTIONS PLURISOUHARMONIQUES CONVEXES ET ANALYTIQUES

Jamel Abidi

Communicated by P. Pflug

ABSTRACT. We establish in this paper some new relations between convex, plurisubharmonic and analytic functions in \mathbb{C}^n , $n \geq 1$.

Let $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ be analytic. We prove that

$\{b \in \mathbb{C} : |g + b| \text{ is a convex function in } \mathbb{C}^n\} = \emptyset \text{ or } \{\alpha\} \text{ or } \mathbb{C}$,
where $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Préliminaires et notations. Le but de cet article est d'établir des liens classiques entre les fonctions convexes, les fonctions plurisousharmoniques et les fonctions analytiques dans \mathbb{C}^n , ($n \geq 1$). On étudie aussi certains problèmes reliés à la structure complexe. En particulier, on démontre l'existence d'une équation différentielle reliant les fonctions convexes et les fonctions analytiques dans \mathbb{C}^n . Soient $k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique et $\varphi(z, w) = |w - k(z)|$, pour $(z, w) \in$

2010 *Mathematics Subject Classification*: 32A10, 32A60, 32U05, 32U15, 32T05.

Key words: Analytic convex and plurisubharmonic functions, harmonic function, maximum principle.

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{C} (a \neq b)$ avec $\varphi(\cdot, a)$ et $\varphi(\cdot, b)$ sont convexes sur \mathbb{C}^n . Alors $\varphi(\cdot, w)$ est convexe sur \mathbb{C}^n , pour tout $w \in \mathbb{C}$. Même plus φ est convexe sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. En conséquence, k est une fonction analytique affine sur \mathbb{C}^n . Soient $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique et $v(z, w) = |e^{g(w-\bar{z})}|$ pour $z, w \in \mathbb{C}^n$. On démontre dans ce papier que v est psh sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ si et seulement si g est constante.

Pour $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, on note $u(z, w) = |F(w - \bar{z})|$, pour $z, w \in \mathbb{C}^n$. On démontre que u est psh sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ si et seulement si F appartient à une classe de fonctions qu'on le caractérise. On note l'existence de fonctions $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques avec v_1 n'est pas psh sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ pour tout $n \geq 1$ ($v_1(z, w) = |g(Aw - B\bar{z})|$, $z, w \in \mathbb{C}^n$ et $A, B \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). L'abréviation s.c.s signifie semi-continue supérieurement. m_d est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^d . $\text{sh}(U)$ est l'ensemble des fonctions sousharmoniques sur U . Pour $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{Ré}(f)$ est la partie réelle de f . Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\text{Ré}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de a . $|a|$ est le module du nombre complexe a .

$C_c^\infty(U) = \{\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ et à support compact dans } U\}$ et

$C^l(U) = \{\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ est de classe } C^l \text{ dans } U\}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

$C^0(U) = C(U)$ est l'ensemble des fonctions continues dans U . Pour p polynôme analytique sur \mathbb{C} , $\text{deg}(p)$ est le degré de p . Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $g^{(j)}$ est la dérivée de g d'ordre j par rapport à la variable complexe z . $g' = g^{(1)}, g'' = g^{(2)}, g''' = g^{(3)}$ et $g^{(0)} = g$. Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 , $\Delta(\varphi)$ est le Laplacien de φ . Pour $b \in \mathbb{R}^d$, $\|b\|$ est la norme euclidienne du vecteur b . Pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq j \leq n$, on écrit $z = (z_j, Z_j)$ avec $z_j \in \mathbb{C}$, $Z_j = (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Si $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi(\cdot, Z_j) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ définie par } \varphi(z_j, Z_j) = \varphi(z).$$

Soit G un ouvert de \mathbb{C}^n , $n \geq 1$. $\text{psh}(G)$ et $\text{prh}(G)$ sont respectivement l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques et pluriharmoniques dans G .

Sur la théorie des fonctions harmoniques, n -harmoniques et sousharmoniques on consultera les références [7, 15, 16, 17, 20, 8, 21] et [23].

Sur la théorie des fonctions holomorphes, plurisousharmoniques et leurs extensions on pourra consulter les références [4, 5, 6, 9, 10, 12, 11, 13, 14, 15, 16, 19, 18] et [23].

Sur l'extension des fonctions sousharmoniques et n -sousharmoniques on a les références [4, 14, 19, 21] et [22].

Sur l'étude des fonctions convexes, on pourra consulter Hormander [12], Krantz [16] et Vladimirov [23].

Le théorème suivant nous montre que la fonction $e = \exp$ admet de bonnes applications en analyse réelle et complexe.

Théorème 1. Soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, D domaine dans $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$.
On a les équivalences suivantes

- (i) u est harmonique sur D ;
- (ii) e^{wu} est sousharmonique sur $D, \forall w \in \mathbb{R}$;
- (iii) $(-e^{wu})$ est surharmonique sur $D, \forall w \in \mathbb{R}$;
- (iv) $\exists p$ polynôme de degré impair et à coefficients réels avec $p(w)u$ est sousharmonique sur $D, \forall w \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Notons d'abord que e^{wu} est s.c.s sur D (pour tout $w \in \mathbb{R}$) si et seulement si u est continue sur D .

(ii) implique (i). On a u est continue sur D , de plus

$$\int e^{wu(\xi)} \Delta\varphi(\xi) dm_d(\xi) \geq 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(D), \varphi \geq 0 \text{ et } \forall w \in \mathbb{R}.$$

$$e^{wu} = 1 + wu + \sum_{j \geq 2} \frac{w^j u^j}{j!}.$$

Donc

$$\frac{e^{wu} - 1}{w} = u + \sum_{j \geq 2} \frac{w^{j-1} u^j}{j!} \text{ pour tout } w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \int 1 \Delta\varphi(\xi) dm_d(\xi) = 0.$$

Si $w > 0$, alors $\frac{e^{wu} - 1}{w}$ est sousharmonique sur D . C'est à dire

$$\left[u + w \sum_{j \geq 2} \frac{w^{j-2} u^j}{j!} \right]$$

est sousharmonique sur $D, \forall w \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

$$\int u(\xi) \Delta\varphi(\xi) dm_d(\xi) + w \sum_{j \geq 2} \frac{w^{j-2}}{j!} \int u^j(\xi) \Delta\varphi(\xi) dm_d(\xi) \geq 0, \forall w \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

$$\lim_{w \rightarrow 0, w > 0} \left[\int u(\xi) \Delta\varphi(\xi) dm_d(\xi) + w \sum_{j \geq 2} \frac{w^{j-2}}{j!} \int u^j(\xi) \Delta\varphi(\xi) dm_d(\xi) \right]$$

$$= \int u(\xi) \Delta\varphi(\xi) dm_d(\xi) \geq 0.$$

Donc u est sousharmonique sur D . De la même manière on démontre que u est surharmonique sur D . Ainsi u est harmonique sur D . Donc (ii) implique (i) et par suite on a même (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

(i) implique (iv) est claire. Pour (iv) implique (i), soit p un polynôme à coefficients réels et de degré impair sur \mathbb{R} avec $p(w)u$ est sousharmonique sur $D, \forall w \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(D), \varphi \geq 0$.

$$\int p(w)u(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm_d(\xi) = p(w) \int u(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm_d(\xi) \geq 0, \forall w \in \mathbb{R}.$$

Ecrivons alors $p(w) = a_0 + a_1w + \dots + a_lw^l$ où $a_0, a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}, a_l \neq 0$ et $l \in \mathbb{N}, l$ impair. On obtient alors

$$a_0 \int u(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm_d(\xi) + \dots + a_lw^l \int u(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm_d(\xi) \geq 0, \forall w \in \mathbb{R}.$$

Donc $a_l \int u(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm_d(\xi) = 0$ et par suite $\int u(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm_d(\xi) = 0$ même $\forall \varphi \in C_c^\infty(D), \varphi$ à valeurs réelles et de signe quelconque. Il résultera que u est harmonique sur D . Ainsi on obtient (i) et (iv) sont équivalentes. \square

On a le lemme suivant.

Lemme 1. Soit $u : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction, D domaine de \mathbb{C}^n .

Soit $v(z, w) = |e^{wu(z)}|$, pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Supposons que v est psh sur $D \times \mathbb{C}$. Alors u est prh sur D .

Démonstration. Posons $u = u_1 + iu_2, u_1, u_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $w \in \mathbb{C}, w = w_1 + iw_2, w_1$ et $w_2 \in \mathbb{R}$, on a $|e^{wu}| = e^{(w_1u_1 - w_2u_2)}$ est psh sur $D, \forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

Si $w_2 = 0$ on obtient alors $e^{w_1u_1}$ est psh sur $D, \forall w_1 \in \mathbb{R}$. D'après le théorème 1, on a alors u_1 est harmonique sur D . Utilisant les transformations \mathbb{C} -linéaires bijectives sur \mathbb{C}^n , on démontre que u_1 est prh sur D . Si $w_1 = 0$, on démontre que u_2 est prh sur D . Il résulte que u est prh sur D . En réalité on a v est psh sur $D \times \mathbb{C}$ si et seulement si u est pluriharmonique sur D . \square

Le théorème suivant nous propose de faire des comparaisons et des constatations sur les fonctions considérées.

Théorème 2. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 , D domaine de \mathbb{C}^n . On a les assertions suivantes

(i) $e^{|w-f(z)|}$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ si et seulement si f est prh sur D .

(ii) $e^{|w-f(z)|^2}$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ si et seulement si f est prh sur D .

Cependant

(iii) $e^{|(w-f(z))^2+1|}$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ si et seulement si f est analytique sur D .

Pour la preuve de ce théorème on a besoin du lemme suivant

Lemme 2. Soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction, D domaine de \mathbb{C}^n . Si e^u est psh sur D alors $e^{(u^2)}$ est psh sur D .

Démonstration. Sans perte de généralité on admet que $n = 1$.

Etape 1. u est de classe C^2 dans D . On a $\frac{\partial}{\partial z}(e^{u^2}) = 2u \frac{\partial u}{\partial z} e^{u^2}$.

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}(e^{u^2}) = \left[2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} + 4u^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right] e^{u^2}.$$

D'autre part, $\frac{\partial}{\partial z}(e^u) = \frac{\partial u}{\partial z} e^u$. $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}(e^u) = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right] e^u$. Remarquons que

$$\begin{aligned} 2u \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} + 4u^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 &= 2u \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} + 2u^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + 2u^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \\ &= 2u \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} + u \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right] + 2u^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2. \end{aligned}$$

Soit $z \in D$. Si $u(z) \geq 1$; alors $u(z) \left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right|^2 \geq \left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right|^2$. Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}(z) + u(z) \left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right|^2 \geq \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}(z) + \left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right|^2 \geq 0.$$

Soit alors $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}(e^{u^2(z)}) \geq 0$.

Si $0 \leq u(z) \leq 1$. On a

$$\begin{aligned} 2 \left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right|^2 + 2u(z) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}(z) &\geq 2u(z) \left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right|^2 + 2u(z) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}(z) \\ &\geq 2u(z) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right|^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}(z) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Donc e^{u^2} est sh sur D .

Etape 2. u n'est pas de classe C^2 dans D .

Soit $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ρ radiale, $0 \leq \rho \leq 1$, $\int \rho(\xi) dm_2(\xi) = 1$. Soit

$\rho_\delta(\xi) = \frac{1}{\delta^2} \rho\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$ pour $\delta > 0$ et $\xi \in \mathbb{C}$. On note aussi $D_\delta = \{z \in D : d(z, \partial D) > \delta\}$ où $d(z, \partial D)$ est la distance euclidienne entre z et ∂D (D_δ est ouvert dans D).

Pour $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\rho_{\frac{1}{j}} * e^u$ est sh C^∞ , décroissante vers e^u sur $D_{\frac{1}{j_0}}$ où $j_0 \geq 1 (j \geq j_0)$ avec $D_{\frac{1}{j_0}} \neq \emptyset$.

$$\rho_{\frac{1}{j}} * e^u \geq e^u \geq 1 \text{ sur } D_{\frac{1}{j_0}}.$$

On a $\log(\rho_{\frac{1}{j}} * e^u) \geq 0, C^\infty$ et $e^{[\log(\rho_{\frac{1}{j}} * e^u)]} = \rho_{\frac{1}{j}} * e^u$ est sh sur $D_{\frac{1}{j_0}}$. Donc d'après l'étape 1, $\left(e^{(\log(\rho_{\frac{1}{j}} * e^u))^2} \right)_{j \geq j_0}$ est une suite de fonctions sh et décroissante vers e^{u^2} sur l'ouvert $D_{\frac{1}{j_0}}$. Donc e^{u^2} est sh sur $D_{\frac{1}{j_0}}$ pour tout $j_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, j_0 \geq j_1, j_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme $D_{\frac{1}{j_0}}$ croit vers D si $j_0 \rightarrow +\infty$. On conclut que e^{u^2} est sh dans D . \square

Démonstration du théorème 2. (i) Notons que si $A, B \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{C}$ avec $A\alpha\bar{\alpha} + B\beta\bar{\beta} + 2\text{Ré}(c\bar{\alpha}\beta) \geq 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $|c^2| \leq AB$. Une preuve de ce résultat sera établie dans la suite de notre papier.

On suppose que $n = 1$ pour simplifier. Soit $z_0 \in D$. Montrons que $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0) = 0$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $\left(-\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + a \right) = 0$. Posons aussi

$$v(z, w) = e^{|w+az-f(z)|^2} = u(w + az - f(z)),$$

où $u(w) = e^{|w|^2}$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. v est psh et de classe C^2 d'après le lemme 2. $\forall (z, w) \in D \times \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{w} \partial w}(z, w) &= \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + az - f(z)). \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z}(z, w) &= \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}(w + az - f(z)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \left(-a + \frac{\partial f}{\partial z}(z) \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + az - f(z)) \left(-\bar{a} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z) \right) \left(-a + \frac{\partial f}{\partial z}(z) \right) \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial \zeta}(w + az - f(z)) \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + az - f(z)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z) \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta}^2}(w + az - f(z)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z) \left(-\bar{a} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z) \right) \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(w + az - f(z)) \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{z} \partial z}(z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial w}(z, w) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}(w + az - f(z)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \\ &\quad - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + az - f(z)) \left(-\bar{a} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0, w) &= -\frac{\partial u}{\partial \zeta}(w + az_0 - f(z_0)) \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0) \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + az_0 - f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0) \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(w + az_0 - f(z_0)) \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial w}(z_0, w) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}(w + az_0 - f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

On doit donc avoir

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}(w + az_0 - f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right|^2 \\ &\leq \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + az_0 - f(z_0)) \left[-\frac{\partial u}{\partial \zeta}(w + az_0 - f(z_0)) \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + az_0 - f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0) - \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(w + az_0 - f(z_0)) \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0) \right]. \end{aligned}$$

On obtient alors, $\forall \zeta \in \mathbb{C}$,

$$|\zeta|^4 \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right|^2 \leq |\zeta|^2 \left[|\zeta|^2 \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right|^2 - \bar{\zeta} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0) - \zeta \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0) \right].$$

Donc

$$\bar{\zeta} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z) + \zeta \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{z} \partial z}(z) \leq 0, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \forall z \in D.$$

$$\operatorname{Ré} \left[\bar{\zeta} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z) \right] \leq 0, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \forall z \in D.$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$ sur D . Il résulte que f est harmonique sur D .

(ii) résulte de l'assertion (i).

(iii) Posons $u(w) = e^{|w^2+1|}$, pour $w \in \mathbb{C}$. u est sousharmonique sur \mathbb{C} . u n'est pas convexe sur \mathbb{C} . En effet, supposons que u est convexe sur \mathbb{C} . Remarquons d'abord que $\min(\{u(z) : z \in \mathbb{C}\}) = 1 = u(i) = u(-i)$. Comme u est

convexe sur \mathbb{C} , alors u est constante sur le segment $[-i, i]$ (on pourra vérifier ceci en utilisant la définition de la convexité). $0 \in [-i, i]$, donc on doit avoir $u(0) = 1$. Or $u(0) = e$. Contradiction.

Donc u n'est pas convexe sur \mathbb{C} .

On suppose maintenant que $n = 1$ pour simplifier. En faisant une preuve analogue à celle décrite dans l'assertion (i), on démontre que f est harmonique sur D . Supposons que f n'est pas holomorphe dans D . Posons $v(z, w) = u(w - f(z))$, $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Comme v est psh dans $D \times \mathbb{C}$, alors u est convexe dans \mathbb{C} (et même on a l'équivalence entre ces deux propriétés). Contradiction.

Il résulte que f est analytique dans D .

En réalité (iii) est vraie même si f est continue dans D . Dans ce cas il fallait faire quelques étapes de développements pour avoir la preuve. \square

Théorème 3. *Soit p un polynôme analytique non constant sur \mathbb{C} et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, D domaine dans \mathbb{C}^n . On note $v(z, w) = |p(w - f(z))|$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Si v est psh sur $D \times \mathbb{C}$ alors f est prh sur D .*

Le théorème n'est pas vrai si on remplace p par une fonction g analytique non constante sur \mathbb{C} . Ceci montre l'importance de considérer un polynôme analytique dans ce théorème.

Démonstration. *Cas 1.* p a une unique racine dans \mathbb{C} . Dans ce cas on a $p(\xi) = (A\xi + B)^l$ où $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $B \in \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} |p(w - f(z))|^2 &= |[A(w - f(z)) + B]^l|^2 = |[Aw - Af(z) + B]^l|^2 \\ &= |[Aw - Af(z) + B]|^{2l}. \end{aligned}$$

$$|p(w - f(z))|^2 = |A|^{2l} \left| w - \left(f(z) - \frac{B}{A} \right) \right|^{2l}.$$

C'est clair qu'on pourra montrer que f est continue sur D dans ce cadre (car v est psh sur $D \times \mathbb{C}$) sans l'énoncer comme hypothèse dans le théorème. Posons $k = f - \frac{B}{A}$. On a f est prh sur D si et seulement si k est prh sur D . v est psh sur $D \times \mathbb{C}$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ donc v^2 est psh dans $D \times \mathbb{C}$. Mais v^2 est psh dans $D \times \mathbb{C}$ si et seulement si $|w - k|^{2l}$ est psh dans $D \times \mathbb{C}$. Posons $k = h + is$, h et $s : D \rightarrow \mathbb{R}$ continues. $|w - k|^{2l} = [(w - k)(\bar{w} - \bar{k})]^l = [|w|^2 - (w\bar{k} + \bar{w}k) + |k|^2]^l$. Pour $w \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |w - k|^{2l} &= [w^2 - w(k + \bar{k}) + |k|^2]^l = [w^2 - 2wh + |k|^2]^l \\ &= w^{2l} - 2hlw^{2l-1} + h_{2l-2}w^{2l-2} + \dots + h_0 \end{aligned}$$

où $h_{2l-2}, \dots, h_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues. $|w - k|^{2l}$ est aussi sousharmonique sur D , pour tout $w \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(D)$, $\varphi \geq 0$. En utilisant le problème de la fibration on se ramène à $n = 1$.

$$q(w) = \int |w - k(z)|^{2l} \Delta\varphi(z) dm_2(z) \geq 0, \text{ pour tout } w \in \mathbb{R}.$$

Notons que $\int (w)^{2l} \Delta\varphi(z) dm_2(z) = 0$. Donc

$$q(w) = -2lw^{2l-1} \int h(z) \Delta\varphi(z) dm_2(z) + w^{2l-2} \int h_{2l-2}(z) \Delta\varphi(z) dm_2(z) + \dots + \int h_0(z) \Delta\varphi(z) dm_2(z) \geq 0, \forall w \in \mathbb{R}.$$

Observons alors que q est un polynôme à coefficients réels avec $\deg(q) \leq (2l - 1)$, de plus $q \geq 0$ sur \mathbb{R} et $(2l - 1)$ est impair. Donc le coefficient de $w^{(2l-1)}$ est nul.

Soit $\int h(z) \Delta\varphi(z) dm_2(z) = 0$. Comme h est continue sur D , alors h est harmonique sur D .

Montrons que s est harmonique sur $D \subset \mathbb{C}$. Soit $z^0 \in D, r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, r) \subset D$. Soit $w_1 = (h + is_1 + it)$ holomorphe sur $\overline{D}(z^0, r)$, $h = \text{Ré}(w_1)$, $s_1 : \overline{D}(z^0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique, $t \in \mathbb{R}$.

$$|w_1 - k|^{2l} = |h + is - (h + is_1 + it)|^{2l} = |t + s_1 - s|^{2l} \text{ est sh sur } \overline{D}(z^0, r), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Utilisant la preuve précédente, on montre que $(s_1 - s)$ est harmonique sur $\overline{D}(z^0, r)$. Donc s est harmonique sur $\overline{D}(z^0, r)$, $\forall z^0 \in D$ et $r > 0$ avec $\overline{D}(z^0, r) \subset D$. Il résulte que s est harmonique sur D . Il arrive que k est harmonique sur D .

Cas 2. p admet deux racines distinctes dans \mathbb{C} .

$$p(w) = a_l w^l + a_{l-1} w^{l-1} + \dots + a_0, \quad a_l, a_{l-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_l \neq 0.$$

v^2 est psh sur $D \times \mathbb{C}$. $\forall (z, w) \in D \times \mathbb{C}$,

$$v^2(z, w) = |p(w - f(z))|^2 = |a_l(w - f(z))^l + a_{l-1}(w - f(z))^{l-1} + \dots + a_0|^2.$$

Fixons $w \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} v^2(z, w) &= [a_l(w - f(z))^l + a_{l-1}(w - f(z))^{l-1} + \dots + a_0] \\ &\quad \times [\overline{a}_l(w - \overline{f}(z))^l + \overline{a}_{l-1}(w - \overline{f}(z))^{l-1} + \dots + \overline{a}_0] \\ &= b_{2l} w^{2l} + w^{2l-1} [b_{2l-1}(f(z) + \overline{f}(z)) + c] + b_{2l-2} w^{2l-2} + \dots + b_0 \end{aligned}$$

où $b_{2l-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, $b_{2l-2}, \dots, b_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. D'après la fibration on se ramène à $n = 1$. Maintenant utilisant la preuve du cas 1, on montre que $(f + \overline{f})$ est harmonique sur D .

Aussi si $w \in i\mathbb{R}$, on développe $v^2(z, w)$ et on montre que $(f - \bar{f})$ est harmonique sur D . D'où f est harmonique sur D . \square

L'effet de la deuxième racine de p est très important en analyse complexe. En réalité dans ce cas on montre que f est même holomorphe dans D .

Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Supposons que $|g(w - f)|$ est psh sur \mathbb{C}^2 . A-t-on f est harmonique sur \mathbb{C} ?

La réponse est négative et est justifiée par l'exemple suivant.

Exemple. $g(w) = e^w$, $w \in \mathbb{C}$. Considérons $f(z) = x + iy^4$, pour $z = (x + iy) \in \mathbb{C}$, $x = \text{Ré}(z)$. Posons $w = x_1 + iy_1$, $x_1 = \text{Ré}(w)$. $|g(w - f(z))| = |e^{w-f(z)}| = |e^{(x_1-x)}|$ est psh sur \mathbb{C}^2 , mais f n'est pas harmonique sur \mathbb{C} .

Cependant, si g est un polynôme analytique non constant sur \mathbb{C} la réponse est positive.

Enfin aussi on a l'affirmation suivante. Soit $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non affine. Alors pour toute fonction $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, la condition $\varphi(w - A)$ est prh sur \mathbb{C}^2 implique A est analytique dans \mathbb{C} .

Corollaire 1. Soient p_1, \dots, p_N des polynômes analytiques sur \mathbb{C} avec $\deg(p_1) > \max(\deg(p_2), \dots, \deg(p_N))$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Notons

$$u(z, w) = \sum_{j=1}^N |p_j(w - f(z))|^2,$$

pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$; $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue, D domaine de \mathbb{C}^n , $n \geq 1$.

Supposons que u est psh sur $D \times \mathbb{C}$.

Alors f est prh sur D .

On a l'observation suivante.

Soit $v(z, w) = \sum_{j=1}^N |A_j(w - f(z)) + B_j|^{2m_j}$, pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$, avec

D domaine de \mathbb{C}^n , $(A_j, B_j \in \mathbb{C}, \forall j \in \{1, \dots, N\}, A_1 \neq 0, N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N})$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose que $m_1 > \max(m_2, \dots, m_N)$.

La condition v est psh sur $D \times \mathbb{C}$ implique que f est prh sur D . Cependant L'hypothèse v est convexe sur $D \times \mathbb{C}$ implique que f est affine sur D .

Cette observation nous propose d'étudier les liens entre la convexité (notion réelle) et la plurisousharmonicité (notion complexe).

C'est à dire plus exactement établir les liens entre la convexité réelle et la convexité complexe.

On a aussi les affirmations suivantes.

(a) Soient p et q deux polynômes analytiques sur \mathbb{C} , avec le produit pq n'est pas constant. Soit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ avec $z_0 \neq z_1$ et $p(z_0) = q(z_1) = 0$.

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue où D est un domaine de \mathbb{C}^n . On pose $v(z, w) = |p(w - f(z))q(w - f(z))|$, $v_1(z, w) = |p(w - f(z))|$ et $v_2(z, w) = |q(w - f(z))|$, pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

L'hypothèse v est psh sur $D \times \mathbb{C}$ implique les deux assertions suivantes

a_1) v_1 et v_2 sont psh sur $D \times \mathbb{C}$ (la réciproque n'est pas vraie).

a_2) $\log(v)$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$.

Ce résultat peut servir pour étudier et développer les structures convexes et plurisousharmoniques de quelques fonctions définies dans les domaines de \mathbb{C}^n .

(b) Soit $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On suppose qu'il existe une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ harmonique non holomorphe avec u_1 est psh dans \mathbb{C}^2 , où $u_1(z, w) = u(w - f(z))$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Alors u est convexe sur \mathbb{C} .

2. La convexité et les fonctions analytiques. Le lemme suivant est fondamental dans cette section.

Lemme 3. Soit $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On note $v(z, w) = u(w - \bar{z})$, pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. On a l'équivalence suivante

(i) u est convexe sur \mathbb{C} ;

(ii) v est psh sur \mathbb{C}^2 .

Démonstration. (i) implique (ii). Posons $\varphi(z, w) = w - \bar{z}$. φ est \mathbb{R} -linéaire sur \mathbb{C}^2 et bijective. Comme u est convexe alors $u \circ \varphi$ est convexe sur \mathbb{C}^2 . Donc v est convexe sur \mathbb{C}^2 . Il résulte que v est psh sur \mathbb{C}^2 .

(ii) implique (i). Notons que v est de classe C^2 sur \mathbb{C}^2 .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(v)}{\partial \bar{z} \partial z}(z, w) b_1 \bar{b}_1 + \frac{\partial^2(v)}{\partial \bar{w} \partial w}(z, w) b_2 \bar{b}_2 + \frac{\partial^2(v)}{\partial \bar{w} \partial z}(z, w) b_1 \bar{b}_2 + \frac{\partial^2(v)}{\partial \bar{z} \partial w}(z, w) \bar{b}_1 b_2 \\ &= \frac{\partial^2(u)}{\partial \bar{\xi} \partial \xi}(w - \bar{z}) b_1 \bar{b}_1 + \frac{\partial^2(u)}{\partial \bar{\xi} \partial \xi}(w - \bar{z}) b_2 \bar{b}_2 - \frac{\partial^2(u)}{\partial \bar{\xi}^2}(w - \bar{z}) b_1 \bar{b}_2 - \frac{\partial^2(u)}{\partial \xi^2}(w - \bar{z}) \bar{b}_1 b_2 \geq 0, \end{aligned}$$

pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $(b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$.

Rappelons que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

si $\xi = (x + iy) \in \mathbb{C}$, $x = \text{Ré}(\xi)$ et $y = \text{Im}(\xi)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi} \partial \xi} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(w - \bar{z}) b_1 \bar{b}_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(w - \bar{z}) b_2 \bar{b}_2 \\ & \quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(w - \bar{z}) b_1 \bar{b}_2 \\ & \quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(w - \bar{z}) \bar{b}_1 b_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pour $b_1 = a + ib$, $b_2 = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u)}{\partial y^2} \right) (a^2 + b^2) + \left(\frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u)}{\partial y^2} \right) (a^2 + b^2) \\ & \quad - 2 \operatorname{Ré} \left[\left(\frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial^2(u)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(u)}{\partial y^2} \right) (a^2 - b^2 + 2iab) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Soit encore

$$4 \frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} a^2 + 4 \frac{\partial^2(u)}{\partial y^2} b^2 + 8 \frac{\partial^2(u)}{\partial x \partial y} ab \geq 0.$$

Ainsi on obtient

$$\frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial^2(u)}{\partial y^2} b^2 + 2 \frac{\partial^2(u)}{\partial x \partial y} ab \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Donc u est convexe sur \mathbb{C} . Ce qui termine la preuve du lemme 3. Notons que le lemme 3 est vrai même si u et v sont continues sur \mathbb{C} . \square

Observons que si $u_1 : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est s.c.s et $k(z, w) = u_1(w - z)$ pour $z, w \in \mathbb{C}$. On a u_1 est sh sur \mathbb{C} si et seulement si la fonction k est psh dans \mathbb{C}^2 . Une comparaison entre k et la fonction v du lemme 3, l'absence de la structure complexe permet alors d'affirmer l'hypothèse forte de la convexité de la fonction u .

Corollaire 2. Soit $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction holomorphe affine et non constante. On note $v(z, w) = u(w - g(\bar{z}))$, $\forall (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. On a l'équivalence suivante

(i) u est convexe sur \mathbb{C}^n ;

(ii) v est psh sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme précédent. \square

Observons ici les résultats du corollaire suivant

Corollaire 3. Pour $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques.

(i) $|f|$ est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si la fonction $|f(w - \bar{z})|$ est psh sur \mathbb{C}^2 .

(ii) $|g|$ est convexe sur \mathbb{C}^n si et seulement si $|g(w - \bar{z})|$ est psh sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

(Remarque que $|f|$ peut être n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{C} si f s'annule dans \mathbb{C}).

Il existe des fonctions g_1 et g_2 analytiques sur \mathbb{C} avec $|g_1(w - \bar{z})|^2$ est psh et $|g_2(w - \bar{z})|^2$ n'est pas psh sur \mathbb{C}^2 .

En effet, $g_1(w) = w^2$ vérifie aussi $|g_1(w - \bar{z})|^2$ est psh sur \mathbb{C}^2 .

Pour donner un exemple d'une fonction g_2 on a le lemme suivant

Lemme 4. Pour $w \in \mathbb{C}$, soit $g_2(w) = w^2 - w$. Alors $|g_2(w - \bar{z})|^2$ n'est pas psh sur \mathbb{C}^2 (ce qui implique que $|g_2|^2$ n'est pas convexe sur \mathbb{C}).

Nous concluons alors l'existence de fonctions g_1 et g_2 analytiques sur \mathbb{C} avec $|g_1|^2$ est convexe sur \mathbb{C} et $|g_2|^2$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} .

La preuve de ce lemme résulte du théorème suivant

Théorème 4. a) $|(w - \bar{z})^2|$ est psh dans \mathbb{C}^2 , cependant $|(w - \bar{z})^2 + \epsilon|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 , $\forall \epsilon > 0$ (c'est à dire une petite perturbation change les fonctions psh). En réalité $|(w - \bar{z})^2 + a|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 , $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) $|(w - \bar{z})^2 - (w - \bar{z})|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 , mais $|(w - \bar{z})^2|$ est psh dans \mathbb{C}^2 .

Démonstration. a) Posons $u(z, w) = |(w - \bar{z})^2|$ et $h(z, w) = w - \bar{z}$, $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. $u(z, w) = |h(z, w)|^2$. Mais h est prh sur \mathbb{C}^2 . Donc u est psh sur \mathbb{C}^2 .

Soit $\epsilon > 0$. Posons $v(z, w) = |(w - \bar{z})^2 + \epsilon|$, $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $w_1(z) = -z$. w_1 est analytique dans \mathbb{C} .

$v_1(z) = v(z, w_1(z)) = |-4y^2 + \epsilon|$, où $z = (x + iy)$, $x = \text{Ré}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$. v_1 est C^∞ sur $\mathbb{C} \setminus \{z = (x + iy) \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R} : y \in \{B_1, B_2\}\}, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$. Pour $y \in \left] -\frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \right[$, on a $v_1(z) = -4y^2 + \epsilon$. $\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial \bar{z}}(z) = -2 < 0, \forall z \in \mathbb{C}$ avec $y = \text{Im}(z)$ vérifi $-4y^2 + \epsilon > 0$. Donc v_1 n'est pas sousharmonique sur \mathbb{C} . Il résulte enfin que v n'est pas psh sur \mathbb{C}^2 .

b) Soit $v(z, w) = |(w - \bar{z})^2 + (w - \bar{z})|$. v est continue sur \mathbb{C}^2 . v n'est pas psh sur \mathbb{C}^2 car si $w_1(z) = -z = -(x + iy)$, $x = \text{Ré}(z)$, on a $v_1(z) = v(z, w_1(z)) =$

$|4x^2 - 2x| = 2x - 4x^2$ si $0 < x < \frac{1}{2}$. v_1 est C^∞ sur $D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$. $\forall z \in D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$, $\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial \bar{z}}(z) = -2 < 0$. Donc v_1 n'est pas sousharmonique sur \mathbb{C} . Il arrive que v n'est pas psh sur \mathbb{C}^2 . Enfin on déduit que $|(w - \bar{z})^2 - (w - \bar{z})|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 . \square

Lemme 5. Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique. On pose $v(z, w) = h(w - \bar{z})$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et on fixe $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) h n'est pas une fonction affine sur \mathbb{C} ;
- (ii) v n'est pas psh au voisinage de (z_0, w_0) ;
- (iii) v n'est pas psh au voisinage de tout point de \mathbb{C}^2 ;
- (iv) v n'est ni convexe ni concave au voisinage de tout point de \mathbb{C}^2 ;
- (v) La forme de Levi associée à v définie par

$$L(b, b) = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z} b_1 \bar{b}_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{w} \partial w} b_2 \bar{b}_2 + \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{w} \partial z} b_1 \bar{b}_2 + \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial w} \bar{b}_1 b_2 \right]$$

ne garde pas un signe constant au voisinage de tout point $z \in \mathbb{C}^2$, ($b = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$).

Démonstration. (i) implique (ii). v est psh sur un ouvert G contenant $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$. Comme $\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{w} \partial w} = \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$ sur G et $\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial w}(z, w) = -\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(w - \bar{z})$ pour $(z, w) \in G$. On a v est psh sur G si et seulement si $\text{Ré} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial w}(z, w) \bar{a} b \right] \geq 0$, $\forall (z, w) \in G$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Soit $\text{Ré} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(\xi) \bar{a} b \right] \geq 0$, $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $\forall \xi \in A$, où A est un ouvert non vide et simplement connexe inclus dans \mathbb{C} . Ecrivons alors que $h = g_1 + \bar{g}_1$, $g_1 : A \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. $\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} = g_1'' = 0$, et par suite g_1 est affine. Ainsi h est affine sur \mathbb{C} . Contradiction.

(ii) implique (i) est triviale. Remarquons aussi que les assertions (ii), (iii), (iv) et (v) sont équivalentes. \square

En réalité on a le résultat suivant

Théorème 5. Soit $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , D domaine dans \mathbb{C}^n . Supposons que la forme hermitienne de Levi associée à v est à coefficients constants. Alors v est psh sur D ou v est plurisurharmonique sur D ou v et $(-v)$ ne sont pas psh au voisinage de tout point de D .

Démonstration. On a la forme hermitienne de Levi

$$L(v)(b, b)(z) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}_k \partial z_j}(z) b_j \bar{b}_k$$

ne dépend pas de $z \in D((b, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$. Donc elle est ou bien positive ou bien négative ou bien elle ne garde pas un signe constant lorsque le couple (b, b) varie dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Soit $z^0 \in D$. Si $L(v)(b, b)(z^0) \geq 0$ pour tout $(b, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, comme $L(v)(b, b)$ ne dépend pas de z alors $L(v)(b, b) \geq 0$ sur D . Donc v est psh sur D .

Si $L(v)(b, b)(z^0)$ ne garde pas un signe constant lorsque la variable $(b, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Comme $L(v)(b, b)$ ne dépend pas de $z \in D$ alors $L(v)(b, b)(z)$ ne garde pas un signe constant dans \mathbb{C}^n pour tout $z \in D$. Donc v et $(-v)$ ne sont pas psh au voisinage de tout point $z \in D$. \square

Comme application on a le

Théorème 6. *Soit $u : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction n -harmonique, D domaine dans \mathbb{C}^n . Supposons que la forme hermitienne de Levi associée à u est à coefficients constants. Alors u est prh sur D ou u n'est pas prh au voisinage de tout point de D .*

L'énoncé est aussi vrai si u est harmonique sur D .

Théorème 7. *Soit $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction n -harmonique, $n \geq 1$. Supposons que la forme hermitienne de Levi associée à e^u est à coefficients constants. Alors u est constante sur \mathbb{C}^n .*

Démonstration. Le cas $n = 1$. Notons $u = 2 \log |g|$ où $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique. $e^u = |g^2|$. $\forall z \in \mathbb{C}$, on a $\frac{\partial^2 (e^u)}{\partial \bar{z} \partial z}(z) = |g'(z)|^2 = c$ avec $c \in \mathbb{R}_+$. Donc g est une fonction affine sur \mathbb{C} .

Comme $|g| > 0$ sur \mathbb{C} , alors $g(z) = \gamma, \forall z \in \mathbb{C}$, où $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc $u = \log |\gamma|$ est constante sur \mathbb{C} .

Le cas $n \geq 2$ découle du cas précédent par application du problème de fibration. \square

Notons qu'on a d'autres énoncés dans le cas où $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ est n -harmonique, D domaine de \mathbb{C}^n , ($D \neq \mathbb{C}^n$) et lorsque la forme hermitienne associée à e^u est à coefficients constants dans D .

Théorème 8. *Soit $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ harmonique. On a les assertions suivantes.*

(a) *Supposons que pour toute fonction g analytique sur \mathbb{C}^n , avec $g \neq f$, $\{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = g(z)\}$ est pluripolaire dans \mathbb{C}^n . Alors f est analytique dans \mathbb{C}^n .*

(b) Supposons que f n'est pas analytique sur \mathbb{C}^n . Alors f n'est pas analytique au voisinage de tout point de \mathbb{C}^n . De plus si f est prh sur \mathbb{C}^n , il existe une fonction g_1 analytique sur \mathbb{C}^n avec $E = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = g_1(z)\}$ n'est pas polaire dans \mathbb{C}^n .

Démonstration. (a) Pour $z \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, posons $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ et $\bar{z}^\beta = \bar{z}_1^{\beta_1} \dots \bar{z}_n^{\beta_n}$. Comme f est harmonique sur \mathbb{C}^n , alors $f(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$, pour $z \in \mathbb{C}^n$, $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Supposons que f n'est pas analytique dans \mathbb{C}^n . Il existe donc $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{N}^n$, $\beta_0 \neq 0$ avec $a_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$. Considérons $g(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$, g est analytique dans \mathbb{C}^n et $g \neq f$.

On a, $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $\{z \in \mathbb{C}^n : z_1 = \bar{z}_1, \dots, z_n = \bar{z}_n\} \subset \{z \in \mathbb{C}^n : z_1^{\beta_1} = \bar{z}_1^{\beta_1}, \dots, z_n^{\beta_n} = \bar{z}_n^{\beta_n}\}$. Donc $\{z \in \mathbb{C}^n : z_1 = \bar{z}_1, \dots, z_n = \bar{z}_n\} = \mathbb{R}^n \subset F = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = g(z)\}$. Donc F n'est pas pluripolaire dans \mathbb{C}^n . Contradiction.

Il résulte que $a_{\alpha\beta} = 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\beta \neq 0$.

Soit $f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha 0} z^\alpha$. Ainsi f est analytique dans \mathbb{C}^n .

(b) Supposons que f est analytique sur une boule ouverte $B(\xi, r) \subset \mathbb{C}^n$, $\xi \in \mathbb{C}^n$ et $r > 0$. On considère alors $G = \{z \in \mathbb{C}^n : \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) = 0, \forall j = 1, \dots, n\}$. C'est clair que $G \neq \emptyset$, $G \subset \mathbb{C}^n$, G est fermé dans \mathbb{C}^n . Comme f est analytique réelle sur \mathbb{C}^n , alors $G = \mathbb{C}^n$. Donc f est analytique dans \mathbb{C}^n . Contradiction. \square

On pourra aussi étudier toutes les projections de E sur les droites complexes de \mathbb{C}^n .

Notons que le produit hermitien habituel $\langle \cdot / \cdot \rangle$ sur \mathbb{C}^n Vérifi $|\langle \cdot / \cdot \rangle|$ n'est pas psh au voisinage de tout point de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ si et seulement si $n \geq 2$. Cela nous oblige et nous propose de faire une étude ici. On peut aussi remarquer que le produit hermitien habituel précédent $\langle \cdot / \cdot \rangle$ n'est pas prh au voisinage de tout point de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Ce produit hermitien provient de la norme euclidienne sur \mathbb{C}^n . Cependant cette norme euclidienne est psh sur \mathbb{C}^n . Mais le module du produit hermitien associé $|\langle \cdot / \cdot \rangle|$ n'est pas psh au voisinage de tout point de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ (considérer par exemple une norme qui provient d'un produit hermitien quelconque sur \mathbb{C}^n).

Questions. a) Nature de $|(w - \bar{f}(z))^2 + (w - g(z))|$ si $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sont analytiques?

b) Soit $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. $|F(w - \bar{z})|$ est elle psh dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$?

Trouver les conditions sur F pour que $|F(w - \bar{z})|$ soit psh dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Notons que si $F_1(w) = \exp(w^2), w \in \mathbb{C}$, alors $|F_1(w - \bar{z})|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 . En réalité, si $w = z \in \mathbb{C}, |F_1(w - \bar{z})| = F_1(z - \bar{z}) = \exp(-4y^2)$ qui n'est pas sh dans \mathbb{C} (car c'est une fonction bornée non constante dans $\mathbb{C}, z = x + iy$ avec $y = \text{Im}(z)$).

En plusieurs variables complexes on considère la fonction psh

$$[|(w_1 - \bar{z}_1)^2|^2 + \dots + |(w_n - \bar{z}_n)^2|^2]^{\frac{1}{2}}$$

avec $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, z = (z_1, z_2, \dots, z_n), w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ et $n \geq 2$.

Pour $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})^n$, la fonction

$$[|(w_1 - \bar{z}_1)^2 + \epsilon_1|^2 + \dots + |(w_n - \bar{z}_n)^2 + \epsilon_n|^2]^{\frac{1}{2}}$$

n'est pas psh dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

On commence par énoncer d'abord le résultat suivant.

Lemme 6. (a) Soit $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$. Soit g la fonction analytique définie par $g(z) = z^2 - (a + b)z + ab$ et $u_1(z, w) = |g(w - \bar{z})|$, pour $z, w \in \mathbb{C}$. Alors u_1 n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 .

En conséquence, il existe une fonction v convexe sur \mathbb{C} mais $v(w - g(z))$ n'est pas convexe en $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ (par exemple $v(w) = |w|, w \in \mathbb{C}$).

(b) Soit $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Supposons que pour toute $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $u(w - f(z))$ est convexe sur \mathbb{C}^2 . Alors u est constante.

Démonstration. (a) Posons $v(z, w) = |g(w - \bar{z})|^2 = u_1(z, w)^2$ pour $z, w \in \mathbb{C}$. v est de classe C^∞ sur \mathbb{C}^2 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{w} \partial w} = |g'(w - \bar{z})|^2. \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial w} &= -g''(w - \bar{z})\bar{g}(w - \bar{z}). \end{aligned}$$

Rappelons que $|g|^2$ est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si v est psh sur \mathbb{C}^2 .

La forme de Levi associée à v est

$$\begin{aligned} L(v)(z_0, w_0)(\alpha, \beta) &= |2(w_0 - \bar{z}_0) - (a + b)|^2(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}) - 4\text{Ré}[\bar{g}(w_0 - \bar{z}_0)\bar{\alpha}\beta] \\ &= \text{Ré}[(\bar{a} - \bar{b})^2\bar{\alpha}\beta], \end{aligned}$$

pour $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, avec $w_0 - \bar{z}_0 = \frac{a + b}{2}$.

Remarquons que $L(v)(z_0, w_0)(\alpha, \beta)$ ne garde pas un signe constant lorsque le couple (α, β) vari dans \mathbb{C}^2 car $(\bar{a} - \bar{b}) \neq 0$. En conséquence u_1 n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 .

(b) Pour $w \in \mathbb{C}$, posons $v_1(z) = u(w + z^2)$ et $v(z, \xi) = v_1(\xi - \bar{z}) = u(w + (\xi - \bar{z})^2)$, $(z, \xi) \in \mathbb{C}^2$.

Cas 1. u est de classe C^2 sur \mathbb{C} .

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(z, \xi) = 2 \frac{\partial u}{\partial \zeta}(w + (\xi - \bar{z})^2)(\xi - \bar{z}).$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{\xi} \partial \xi}(z, \xi) = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + (\xi - \bar{z})^2) |\xi - \bar{z}|^2.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z}(z, \xi) = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + (\xi - \bar{z})^2) |\xi - \bar{z}|^2.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial \xi}(z, \xi) = -2 \frac{\partial u}{\partial \zeta}(w + (\xi - \bar{z})^2) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}(w + (\xi - \bar{z})^2)(\xi - \bar{z})^2.$$

La forme hermitienne de Levi associée à v est $L(v)(z, w)(\alpha, \beta)$ est positive ($\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$) si et seulement si

$$\left| 2 \frac{\partial u}{\partial \zeta}(w + (\xi - \bar{z})^2) + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}(w + (\xi - \bar{z})^2)(\xi - \bar{z})^2 \right| \leq 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(w + (\xi - \bar{z})^2) |\xi - \bar{z}|^2.$$

Si $\xi = \bar{z} \in \mathbb{C}$, on a $\frac{\partial u}{\partial \zeta}(w) = 0, \forall w \in \mathbb{C}$. Donc u est constante sur \mathbb{C} .

Cas 2. u n'est pas de classe C^2 dans \mathbb{C} . Soit ρ une fonction standard définie comme dans la preuve du lemme 2. Pour $\delta > 0$, considérons

$$\begin{aligned} u * \rho_\delta(w + (\xi - \bar{z})^2) &= \int u(\zeta) \rho_\delta(w + (\xi - \bar{z})^2 - \zeta) dm_2(\zeta) \\ &= \int u(w + (\xi - \bar{z})^2 + \zeta) \rho_\delta(\zeta) dm_2(\zeta) = A_\delta(z, \xi). \end{aligned}$$

A_δ est convexe et de classe C^∞ sur \mathbb{C}^2 . D'après le cas 1, $u * \rho_\delta$ est constante et comme $(u * \rho_{\frac{1}{j}})_{j \geq 1}$ converge vers u , alors u est constante. \square

Plus exactement, on a

Lemme 7. (a) Soient $A, B \in \mathbb{C}$, l et $m \in \mathbb{N}$. Alors $|A(w - \bar{z})^l + B(w - \bar{z})^m|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 si et seulement si $AB \neq 0$ et ($l \geq 2$ ou $m \geq 2$ et $l \neq m$).

(b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Alors $|\alpha \exp[a(w - \bar{z}) + b] + \beta \exp[c(w - \bar{z}) + d]|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 si et seulement si $\alpha\beta \neq 0$ et ($a \neq c$).

(c) La fonction $u(w) = |\exp(w) + a|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C} pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Théorème 9. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante avec $|g|$ convexe sur \mathbb{C} . Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $|g(z_0)| \leq |g(z)|$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors $g(z_0) = 0$, de plus, $\{z \in \mathbb{C} : g(z) = g(z_0)\} = \{z_0\}$.

Démonstration. Supposons que $|g(z_0)| > 0$. Alors $|g| > 0$ sur \mathbb{C} . Soit donc $g = e^{g_1}$, $g_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. D'après le théorème de Picard, $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset g(\mathbb{C})$. Or $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

L'hypothèse $|g| \geq |g(z_0)|$ sur \mathbb{C} implique $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus D\left(0, \frac{|g(z_0)|}{2}\right)$. Donc $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \setminus D\left(0, \frac{|g(z_0)|}{2}\right)$. Impossible. D'où $g(z_0) = 0$.

Maintenant montrons que $\{z \in \mathbb{C} : g(z) = g(z_0)\} = \{z_0\}$. Supposons que $g(z_1) = g(z_0) = 0$ avec $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Considérons le segment $[z_0, z_1] = \{tz_0 + (1-t)z_1, t \in [0, 1]\}$. On a $\forall z \in [z_0, z_1], z = tz_0 + (1-t)z_1$ avec $t \in [0, 1]$. $0 = |g(z_0)| \leq |g(z)| = |g(tz_0 + (1-t)z_1)| \leq t|g(z_0)| + (1-t)|g(z_1)| \leq t|g(z_0)| + (1-t)|g(z_0)| = |g(z_0)| = 0$. Donc $g(z) = 0 = g(z_0)$. Soit $g(z) = 0$, pour tout $z \in [z_0, z_1]$. Comme $[z_0, z_1]$ est un segment de \mathbb{C} non dénombrable, alors $g = 0$ sur \mathbb{C} . Contradiction.

Ainsi le cardinal de $\{z \in \mathbb{C} : g(z) = g(z_0)\}$ est égale à 1.

Enfin observons que pour toute fonction $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante, avec $|k|$ est convexe sur \mathbb{C} , $\{z \in \mathbb{C} : k(z) = 0\}$ est de cardinal inférieur ou égale à 1. \square

Corollaire 4. Soit $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante avec $|g|$ convexe sur \mathbb{C}^n , $n \geq 2$. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^n$ avec $|g(z_0)| \leq |g(z)|$, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$. Alors $g(z_0) = 0$, et $A = \{z \in \mathbb{C}^n : g(z) = g(z_0) = 0\}$ est un sous ensemble analytique convexe non borné dans \mathbb{C}^n .

Démonstration. Montrons que $g(z_0) = 0$. Supposons que $|g(z_0)| = c > 0$. Donc pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, $|g(z)| \geq c$. Mais g n'est pas constante, donc il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ et $a = (a_j, A_j) \in \mathbb{C}^n$ avec $g(\cdot, A_j)$ non constante sur \mathbb{C} ($a_j \in \mathbb{C}, A_j \in \mathbb{C}^{n-1}$). On suppose pour simplifier que $j = 1$. Il arrive que $g(\cdot, A_1)$ est analytique non constante avec $|g(\cdot, A_1)|$ est convexe sur \mathbb{C} . De plus $|g(\cdot, A_1)| \geq c > 0$ sur \mathbb{C} . D'après la preuve du théorème précédent on déduit que $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \setminus D\left(0, \frac{c}{2}\right)$. Contradiction.

Montrons que A est convexe dans \mathbb{C}^n . Soit $\xi_0, \zeta_0 \in A$. Prouvons que le segment $[\zeta_0, \xi_0] \subset A$. Soit $z \in [\zeta_0, \xi_0]$. $z = t\zeta_0 + (1-t)\xi_0, t \in [0, 1]$. $0 \leq |g(z)| = |g(t\zeta_0 + (1-t)\xi_0)| \leq t|g(\zeta_0)| + (1-t)|g(\xi_0)| \leq t|g(z_0)| + (1-t)|g(z_0)| = 0$. Donc $g(z) = 0$ et par suite $z \in A$. Ainsi $[\zeta_0, \xi_0] \subset A$ et on déduit que A est convexe dans \mathbb{C}^n . \square

Remarque 1. (a) Soit $g(z) = g(z_1, z_2) = (A_1 z_1 + B_1)^{l_1} (A_2 z_2 + B_2)^{l_2}$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{C}$ avec $A_1 A_2 \neq 0$). g est analytique non constante sur \mathbb{C}^2 . Soit $z_0 = \left(\frac{-B_1}{A_1}, \frac{-B_2}{A_2}\right)$. On a $g(z_0) = 0$. Si g

est convexe sur \mathbb{C}^2 , alors $E = \{z \in \mathbb{C}^2 : g(z) = 0\}$ est un sous ensemble convexe dans \mathbb{C}^2 . Mais $E = \left\{ \frac{-B_1}{A_1} \right\} \times \mathbb{C} \cup \mathbb{C} \times \left\{ \frac{-B_2}{A_2} \right\}$ n'est pas convexe dans \mathbb{C}^2 . Donc $|g|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C}^2 .

(b) Soit $f(z) = z^4, z \in \mathbb{C}$. f est analytique dans \mathbb{C} . Posons $v(z, w) = |f(w - \bar{z})|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. On a v est psh sur \mathbb{C}^2 car $v(z, w) = |w - \bar{z}|^4 = |k(z, w)|^4$, où $k(z, w) = (w - \bar{z})$ est prh dans \mathbb{C}^2 . Il résulte que $|f(w - \bar{z} + 1)|$ est psh sur \mathbb{C}^2 . Cependant $|f(w - \bar{z}) + 1|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 . C'est à dire $|f(w)|$ est convexe implique $|f(w + 1)|$ est convexe mais n'implique pas que $|f(w) + 1|$ est convexe dans \mathbb{C} .

2.1. Les polynômes analytiques et les fonctions convexes. On se propose dans cette partie de montrer le résultat suivant

Soit p un polynôme analytique sur \mathbb{C} . Alors $\{b \in \mathbb{C} : |p + b|$ est une fonction convexe sur $\mathbb{C}\} = \{\emptyset\}$ ou $\{\alpha\}$ ou \mathbb{C} (avec $\alpha \in \mathbb{C}$).

Théorème 10. Soit p un polynôme analytique non constant sur \mathbb{C} . On note $v(z, w) = |p(w - \bar{z})|$, pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Alors on a les équivalences suivantes

- (a) v est psh sur \mathbb{C}^2 ;
- (b) $\exists A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exists B \in \mathbb{C}, \exists l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $p(\xi) = (A\xi + B)^l$, pour tout $\xi \in \mathbb{C}$;
- (c) $|p|$ est convexe sur \mathbb{C} .

Démonstration. Claire. \square

Corollaire 5. Pour p polynôme analytique non constant sur $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$, on a l'équivalence suivante

- (a) $|p(w - \bar{z})|$ est psh sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$;
- (b) $p(z) = (A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n + B)^l$, où $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $B \in \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notons que pour la caractérisation des fonctions $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques non constantes avec $\forall g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique et $|g|$ convexe sur \mathbb{C} , alors $|k \circ g|$ est convexe sur \mathbb{C} . On vérifie que $k(\xi) = c\xi^m$, où $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Enfin il arrive que pour toute fonction $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante, $|F^2 + 1|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C} . En conséquence $|F^2(w - \bar{z}) + 1|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 . Ceci nous exhibe une famille importante de fonctions non psh dans \mathbb{C}^2 .

Maintenant on démontre le théorème suivant

Théorème 11. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction, D ouvert convexe dans \mathbb{C}^n . On note $\varphi(z, w) = |w - f(z)|$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

On a les équivalences suivantes

- (i) φ est convexe sur $D \times \mathbb{C}$;
- (ii) $\varphi(\cdot, w)$ est convexe sur $D, \forall w \in \mathbb{C}$;
- (iii) f est une fonction affine sur D .

Démonstration. (i) implique (ii) est claire.

(ii) implique (iii). On a $\varphi(\cdot, w)$ est convexe sur $D, \forall w \in \mathbb{C}$, donc $\varphi(\cdot, w)$ est psh sur $D, \forall w \in \mathbb{C}$. Soit encore $\varphi(\cdot, w)^2 = [|w^2| - \bar{w}f - w\bar{f} + |f^2|]$ est psh sur D . Donc $\varphi(\cdot, w)^2 - |w^2| = [-\bar{w}f - w\bar{f} + |f^2|]$ est psh sur $D, \forall w \in \mathbb{C}$.

Si $w \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(\cdot, w)^2 - w^2 = [-w(f + \bar{f}) + |f^2|]$ est psh sur D . Utilisant le papier de Abidi [1], on démontre que f est pluriharmonique sur D .

Nous rappelons toute fois que si $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique convexe alors k est affine d'après le lemme 11 qui suivra dans la suite de l'article. Remarquons que $\varphi(\cdot, w)^2 - w^2 = [-w(f + \bar{f}) + |f^2|]$ est convexe sur $D, \forall w \in \mathbb{R}$. Donc $(f + \bar{f})$ est convexe sur D et par suite $\text{Ré}(f)$ est convexe sur D .

Si $w \in i\mathbb{R}$ on démontre que $\text{Im}(f)$ est convexe sur D .

Comme $\text{Ré}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont pluriharmoniques sur D , on déduit que $\text{Ré}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des fonctions affines sur D .

(iii) implique (i). f étant affine sur D , donc $q(z, w) = w - f(z)$ est encore affine sur $D \times \mathbb{C}$ et il résulte que $\varphi = |q|$ est convexe sur $D \times \mathbb{C}$ et la preuve du théorème est terminée. \square

Pour q polynôme analytique sur \mathbb{C} , on note $F_q(z, w) = |w - q(z)|$ si $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Caractérisons alors les polynômes p analytiques sur \mathbb{C} avec $\forall \alpha \in \mathbb{C}, F_p(\cdot, \alpha) = |\alpha - p|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} .

Rappelons la propriété suivante. $\forall p$ polynôme analytique sur \mathbb{C} avec $\text{deg}(p) \leq 2$, alors il existe toujours $\beta \in \mathbb{C}$ avec $F_p(\cdot, \beta) = |\beta - p|$ est convexe sur \mathbb{C} . Notons aussi que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe avec $\varphi_1(z, w) = |w - f(z)|$ est convexe sur \mathbb{C}^2 , alors f est un polynôme analytique de degrés $\text{deg}(f) \leq 1$ et même on pourra donner d'autres affirmations plus restrictives.

D'abord l'exemple suivant nous montre l'existence d'un polynôme p analytique avec $\forall \alpha \in \mathbb{C}, |p + \alpha|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} .

Soit $p(w) = w^3 + w$ on a $|p + \alpha|$ n'est pas convexe sur $\mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

On a

Théorème 12. Soit p un polynôme analytique sur \mathbb{C} . On a les équivalences suivantes

- (i) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, |p - \alpha|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} ;
- (ii) $\text{deg}(p) \geq 3$ et p' admet au moins deux racines distinctes dans \mathbb{C} ;

(iii) Il existe $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $p^{(j)}$ n'est pas constant et admet au moins deux racines distinctes dans \mathbb{C} .

Démonstration. (i) implique (ii). Le cas où $\deg(p) \leq 1$ implique que $|p|$ est convexe sur \mathbb{C} . Ce qui contredit (i).

Cas où $\deg(p) = 2$. On a $p(w) = Aw^2 + Bw + C, A, B, C \in \mathbb{C}, A \neq 0$. Alors $|p(w) - M| = |A| \left| w + \frac{B}{2A} \right|^2$ où $M = C - \frac{B^2}{4A}$.

Donc $|p(w) - M|$ est convexe sur \mathbb{C} . Contradiction.

Ainsi on a obtenu $\deg(p) \geq 3$.

Si p' admet une seule racine dans \mathbb{C} . Alors $p'(w) = (\alpha w + \beta)^l, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ et $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$.

Donc $p(w) = (\alpha_1 w + \beta_1)^{l+1} + \gamma$, avec $\alpha_1, \beta_1, \gamma \in \mathbb{C}, \alpha_1 \neq 0$. Remarquons alors dans ce cas que $|p - \gamma| = |(\alpha_1 w + \beta_1)^{l+1}| = |\alpha_1 w + \beta_1|^{l+1}$ est convexe sur \mathbb{C} . Contradiction.

Donc p' admet au moins deux racines distinctes dans \mathbb{C} .

Pour (i) implique (iii) on prend $j = 1$. (iii) implique (ii) est aussi claire.

(ii) implique (i). Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|p - \alpha|$ est convexe sur \mathbb{C} . Alors $p - \alpha$ admet une unique racine dans \mathbb{C} . Soit $p(w) - \alpha = (Aw + B)^l$, avec $A, B \in \mathbb{C}, A \neq 0$ et $l \in \mathbb{N}, l \geq 3$. Par suite $p'(w) = lA(Aw + B)^{l-1}$ admet donc une seule racine dans \mathbb{C} . Contradiction. \square

Remarque 2. Soit p un polynôme analytique sur \mathbb{C} . Notons $\varphi(z, w) = |w - p(z)|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Supposons que $\deg(p) \geq 3$ et p' admet au moins deux racines distinctes dans \mathbb{C} . Alors φ n'est pas convexe sur tout G voisinage de tout point $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ de la forme $G = \mathbb{C} \times D(w, r), r > 0$.

Maintenant caractérisons les polynômes p analytiques sur \mathbb{C} avec la propriété $\exists! \alpha \in \mathbb{C}$ et $\varphi(\cdot, \alpha) = |\alpha - p|$ est convexe sur \mathbb{C} ; $\varphi(z, w) = |w - p(z)|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Dans ce cas la réponse est immédiate d'après le théorème 10, à savoir $p(z) = (Az + B)^l + \alpha, A, B \in \mathbb{C}, A \neq 0, l \in \mathbb{N}, l \geq 2$.

Toute fois on a

Théorème 13. Soit p un polynôme analytique de degré $\deg(p) \geq 2$ sur \mathbb{C} . Posons $\varphi(z_1, w) = |w - p(z_1)|$ et $\varphi_1(z_1, z_2, w) = |w - p(z_2 - \bar{z}_1)|$ pour $(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3$.

Alors φ_1 n'est pas psh dans \mathbb{C}^3 .

En conséquence, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\varphi(\cdot, \alpha) = |\alpha - p|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C} (c'est à dire φ n'est pas convexe dans \mathbb{C}^2).

Démonstration. Supposons que pour tout $w \in \mathbb{C}$, $\varphi(\cdot, w)$ est convexe sur \mathbb{C} . Il résulte que le polynôme p vérifie $\deg(p) \leq 1$. Contradiction. \square

Enfin on a l'énoncé suivant

Théorème 14. *Soit p un polynôme analytique sur \mathbb{C} . $\varphi(z, w) = |w - p(z)|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$ de plus $\varphi(\cdot, a)$ et $\varphi(\cdot, b)$ sont convexes sur \mathbb{C} . Alors $\forall w \in \mathbb{C}, \varphi(\cdot, w) = |w - p|$ est convexe sur \mathbb{C} . De plus φ est convexe sur \mathbb{C}^2 .*

En conséquence, il existe $A, B \in \mathbb{C}$ avec $p(z) = Az + B, \forall z \in \mathbb{C}$.

Enfin on obtient

Lemme 8. *Soit p un polynôme analytique sur \mathbb{C} . $A(p) = \{b \in \mathbb{C} : |b + p| \text{ est une fonction convexe sur } \mathbb{C}\}$. Alors on a uniquement les trois éventualités suivantes*

$A(p) = \{\beta\} (\beta \in \mathbb{C})$ si et seulement si $p(z) = -\beta + (az + b)^l, l \in \mathbb{N}, l \geq 2, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

$A(p) = \emptyset$ si et seulement si $\deg(p) \geq 3$ et p' admet deux racines distinctes dans \mathbb{C} .

$A(p) = \mathbb{C}$ si et seulement si p est un polynôme analytique affine sur \mathbb{C} .

Remarque 3. (a) Soit p un polynôme analytique sur $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. Alors $A(p) = \{b \in \mathbb{C} : |b + p| \text{ est une fonction convexe sur } \mathbb{C}^n\} = \emptyset$ ou $\{a\}$ ou \mathbb{C} (avec $a \in \mathbb{C}$).

Cependant on a le résultat suivant. Pour toute $h : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}$ pluriharmonique, $m \geq 1$. $\{b \in \mathbb{C} : |b + h(z) + \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_n y_n|$ est une fonction convexe sur $\mathbb{C}^m, \forall \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \forall j = 1, \dots, n\} = \emptyset$ ou \mathbb{C} , où si $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, z_j = x_j + iy_j, x_j = \text{Ré}(z_j)$.

(b) Soit p un polynôme analytique avec $\deg(p) \geq 2$ sur \mathbb{C} . $\varphi(z, w) = |w - p(z)|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Alors φ n'est pas convexe dans \mathbb{C}^2 . En conséquence, si $\xi = (z, w) \in \mathbb{C}^2, \zeta = (z_1, w_1) \in \mathbb{C}^2$ et $\varphi_1(z, w, z_1, w_1) = \varphi(\xi - \bar{\zeta}) = |w - \bar{w}_1 - p(z - \bar{z}_1)|$. On a φ_1 n'est pas psh dans \mathbb{C}^4 .

Une question naturelle qu'on se pose est alors que se passe-t-il pour les fonctions $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques ($n \geq 2$)?

2.2. Sur la convexité et les fonctions analytiques.

Théorème 15. *Soient $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique et $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Notons $v(z, w) = |g(w - \bar{z})|$ et $v_1(z, w) = |g(w - \bar{z}) + a|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Supposons que v et v_1 sont psh dans \mathbb{C}^2 . Alors g est une fonction affine sur \mathbb{C} .*

Démonstration. v étant psh dans \mathbb{C}^2 donc v^2 l'est aussi. La forme hermitienne associée à v^2 est donnée par

$$L(v)(z, w)(b_1, b_2) = |g'(w - \bar{z})|^2 b_1 \bar{b}_1 + |g'(w - \bar{z})|^2 b_2 \bar{b}_2 - 2 \operatorname{Ré}[g''(w - \bar{z}) \bar{g}(w - \bar{z}) \bar{b}_1 b_2] \geq 0,$$

$\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$.

Observons en réalité que $L(v)(z, w)(b_1, b_2) \geq 0, \forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$ si et seulement si $\forall \beta \in \mathbb{C}, |\beta| = 1$, on a

$$|g'(\xi)|^2 b_1 \bar{b}_1 + |g'(\xi)|^2 b_2 \bar{b}_2 - 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi) \bar{g}(\xi) \beta \bar{b}_1 b_2] \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{C}, \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$$

(quitte à remplacer b_2 par βb_2 par exemple).

On suppose que g n'est pas constante sur \mathbb{C} . On note $E = \{z \in \mathbb{C} : g(z) = 0\}$. E est un sous-ensemble analytique dans \mathbb{C} . Pour $\xi \in \mathbb{C} \setminus E$, posons $\beta = \frac{g(\xi)}{\bar{g}(\xi)}$. On a $|\beta| = 1$. Il arrive qu'on a la forme suivante

$$\begin{aligned} & |g'(\xi)|^2 b_1 \bar{b}_1 + |g'(\xi)|^2 b_2 \bar{b}_2 - 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi) \bar{g}(\xi) \frac{g(\xi)}{\bar{g}(\xi)} \bar{b}_1 b_2] \\ & = |g'(\xi)|^2 b_1 \bar{b}_1 + |g'(\xi)|^2 b_2 \bar{b}_2 - 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi) g(\xi) \bar{b}_1 b_2] \geq 0, \end{aligned}$$

$\forall \xi \in \mathbb{C} \setminus E, \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$.

Donc

$$(1) \quad |g'(\xi)|^2 b_1 \bar{b}_1 + |g'(\xi)|^2 b_2 \bar{b}_2 - 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi) g(\xi) \bar{b}_1 b_2] \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{C}, \quad \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$$

car $\mathbb{C} \setminus E$ est un ouvert dense dans \mathbb{C} . On note $F = \{z \in \mathbb{C} : g'(z) = 0\}$. F est un sous-ensemble analytique dans \mathbb{C} , car g n'est pas constante.

Pour $\xi \in \mathbb{C} \setminus F$, posons $\alpha_1 = \bar{g}'(\xi) b_1, \alpha_2 = g'(\xi) b_2$. On a donc

$$\alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \alpha_2 \bar{\alpha}_2 - 2 \operatorname{Ré} \left[\frac{g''(\xi) g(\xi)}{(g'(\xi))^2} \bar{\alpha}_1 \alpha_2 \right] \geq 0,$$

$\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$.

Si $\alpha_2 = \alpha_1$ on a

$$\operatorname{Ré} \left[\frac{g''(\xi) g(\xi)}{(g'(\xi))^2} \right] \leq 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{C} \setminus (E \cup F).$$

La fonction $u_1 = \operatorname{Ré} \left[\frac{g'' g}{(g')^2} \right]$ est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ et est majorée sur le domaine $\mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ car $E \cup F$ est fermé polaire dans \mathbb{C} . u_1 se prolonge donc en une fonction sousharmonique majorée sur \mathbb{C} . Donc u_1 est constante. Il

résulte que $\frac{g''g}{(g')^2}$ est constante sur le domaine $\mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ car sa partie réelle est constante sur ce domaine. Donc il existe $c \in \mathbb{C}$ avec $\frac{g''g}{(g')^2} = c$ et par suite

$$(2) \quad g''g = c(g')^2$$

même sur \mathbb{C} car $\mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ est un domaine dense dans \mathbb{C} .

Effectuons aussi le même travail pour v_1 , on doit avoir $(g+a)''(g+a) = c_1[(g+a)']^2$ sur \mathbb{C} , avec $c_1 \in \mathbb{C}$. Donc

$$(3) \quad (g)''(g+a) = c_1[(g)']^2 \text{ sur } \mathbb{C}.$$

Supposons que $c_1 \neq 0$. D'après (2) et (3) on obtient $\frac{g''}{g'} = c_1 \frac{g'}{g+a} = c \frac{g'}{g}$. Comme g n'est pas constante alors $c_1 \neq c$. On obtient donc $g = \frac{ac}{c_1 - c}$ (c'est une constante). Contradiction. Donc $c_1 = 0$ et par suite $\frac{g''}{g'} = 0$ sur \mathbb{C} . Ainsi $g'' = 0$ sur \mathbb{C} et par suite g une fonction affine sur \mathbb{C} . \square

Corollaire 6. Soient $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques et $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Supposons que $|g(w - \bar{f}(z))|$ et $|g(w - \bar{f}(z)) + a|$ sont psh dans \mathbb{C}^2 . Alors g est une fonction affine ou f est constante sur \mathbb{C} .

Démonstration. Claire. \square

Corollaire 7. Soit $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$, de plus $|g+a|$ et $|g+b|$ sont convexes sur \mathbb{C}^n . Alors g est affine sur \mathbb{C}^n .

Démonstration. Pour toute $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ transformation linéaire complexe et bijective, $|goT + a|$ et $|goT + b|$ sont convexes sur \mathbb{C}^n . Donc pour tout $Z_1 \in \mathbb{C}^{n-1}$, $|goT(\cdot, Z_1) + a|$ et $|goT(\cdot, Z_1) + b|$ sont convexes sur \mathbb{C} . D'après le théorème précédent $goT(\cdot, Z_1)$ est une fonction analytique affine sur \mathbb{C} . Enfin, il résulte que g est affine sur \mathbb{C}^n . \square

En réalité on a l'énoncé suivant

Théorème 16. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $|g|$ convexe. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec l'équation $g = a$ admet une unique solution dans \mathbb{C} . Alors $|g - a|$ est convexe dans \mathbb{C} . En conséquence, g est affine sur \mathbb{C} .

Démonstration. $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} , donc d'après le théorème 20 qui suivra $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$g(z) = (Az + B)^l, A, B \in \mathbb{C} \text{ et } l \in \mathbb{N}, \text{ ou } g(z) = e^{\alpha z + \beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Comme $g = a$ admet une seule solution et $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors

$$g(z) = (Az + B)^l, A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Il résulte que $l = 1$. En conséquence, g est une fonction analytique affine sur \mathbb{C} . \square

Remarque 4. Soit $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique.

(a) Soit $A \in \mathbb{C}$. Supposons qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ avec la propriété suivante

$$\forall \xi \in \mathbb{C}, \forall a, b \in \mathbb{C}, |g'(\xi)|^2 a\bar{a} + |g'(\xi)|^2 b\bar{b} + 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi)\bar{g}(\xi)\bar{a}b] + |A|^2 a\bar{a} + |A|^2 b\bar{b} \geq K.$$

Alors $|g|^2$ n'est pas nécessairement une fonction convexe sur \mathbb{C} . Mais g vérifie d'autres propriétés.

(b) Supposons que $|g|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} . Alors il existe trois suites $(\xi_j)_{j \geq 1}, (a_j)_{j \geq 1}, (b_j)_{j \geq 1} \subset \mathbb{C}$ vérifiant

$$(|g'(\xi_j)|^2 a_j \bar{a}_j + |g'(\xi_j)|^2 b_j \bar{b}_j + 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi_j)\bar{g}(\xi_j)\bar{a}_j b_j])$$

tend vers $(-\infty)$ quand j tend vers $(+\infty)$.

(c) Soit $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Supposons que $g \neq 0$ et $|g| \leq |k|$ sur \mathbb{C} . Alors $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si $|k|$ l'est aussi.

Utilisant la structure complexe, en analyse complexe, on a le résultat suivant

Théorème 17. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Supposons que $|g|^2$ est convexe sur \mathbb{C} . Alors $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} .

La démonstration de ce théorème se base sur le lemme suivant.

Lemme 9. Soit $c \in \mathbb{C}$. Alors

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + 2 \operatorname{Ré}[c\bar{\alpha}\beta] \geq 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

si et seulement si $|c| \leq 1$.

Démonstration. Si $c = 0$ le résultat est trivial.

Supposons que $c \neq 0$. Posons $\alpha = c$ et considérons d'abord le cas où $\beta \in \mathbb{R}$. Il arrive que

$$|c|^2 + \beta^2 + 2 \operatorname{Ré}[|c|^2 \beta] \geq 0,$$

c'est à dire

$$(4) \quad \beta^2 + 2|c|^2 \beta + |c|^2 \geq 0, \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

(4) est une équation du second degré en $\beta \in \mathbb{R}$.

Donc $(|c|^2)^2 - |c|^2 = |c|^4 - |c|^2 \leq 0$. Soit encore $|c| \leq 1$.

Réciproquement. On a $|c| \leq 1$.

Rappelons que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{|\beta|^2}{2}$.

Mais $|c\bar{\alpha}\beta| \leq |\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{|\beta|^2}{2}$. Donc $2|c\bar{\alpha}\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Ce qui implique que $2 \operatorname{Ré}[c\bar{\alpha}\beta] \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2$ et remplaçons β par $-\beta$, il résulte alors que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2 \operatorname{Ré}[c\bar{\alpha}\beta] \geq 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Démonstration du théorème 17. Soit $u(z, w) = |g(w - \bar{z})|^2$ pour $z, w \in \mathbb{C}$. Comme $|g|^2$ est convexe sur \mathbb{C} , alors u est psh dans \mathbb{C}^2 .

Si g est constante, alors $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} .

On suppose que g n'est pas constante dans \mathbb{C} . Donc on a

$$|g'(\xi)|^2 \alpha \bar{\alpha} + |g'(\xi)|^2 \beta \bar{\beta} + 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi) \bar{g}(\xi) \alpha \bar{\beta}] \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{C} \text{ et } \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Soit $E = \{\zeta \in \mathbb{C} : g(\zeta) = 0\}$. E est polaire fermé dans \mathbb{C} (en réalité E est de cardinal inférieur à 1).

Remplaçons β par $\frac{g(\xi)}{\bar{g}(\xi)}\beta$ lorsque $\xi \in \mathbb{C} \setminus E$. On obtient donc

$$(5) \quad |g'(\xi)|^2 \alpha \bar{\alpha} + |g'(\xi)|^2 \beta \bar{\beta} + 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi) g(\xi) \alpha \bar{\beta}] \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{C} \setminus E \text{ et } \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Comme $\mathbb{C} \setminus E$ est un ouvert dense dans \mathbb{C} , alors (5) est vraie $\forall \xi \in \mathbb{C}$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Soit $a = \overline{g'(\xi)}\alpha$ et $b = g'(\xi)\beta$ avec $\xi \in \mathbb{C} \setminus F$, où $F = \{\zeta \in \mathbb{C} : g'(\zeta) = 0\}$. F est fermé polaire dans \mathbb{C} , car g' est analytique non constante dans \mathbb{C} . On obtient donc

$$(6) \quad a\bar{a} + b\bar{b} + 2 \operatorname{Ré} \left[\frac{g''(\xi)g(\xi)}{(g'(\xi))^2} \bar{a}b \right] \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{C} \setminus F \text{ et } \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

Cette inégalité est équivalente à $\left| \frac{g''(\xi)g(\xi)}{(g'(\xi))^2} \right| \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{C} \setminus F$.

Mais la fonction $\xi \in \mathbb{C} \setminus F \mapsto \left| \frac{g''(\xi)g(\xi)}{(g'(\xi))^2} \right|$ est sousharmonique bornée sur $\mathbb{C} \setminus F$. Donc elle se prolonge en une fonction sousharmonique et majorée par 1 dans \mathbb{C} et par suite elle est constante sur \mathbb{C} . Donc $g''g = \gamma(g')^2$ sur \mathbb{C} , avec $\gamma \in \mathbb{C}$ et $|\gamma| \leq 1$.

Cas 1. g polynôme analytique sur \mathbb{C} .

$$g(z) = (Az + B)^l, A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, B \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

C'est clair dans ce cas que $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} .

Cas 2. g n'est pas un polynôme. On a

$$(7) \quad g''g = \gamma(g')^2, \quad 0 < |\gamma| \leq 1.$$

Montrons que $|g| > 0$ partout sur \mathbb{C} .

Supposons que $g(z_0) = 0$, avec $z_0 \in \mathbb{C}$. D'après (7), on a $g'(z_0) = 0$. Montrons que $g''(z_0) = 0$. Dérivons l'équation différentielle $g''g = \gamma(g')^2$, on obtient

$$g'''g + g''g' = 2\gamma g'g''.$$

Soit alors

$$g'''g = (2\gamma - 1)g'g''.$$

$$g'''g' = (2\gamma - 1)(g')^2 \frac{g''}{g} = \left(\frac{2\gamma - 1}{\gamma} \right) (g'')^2.$$

On a $\left(\frac{2\gamma - 1}{\gamma} \right) \neq 0$ (car $\left(\frac{2\gamma - 1}{\gamma} \right) = 0$ implique g est un polynôme. Impossible).

Comme $g'(z_0) = 0$, alors $g''(z_0) = 0$. Ainsi comme g n'est pas un polynôme on obtient alors $g^{(l)}(z_0) = 0, \forall l \geq 1$. Donc z_0 est une racine de g d'ordre n n'est pas fini. Contradiction. Ainsi on a $|g| > 0$ sur \mathbb{C} . Soit donc $g = e^k$ avec k est une fonction analytique sur \mathbb{C} . $|g|^2$ est convexe sur \mathbb{C} implique, d'après Abidi [3], k est une fonction affine. Donc en particulier $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} . \square

Ainsi on obtient

Corollaire 8. *Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Alors $|g|$ est convexe si et seulement si $|g|^2$ est convexe dans \mathbb{C} .*

Ce résultat est aussi vrai dans $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. C'est à dire on a

Corollaire 9. *Soient $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique et $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$. Alors $|g|$ est convexe dans \mathbb{C}^n si et seulement si $|g|^\alpha$ l'est aussi.*

Observons aussi que si $g_1, g_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sont analytiques, avec le produit $|g_1 g_2|$ est convexe sur \mathbb{C} , on ne peut pas déduire que $|g_1|$ et $|g_2|$ sont convexes sur \mathbb{C} . Cependant on a

Théorème 18. *Soient $g_1, g_2, \dots, g_N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques, avec le produit $|g_1^{l_1} g_2^{l_2} \dots g_N^{l_N}|$ est convexe sur \mathbb{C}^n et non nul, $l_1, \dots, l_N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que $|g_2^{l_2}|, \dots, |g_N^{l_N}|$ sont convexes dans \mathbb{C}^n .*

Alors $|g_1|$ est convexe dans \mathbb{C}^n .

La preuve résulte de la proposition suivante.

Proposition 1. Soient g_1 et $g_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques, $g_1 g_2 \neq 0, m, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que $|g_1^m g_2^l|$ est convexe dans \mathbb{C}^n .

Alors $|g_1|$ est convexe sur \mathbb{C}^n si et seulement si $|g_2|$ l'est aussi.

La démonstration est une conséquence du théorème 20 qui suivra.

On a aussi

Proposition 2. Soient $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose $L(\xi)(\alpha, \beta) = |g^{(j)}(\xi)|^2 \alpha \bar{\alpha} + |g^{(j)}(\xi)|^2 \beta \bar{\beta} + 2 \operatorname{Ré}[g^{(j+1)}(\xi) \bar{g}^{(j-1)}(\xi) \alpha \bar{\beta}]$ pour $\xi \in \mathbb{C}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

On a les équivalences suivantes

(a) $|g^{(j)}|$ est convexe sur \mathbb{C} ;

(b) Il existe un polynôme p analytique sur \mathbb{C} de degrés $\deg(p) \leq (j - 1)$, avec $|g + p|$ est convexe sur \mathbb{C} ;

(c) $L(\cdot)(\alpha, \beta)$ est sousharmonique sur $\mathbb{C}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

En conséquence, $|g'|$ est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si il existe $c \in \mathbb{C}$ avec $|g + c|$ est convexe sur \mathbb{C} .

Théorème 19. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. On suppose que $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} . Alors $|g'|$ est convexe dans \mathbb{C} .

En conséquence, $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, |g^{(j)}|$ est convexe sur \mathbb{C} .

La réciproque du théorème est fausse. Exemple. Soit $k(z) = z^4 + 1$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a $|k|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} , Cependant $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, |k^{(j)}|$ est convexe sur \mathbb{C} .

Pour $k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, l'énoncé du théorème est aussi vrai si $|k|$ est convexe sur $\mathbb{C}^n, n \geq 2$.

Démonstration. $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} , donc $|g'|$ l'est aussi. Posons $v(z, w) = |g(w - \bar{z})|^2$, pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. v est de classe C^∞ Sur \mathbb{C}^2 . La forme hermitienne de Levi associée à v est donnée par

$$(8) \quad L(v)(z, w)(a, b) = |g'(w - \bar{z})|^2 a \bar{a} + |g'(w - \bar{z})|^2 b \bar{b} - 2 \operatorname{Ré}[g''(w - \bar{z}) \bar{g}(w - \bar{z}) a \bar{b}] \geq 0, \forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

Si g est constante sur \mathbb{C} , alors $|g|$ est convexe, de plus $g' = 0$ et par suite $|g'|$ est convexe sur \mathbb{C} . Supposons que g n'est pas constante dans \mathbb{C} . Considérons $E = \{\xi \in \mathbb{C} : g(\xi) = 0\}$. E est analytique dans \mathbb{C} .

Posons $b = \beta b_1$ avec $\beta = \frac{g(\xi)}{\bar{g}(\xi)}$ pour ξ fixé dans $\mathbb{C} \setminus E$. On a $|\beta| = 1$. (8) devient alors

$$|g'(\xi)|^2 a \bar{a} + |g'(\xi)|^2 b_1 \bar{b}_1 - 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi) g(\xi) \bar{a} b_1] \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{C} \setminus E, \forall (a, b_1) \in \mathbb{C}^2.$$

Mais $\mathbb{C} \setminus E$ est un ouvert dense dans \mathbb{C} , il résulte que

$$|g'(\xi)|^2 a\bar{a} + |g'(\xi)|^2 b\bar{b} - 2 \operatorname{Ré}[g''(\xi)g(\xi)\bar{a}b] \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}, \quad \text{et } \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

D'après la preuve du théorème 17, on a $\left| \frac{g''g}{(g')^2} \right| \leq 1$ sur $\mathbb{C} \setminus F$; $F = \{\zeta \in \mathbb{C} : g'(\zeta) = 0\}$ (F est fermé polaire dans \mathbb{C}). Ainsi $g''g = c(g')^2$ sur \mathbb{C} avec $c \in \mathbb{C}$, $|c| \leq 1$.

Si $c = 0$. Alors g est une fonction analytique affine sur \mathbb{C} . Donc $|g|$ et $|g'|$ sont convexes sur \mathbb{C} .

Cas où $0 < |c| \leq 1$. Considérons l'équation différentielle $g''g = c(g')^2$.

Dérivons, on obtient alors

$$g'''g + g''g' = 2cg'g''.$$

Donc

$$g'''g' = \frac{2c-1}{c}(g'')^2.$$

Si g est un polynôme avec $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} .

$$\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = (Az + B)^l, A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, B \in \mathbb{C} \quad \text{et } l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

$g'(z) = lA(Az + B)^{l-1}$. Remarquons alors que $|g'|$ est convexe sur \mathbb{C} .

Si g n'est pas un polynôme sur \mathbb{C} .

On démontre comme dans la preuve du théorème 17 que $|g| > 0$ sur \mathbb{C} . $g = e^k$ avec $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. $|g|$ est convexe implique que k est affine sur \mathbb{C} . $k(z) = \alpha z + \beta, \forall z \in \mathbb{C}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$. $g'(z) = k'(z)e^{k(z)} = \alpha e^{k(z)}$. Donc $|g'|$ est convexe sur \mathbb{C} . \square

Corollaire 10. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Supposons que $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} . Alors

$$u(z) = (|g'(z)|^2 a\bar{a} + |g'(z)|^2 b\bar{b} - 2 \operatorname{Ré}[g''(z)\bar{g}(z)\bar{a}b])$$

vérifie u est sousharmonique sur \mathbb{C} , $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Démonstration. C'est une conséquence de la preuve du théorème précédent. \square

Théorème 20. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. On note $v(z, w) = |g(w - \bar{z})|$, pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Supposons que v est psh dans \mathbb{C}^2 . Alors $(g(\xi) = (A\xi + B)^l, \forall \xi \in \mathbb{C}$ où $A, B \in \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{N}$) ou $(g(\xi) = e^{(\alpha\xi + \beta)}, \forall \xi \in \mathbb{C}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$).

Démonstration. v étant psh sur \mathbb{C}^2 , donc d'après le lemme 3, $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} .

Si g et un polynôme analytique sur \mathbb{C} . Comme $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} alors $g(\xi) = (A\xi + B)^l$, avec $A, B \in \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{N}$.

Supposons que g n'est pas un polynôme.

Cas 1. $|g| > 0$ sur \mathbb{C} . Dans ce cas on a $g = e^{g_1}$ avec $g_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique.

Comme $|e^{g_1}|$ est convexe alors e^h est convexe sur \mathbb{C} ; $h = \text{Ré}(g_1)$. D'après Abidi [3], h est une fonction affine sur \mathbb{C} . Donc g_1 est une fonction holomorphe affine sur \mathbb{C} . $g_1(\xi) = \alpha\xi + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\xi \in \mathbb{C})$. Donc $g(\xi) = e^{g_1(\xi)} = e^{(\alpha\xi + \beta)}, \forall \xi \in \mathbb{C}$.

Cas 2. g s'annule sur \mathbb{C} . Pour simplifier on suppose que $g \neq 0$ et $g(0) = 0$. Comme $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} et $g(0) = 0$ alors 0 est l'unique racine de g dans \mathbb{C} . 0 est d'ordre $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ainsi on a $g(z) = z^l e^{\varphi(z)}$, avec $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. Montrons dans ce cas que φ est constante dans \mathbb{C} . $\forall z \in \mathbb{C}$, on a $g(z) = z^l e^{\varphi(z)}$ donc $g'(z) = [lz^{(l-1)} + z^l \varphi'(z)] e^{\varphi(z)} = z^{(l-1)} [l + z\varphi'(z)] e^{\varphi(z)}$. $|g'|$ est convexe dans \mathbb{C} , donc g' admet au plus une racine dans \mathbb{C} (car $g' \neq 0$).

$|g^2| = |g|^2$ est convexe dans \mathbb{C} , donc $|(g^2)'|$ est encore convexe dans \mathbb{C} .

$$g^2(z) = z^{2l} e^{2\varphi(z)}.$$

$$(g^2)'(z) = [2lz^{(2l-1)} + 2z^{2l} \varphi'(z)] e^{2\varphi(z)} = 2z^{(2l-1)} [l + z\varphi'(z)] e^{2\varphi(z)}.$$

Comme $(2l - 1) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $|(g^2)'|$ est convexe dans \mathbb{C} , on déduit que $l + z\varphi'(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ (c'est à dire 0 est l'unique racine de $(g^2)'$).

Soit alors $l + z\varphi'(z) = e^{\varphi_1(z)}, \forall z \in \mathbb{C}$, avec $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

Donc $g'(z) = z^{l-1} e^{[\varphi(z) + \varphi_1(z)]}$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Ainsi on obtient

$$g^{(l-1)}(z) = z e^{[\varphi(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_{l-1}(z)]}, \forall z \in \mathbb{C},$$

où $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{l-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes.

Enfin, $g^{(l)}(z) = (1 + z[\varphi'(z) + \varphi'_1(z) + \dots + \varphi'_{l-1}(z)]) e^{[\varphi(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_{l-1}(z)]}$, pour $z \in \mathbb{C}$. $|g^{(l-1)}|$ est convexe dans \mathbb{C} , donc $||g^{(l-1)}|^2|$ l'est aussi. Mais

$$[g^{(l-1)}]^2(z) = z^2 e^{2[\varphi(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_{l-1}(z)]}.$$

Posons $k = [g^{(l-1)}]^2$. k est holomorphe et $|k|$ est convexe sur \mathbb{C} . Donc $|k'|$ est convexe dans \mathbb{C} .

$$\begin{aligned} k'(z) &= [2z + 2z^2(\varphi'(z) + \varphi'_1(z) + \dots + \varphi'_{l-1}(z))] e^{2[\varphi(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_{l-1}(z)]} \\ &= 2z[1 + z(\varphi'(z) + \varphi'_1(z) + \dots + \varphi'_{l-1}(z))] e^{2[\varphi(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_{l-1}(z)]}. \end{aligned}$$

$|k'|$ est convexe dans \mathbb{C} et $k'(0) = 0$, donc 0 est la seule racine de k' dans \mathbb{C} . Ce qui implique que

$$[1 + z(\varphi'(z) + \varphi'_1(z) + \dots + \varphi'_{l-1}(z))] \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc

$$[1 + z(\varphi'(z) + \varphi_1'(z) + \cdots + \varphi_{l-1}'(z))] = e^{\varphi_l(z)},$$

$\varphi_l : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

Soit alors $g^{(l)}(z) = e^{[\varphi(z) + \varphi_1(z) + \cdots + \varphi_{l-1}(z) + \varphi_l(z)]} \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Comme $|g^l|$ est convexe dans \mathbb{C} , donc d'après Abidi [3], la fonction $[\varphi + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{l-1} + \varphi_l]$ est affine holomorphe dans \mathbb{C} .

$g^{(l)}(z) = e^{\alpha z + \beta}, \forall z \in \mathbb{C}$. Montrons que $\alpha = 0$. Supposons que $\alpha \neq 0$.

On a $g^{(l-1)}(z) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha z + \beta} + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$.

Si $l = 1$. $g(z) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha z + \beta} + \gamma$. Mais $g(0) = 0$. Donc $\gamma = -\frac{1}{\alpha} e^{\beta} \neq 0$.

$g(z) = \frac{1}{\alpha} e^{\beta} [e^{\alpha z} - 1]$ et remarquons que $[e^{\alpha z} - 1] = 0$ admet une infinité de solutions en $z \in \mathbb{C}$. Ceci prouve que $|g|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C} . Contradiction. Ainsi $\alpha = 0$. Soit alors $g'(z) = e^{\beta}, \forall z \in \mathbb{C}$. $g(0) = 0$, donc $g(z) = ze^{\beta} = ze^{\varphi(z)}$. Il résulte donc que φ est constante dans \mathbb{C} .

Si $l \geq 2$. On a $g^{(l)}(z) = e^{\alpha z + \beta}$. Montrons alors que $\alpha = 0$. Supposons que $\alpha \neq 0$. Alors $g^{(l-1)}(z) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha z + \beta} + \gamma, \gamma \in \mathbb{C}$. $g^{(l-1)}(0) = 0$ car 0 est racine de g d'ordre l . $g^{(l-1)}(0) = \frac{1}{\alpha} e^{\beta} + \gamma$, donc $\gamma = -\frac{1}{\alpha} e^{\beta}$. $g^{(l-1)}(z) = \frac{1}{\alpha} e^{\beta} [e^{\alpha z} - 1]$, pour $z \in \mathbb{C}$. Notons alors que l'équation $e^{\alpha z} - 1 = 0$ (en z) admet une infinité de solutions dans \mathbb{C} . Donc $|g^{(l-1)}|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C} . Contradiction. Ainsi on obtient $\alpha = 0$. Il arrive que $g^{(l)}(z) = e^{\beta}, (\forall z \in \mathbb{C})$ et par suite la fonction $g^{(l)}$ est constante dans \mathbb{C} . On déduit donc que g est un polynôme analytique non constant sur \mathbb{C} . Comme 0 est racine d'ordre l de g , on aura donc $g(z) = z^l e^{\beta} = z^l e^{\varphi(z)}$. Donc φ est constante dans \mathbb{C} . \square

Corollaire 11. Soit $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. On note $g(z) = (Az + B)^m e^{k(z)}$, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, B \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si (k est constante) ou ($m = 0$ et k est analytique affine dans \mathbb{C}).

Démonstration. Résulte de la preuve du théorème précédent. \square

Corollaire 12. Soit $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $n \geq 2$. Désignons par $\langle \cdot / \cdot \rangle$ le produit hermitien usuel sur \mathbb{C}^n . On a

a) $|g|$ est convexe sur \mathbb{C}^n si et seulement si $(g(\xi) = [\langle \xi / \bar{A} \rangle + B]^l, \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \text{ avec } A \in \mathbb{C}^n, B \in \mathbb{C} \text{ et } l \in \mathbb{N})$ ou $(g(\xi) = e^{(\langle \xi / \bar{\alpha} \rangle + \beta)}, \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}^n \text{ et } \beta \in \mathbb{C})$.

b) Supposons que $g(z) = [(z/A) + B]^l e^{\varphi(z)}$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$, où $A \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $B \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique.

$|g|$ est convexe sur \mathbb{C}^n si et seulement si (φ est constante dans \mathbb{C}^n) ou ($l = 0$ et φ analytique affine sur \mathbb{C}^n).

Observons en réalité qu'on a

Théorème 21. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante. $|g|^2$ est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si $g''g = c(g')^2$ avec $c \in \left\{ 0, \frac{l-1}{l}, 1 : l \in \mathbb{N}, l \geq 2 \right\}$.

Caractérisation.

$c = 0$ si et seulement si g est une fonction analytique affine sur \mathbb{C} .

$c = \frac{l-1}{l}$ si et seulement si $g(z) = (Az + B)^l$, $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $B \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}$ et $l \geq 2$.

$c = 1$ si et seulement si $g(z) = e^{\alpha z + \beta}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{C}$.

Remarquons alors que à partir de cette caractérisation, on a si $|g|^2$ est convexe sur \mathbb{C} , alors $|g'|^2$ est convexe sur \mathbb{C} .

En effet, si g est affine alors $|g'|^2$ est convexe sur \mathbb{C} .

On suppose que g n'est pas affine. Donc $c \in]0, 1[$. Si g est un polynôme de degré l . Alors on pourra vérifier que $c = \frac{l-1}{l}$ ($l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$).

Rappelons qu'on a aussi $g'''g' = \frac{l-2}{l-1}(g'')^2$ sur \mathbb{C} . Mais $0 \leq \frac{2c-1}{c} = \frac{l-2}{l-1} < 1$. Donc $\left| \frac{2c-1}{c} \right| \leq 1$ et ceci implique que $|g'|^2$ est convexe sur \mathbb{C} .

Si g n'est pas un polynôme. On a montré dans ce cas que $g(z) = e^{\alpha z + \beta}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{C}$. Dans ce cas on a $c = 1$. Comme $g'''g' = \frac{2c-1}{c}(g'')^2$ avec $\frac{2c-1}{c} = 1$, alors $|g'|^2$ est convexe sur \mathbb{C} .

Corollaire 13. Il n'existe pas aucune fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante avec $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} et $g''g = \gamma(g')^2$ avec $\gamma \in \overline{D}(0, 1) \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration. Claire. \square

Corollaire 14. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante. Supposons que g vérifie l'équation différentielle $g''g = \gamma(g')^2$ sur \mathbb{C} avec $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| \leq 1$. Alors $\gamma \in \left\{ 0, \frac{l-1}{l}, 1 : l \in \mathbb{N}, l \geq 2 \right\} \subset [0, 1]$.

Remarque 5. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante. On suppose que $|g|^2$ est convexe sur \mathbb{C} . On note $v(z, w) = |g(w - \bar{z})|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

La forme hermitienne de Levi $L(v)(z, w)(a, b)$ associée à v est positive $\forall(z, w) \in \mathbb{C}^2, \forall(a, b) \in \mathbb{C}^2$ si et seulement si

$$|g'(\xi)|^2 a\bar{a} + |g'(\xi)|^2 b\bar{b} - 2 \operatorname{Ré}([2g''(\xi)g(\xi) - (g'(\xi))^2]\bar{a}b) \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{C}, \text{ et } \forall(a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

Mais $|g|^2$ est convexe sur \mathbb{C} . Donc $g''g = \gamma(g')^2$, avec γ est une constante, $\gamma \in [0, 1]$. Considérons alors $\frac{2g''g - (g')^2}{(g')^2} = \frac{2g''g}{(g')^2} - 1$ sur $\mathbb{C} \setminus F$; $F = \{\zeta \in \mathbb{C} : g'(\zeta) = 0\}$. On a $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si $\left| \frac{2g''g}{(g')^2} - 1 \right| \leq 1$ sur $\mathbb{C} \setminus F$. Mais $\left| \frac{2g''g}{(g')^2} - 1 \right| = |2\gamma - 1| \leq 1$. Donc $L(v)(z, w)(a, b) \geq 0, \forall(z, w) \in \mathbb{C}^2, \forall(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Ce qui montre que $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} .

Plus généralement, on a

Théorème 22. *Il n'existe pas aucune fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante et vérifiant $g''g = \gamma(g')^2$ sur \mathbb{C} , de plus ($\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| > 1$).*

Démonstration. Supposons que le théorème n'est pas vrai. Il existe donc $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante avec $g''g = \gamma(g')^2$ sur \mathbb{C} , de plus ($\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| > 1$).

On pourra vérifier que pour tout entier $l \geq 2$, la relation

$$(9) \quad g^{(l+1)}g^{(l-1)} = c_l(g^{(l)})^2 \quad \text{avec} \quad c_l = \frac{l\gamma - (l-1)}{(l-1)\gamma - (l-2)}.$$

Remarquons que $c_l \neq 0$ pour tout $l \geq 2$.

Il résulte alors que $g^{(l-1)}$ n'est pas un polynôme pour tout $l \geq 2$. Dans ce cas notons que $|g| > 0$ sur \mathbb{C} . En effet, si g admet une racine $z_1 \in \mathbb{C}$ d'ordre $l \geq 1$. On a $g''g = \gamma(g')^2, g(z_1) = 0$, donc $g'(z_1) = 0$, soit alors $l \geq 2$. On a $g^{(l-1)}(z_1) = 0$. De la relation (9) on obtient alors $g^{(l)}(z_1) = 0$. En particulier z_1 est racine de g d'ordre supérieur à $(l+1)$. Contradiction. Donc $|g| > 0$ sur \mathbb{C} . $g = e^k$ avec $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Alors k vérifie $k'' + (k')^2 = \gamma(k')^2$. Soit $k'' = (\gamma - 1)(k')^2$ sur \mathbb{C} . On a $k^{(3)} = 2(\gamma - 1)^2(k')^3$. Par récurrence on démontre alors la relation $k^{(j)} = (j-1)!(\gamma - 1)^{j-1}(k')^j$ pour tout $j \geq 2$. On a

$$\sum_{j \geq 0} \frac{k^{(j)}(0)}{j!} z^j = k(0) + zk'(0) + \sum_{j \geq 2} \frac{(\gamma - 1)^{j-1}}{j} (k'(0))^j z^j.$$

Cette série a pour rayon de convergence $(+\infty)$. Donc $k'(0) = 0$. Soit alors k est constante et par suite g est constante sur \mathbb{C} . Contradiction. \square

Observons aussi qu'on a des résultats analogues dans $\mathbb{C}^n, n \geq 2$.

Théorème 23. Soient $g, g_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques non constantes. Posons $u(z, w) = |g(w - \bar{z})|$, $u_1(z, w) = |g_1(w - \bar{z})|$ et $v_\epsilon(z, w) = |g(w - \bar{z}) + \epsilon g_1(w - \bar{z})|$, $\forall \epsilon \in \{-1, 1\}$ et $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Supposons que u, u_1, v_{-1} et v_1 sont psh dans \mathbb{C}^2 . Alors (g et g_1 sont deux fonctions affines sur \mathbb{C}) ou ($g = ag_1$ sur \mathbb{C} , avec $a \in \mathbb{C}$).

Démonstration. Supposons que g est un polynôme analytique. $g(z) = (az + b)^m, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme $|g + g_1|$ et $|g|$ sont convexes dans \mathbb{C} , alors g_1 est un polynôme. $g_1(z) = (cz + d)^l, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, d \in \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Si $m = 1$. Soit $\varphi(z) = (cz + d)^l + (az + b)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Si $l = 1$, alors g et g_1 sont affines dans \mathbb{C} .

Si $l \geq 2$. On montre dans ce cas que $l = 2$. En effet, φ est holomorphe et $|\varphi|$ est convexe dans \mathbb{C} . Donc $|\varphi'|$ est convexe dans \mathbb{C} . $|\varphi'(z)| = |lc(cz + d)^{l-1} + a|$ admet au plus une racine dans \mathbb{C} . Comme $a \neq 0$ alors $l - 1 = 1$, soit $l = 2$.

Montrons que $m = 1$ et $l = 2$ est un cas impossible.

Posons $\xi = cz + d$. Rappelons aussi que pour toute $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique avec $|k|$ est convexe sur \mathbb{C} et $s(z) = \alpha z + \beta$, pour $z \in \mathbb{C} (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$, alors $|kos|$ est convexe dans \mathbb{C} .

On a $\varphi(z) = (cz + d)^2 + (az + b) = \xi^2 + \left[a \frac{\xi - d}{c} + b \right] = \psi(\xi)$. $|\psi|$ est convexe dans \mathbb{C} , donc $\psi(\xi) = (\xi + \beta)^2, \beta \in \mathbb{C}$. Aussi

$$(cz + d)^2 - (az + b) = \varphi_1(z) = \xi^2 - \left[a \frac{\xi - b}{c} + b \right] = \psi_1(\xi).$$

$|\psi_1|$ est convexe dans \mathbb{C} , donc $\psi_1(\xi) = (\xi + \alpha)^2$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On obtient $2\xi^2 = (\xi + \beta)^2 + (\xi + \alpha)^2, \forall \xi \in \mathbb{C}$. Soit $\beta^2 + \alpha^2 = \beta + \alpha = 0$. Ainsi $\alpha = \beta = 0$. Contradiction.

Supposons que $m \geq 2$. Alors $l \geq 2$. Posons $\xi = az + b$. $g(z) + g_1(z) = \xi^m + \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]^l = (\alpha \xi + \beta)^t$, car $|g + g_1|$ est convexe dans $\mathbb{C} (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0, t \in \mathbb{N})$.

$$g(z) - g_1(z) = \xi^m - \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]^l = (\gamma \xi + \delta)^s, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{N}.$$

On suppose que g et g_1 ne sont pas associées, c'est à dire $(ad - bc) \neq 0$.

Si $l < m$. $\xi^m + \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]^l = (\alpha \xi + \beta)^t$. Identifions les coefficients, on obtient $t = m$ et $\alpha^m = 1$. Le coefficient de ξ^{m-1} est $m\alpha^{m-1}\beta$. Si $\beta = 0$. On obtient $\left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]^l = 0$. Contradiction. Donc $\beta \neq 0$. Il résulte alors que

$l = m - 1$. De même $\delta \neq 0$, $s = m$, $\gamma^m = 1$.

$$(10) \quad \xi^m + \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]^{m-1} = (\alpha\xi + \beta)^m$$

$$(11) \quad \xi^m - \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]^{m-1} = (\gamma\xi + \delta)^m.$$

Si $m = 2$, on a $l = 1$. Mais on a montré que ce dernier cas est impossible.

Donc $m \geq 3$. Dérivons (10) alors $(m - 2)$ -fois, on obtient

$$\frac{m!}{2} \xi^2 + \frac{(m-1)!}{2} \left(\frac{c}{a} \right)^{m-2} \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right].$$

Donc

$$\varphi_1(\xi) = m\xi^2 + \left(\frac{c}{a} \right)^{m-2} \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]$$

vérifie $|\varphi_1|$ est convexe dans \mathbb{C} . Donc φ_1 admet une racine double. Il arrive que le discriminant de l'équation du second degré φ_1 est nul. Soit alors

$$(12) \quad \left(\frac{c}{a} \right)^{2m-2} - 4m \left(\frac{c}{a} \right)^{m-2} \left[\frac{-bc}{a} + d \right] = 0.$$

Dérivons (2) aussi à l'ordre $(m-2)$, on obtient une équation du second degré en ξ dont son discriminant est nul. Soit

$$(13) \quad \left(\frac{c}{a} \right)^{2m-2} + 4m \left(\frac{c}{a} \right)^{m-2} \left[\frac{-bc}{a} + d \right] = 0.$$

La somme entre (12) et (13) implique $\frac{c}{a} = 0$. Contradiction.

Ainsi, l'hypothèse qu'on a supposé est fautive et par suite $l \geq m$. On démontre de même que $m \geq l$. D'où $m = l$. On obtient maintenant les équations suivantes

$$(14) \quad \xi^m + \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]^m = (\alpha\xi + \beta)^t$$

$$(15) \quad \xi^m - \left[c \frac{\xi - b}{a} + d \right]^m = (\gamma\xi + \delta)^s.$$

Si $t < m$. Alors $\left(\frac{c}{a} \right)^m = -1$, de plus $s = m$. On vérifie aussi que $t = m - 1$ par identification.

Si $m = 2$ alors $t = 1$. L'équation (15) donne

$$2\xi^2 - 2\frac{c}{a} \left(-\frac{bc}{a} + d \right) \xi - \left(-\frac{bc}{a} + d \right)^2 = (\gamma\xi + \delta)^2.$$

Il résulte que le discriminant réduit du membre à gauche de cette équation du second degré est nul.

$$0 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 + 2 \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 = \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2.$$

Impossible.

Si $m \geq 3$. Dérivons l'équation (15) à l'ordre $(m-2)$. On obtient

$$2\xi^2 - 2 \left(\frac{c}{a}\right)^{m-1} \left(-\frac{bc}{a} + d\right) \xi - \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 = (A\xi + B)^2,$$

avec $A, B \in \mathbb{C}, A \neq 0$. Donc cette équation admet une racine double.

Soit

$$0 = \left(\frac{c}{a}\right)^{2m-2} \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 + 2 \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2.$$

$$\left[2 + \left(\frac{c}{a}\right)^{2m-2}\right] \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 = 0.$$

Mais $\left|\frac{c}{a}\right| = 1$. Il résulte que $-\frac{bc}{a} + d = 0$. Contradiction. Donc $t = m$.

Enfin, on a les équations

$$(16) \quad \xi^m + \left[c\frac{\xi - b}{a} + d\right]^m = (\alpha\xi + \beta)^m$$

$$(17) \quad \xi^m - \left[c\frac{\xi - b}{a} + d\right]^m = (\gamma\xi + \delta)^m.$$

Si $m = 2$. (16) s'écrit de la forme

$$\left[1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] \xi^2 + 2\frac{c}{a} \left(-\frac{bc}{a} + d\right) \xi + \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 = (\alpha\xi + \beta)^2.$$

Donc le discriminant réduit du membre à gauche de cette équation du second degré est nul.

$$0 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 = -\left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 \neq 0.$$

Contradiction.

Si $m \geq 3$. On dérive l'équation (16) à l'ordre $(m - 2)$, on obtient

$$\left[1 + \left(\frac{c}{a}\right)^m\right] \xi^2 + 2 \left(\frac{c}{a}\right)^{m-1} \left(-\frac{bc}{a} + d\right) \xi + \left(\frac{c}{a}\right)^{m-2} \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 = (A\xi + B)^2,$$

avec $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $B \in \mathbb{C}$. Donc le discriminant réduit du membre à gauche de cette équation du second degré est nul.

Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{c}{a}\right)^{2m-2} \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^{m-2} \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 \left[1 + \left(\frac{c}{a}\right)^m\right] \\ &= -\left(\frac{c}{a}\right)^{m-2} \left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2. \end{aligned}$$

$\frac{c}{a} \neq 0$ et $\left(-\frac{bc}{a} + d\right)^2 \neq 0$. Contradiction.

Ainsi, si $m \geq 2$ ou $l \geq 2$, g et g_1 sont associées. C'est à dire, il existe $\eta \in \mathbb{C}$ avec $g_1 = \eta g$.

Le cas où g n'est pas un polynôme se traite de manière analogue. \square

Dans \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, les résultats obtenus dans ce théorème restent vrais.

Corollaire 15. *Soient $g, g_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques non constantes. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante avec $|g(w - \bar{f}(z))|$, $|g_1(w - \bar{f}(z))|$ et $|g(w - \bar{f}(z)) + \epsilon g_1(w - \bar{f}(z))|$ sont psh dans \mathbb{C}^2 , $\forall \epsilon \in \{-1, 1\}$. Alors (g et g_1 sont deux fonctions affines sur \mathbb{C}) ou ($g = ag_1$ sur \mathbb{C} , avec $a \in \mathbb{C}$).*

Démonstration. Claire. \square

Concernant l'approximation on a

Théorème 24. *Soit $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, avec $|g|$ est convexe sur \mathbb{C}^n . Alors il existe une suite de polynômes $(p_j)_{j \geq 1}$ analytiques sur \mathbb{C}^n convergeant uniformément sur les compacts de \mathbb{C}^n vers g , de plus $|p_j|$ est convexe sur \mathbb{C}^n pour tout $j \geq 1$.*

Démonstration. Sans perte de généralité on suppose que g n'est pas un polynôme sur \mathbb{C}^n .

Désignons par $\langle \cdot / \cdot \rangle$ le produit hermitien usuel sur \mathbb{C}^n . Alors $g(z) = e^{\langle (z/\alpha) + \beta \rangle}$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$, où $\alpha \in \mathbb{C}^n$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

Soit $p_j(z) = \left(1 + \frac{\langle z/\alpha \rangle + \beta}{j}\right)^j$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ et $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. C'est clair que $|p_j|$ est convexe sur \mathbb{C}^n et la suite $(p_j)_{j \geq 1}$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{C}^n vers g . \square

Théorème 25. *Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique. Supposons que $u(z_1, z_2) = h(z_2 - \bar{z}_1)$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 , $f = (f_1, f_2) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^2$ continue et $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors on a*

(a) La fonction $u(w - f) = h(w_2 - f_2 - \overline{w_1} + \overline{f_1})$ n'est pas psh sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2$ si f est analytique sur \mathbb{C}^n .

(b) La fonction $v_1(\xi, \zeta, w) = h(w_2 - f_2(\zeta) - \overline{w_1} + \overline{f_1}(\xi))$ est psh en $(\xi, w_1) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ implique f_1 est holomorphe sur \mathbb{C}^n .

(c) La fonction $v_2(\xi, \zeta, w) = h(w_2 - f_2(\zeta) - \overline{w_1} + \overline{f_1}(\xi))$ est psh en $(\zeta, w_2) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ implique f_2 est holomorphe sur \mathbb{C}^n .

(d) La fonction $v(\xi, \zeta, w) = h(w_2 - f_2(\zeta) - \overline{w_1} + \overline{f_1}(\xi))$ est psh en $(\xi, w_1) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ et aussi psh en $(\zeta, w_2) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ implique f_1 et f_2 sont holomorphes sur \mathbb{C}^n .

Démonstration. C'est une conséquence du papier de Abidi-Ben Yattou [2]. □

Interprétons alors les résultats de la convexité en terme des coefficients des séries associées aux fonctions considérées.

En réalité la question est la suivante. Soit $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ une série entière et vérifiant $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} . Peut on alors construire un nombre non nul complexe b en fonctions des coefficients $a_j (j \in \mathbb{N})$ avec $|g + b|$ est convexe dans \mathbb{C} (ou $|g(w - \bar{z})|$ et $|g(w - \bar{z}) + b|$ sont psh dans \mathbb{C}^2)?

Si $a_2 \neq 0$. Le résultat est alors $\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, |g + b|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C} . Si $a_2 = 0$. On étudie a_3 et ainsi de suite.

Peut-on remplacer la suite $(a_j)_{j \geq 0}$ par une suite $(c_j)_{j \geq 0}$ avec $|a_j| = |c_j|$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et de sorte que $|g_1(w - \bar{z})|$ et $|g_1(w - \bar{z}) + b|$ sont psh dans \mathbb{C}^2 avec $g_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Notons alors que la réponse est négative ici.

Remarque 6. Soient $k_1, k_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques non constantes. On note $u_1(z, w) = |k_1(w - \bar{z})|, u_2(z, w) = |k_2(w - \bar{z})|, u(z, w) = |k_1(w - \bar{z}) + k_2(w - \bar{z})|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Observons que si u_1 et u_2 sont psh dans \mathbb{C}^2 ceci n'implique pas que u est psh dans \mathbb{C}^2 .

Exemple. $k_1(z) = z^6, k_2(z) = 2$ pour $z \in \mathbb{C}$. $u_1(z, w) = |k_1(w - \bar{z})| = |(w - \bar{z})^6| = |w - \bar{z}|^6$ est donc une fonction psh dans \mathbb{C}^2 . $u_2(z, w) = |k_2(w - \bar{z})| = 2$ est psh dans \mathbb{C}^2 . Cependant $u(z, w) = |k_1(w - \bar{z}) + k_2(w - \bar{z})| = |(w - \bar{z})^6 + 2|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 . En effet, pour $w = z \in \mathbb{C}, u(z, z) = s(z) = |(2iy)^6 + 2| = 2|32y^6 - 1|$ si $z = (x + iy) \in \mathbb{C}, y = \text{Im}(z)$.

Mais si $y \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$, $s(z) = 2(1 - 32y^6)$ et par suite $\Delta(s)(z) < 0$. Donc s n'est pas sousharmonique dans \mathbb{C} .

On déduit que u n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 . Cependant on a

Corollaire 16. Soient $g_1, g_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques non constantes. On note $u_1(z, w) = |g_1(w - \bar{z})|$, $u_2(z, w) = |g_2(w - \bar{z})|$, $v_\epsilon(z, w) = |g_1(w - \bar{z}) + \epsilon g_2(w - \bar{z})|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Supposons que u_1 et u_2 sont psh dans \mathbb{C}^2 . Alors on a les équivalences suivantes

- (a) v_ϵ est psh dans \mathbb{C}^2 , $\forall \epsilon \in \{-1, 1\}$;
- (b) $|\alpha g_1(w - \bar{z}) + \beta g_2(w - \bar{z})|$ est psh dans \mathbb{C}^2 , $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- (c) (g_1 et g_2 sont deux fonctions affines sur \mathbb{C}) ou ($g_2 = a g_1$ sur \mathbb{C} , avec $a \in \mathbb{C}$).

Démonstration. u_1 et u_2 sont psh dans \mathbb{C}^2 , donc $|g_1|$ et $|g_2|$ sont convexes sur \mathbb{C} . L'assertion (a) implique (c) est déjà démontrée. Aussi (c) implique (a) est triviale.

Remarquons aussi que (a) est équivalente à (b). \square

Théorème 26. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. On note $v(z, w) = |g(w - \bar{z})|$ pour $z, w \in \mathbb{C}$. Alors $\{b \in \mathbb{C} : |v + b| \text{ est une fonction psh sur } \mathbb{C}^2\}$ est égale à $(\emptyset$ ou $\{\alpha\}$ ou \mathbb{C} (avec $\alpha \in \mathbb{C}$)).

Exemples. $g_1(w) = e^{w^2}$. $g_2(w) = e^w$. $g_3(w) = Aw + B$ ($A, B, w \in \mathbb{C}$). Alors, on a

$$\{b \in \mathbb{C} : |g_1(w - \bar{z}) + b| \text{ est une fonction psh sur } \mathbb{C}^2\} = \emptyset.$$

$$\{b \in \mathbb{C} : |g_2(w - \bar{z}) + b| \text{ est une fonction psh sur } \mathbb{C}^2\} = \{0\}.$$

$$\{b \in \mathbb{C} : |g_3(w - \bar{z}) + b| \text{ est une fonction psh sur } \mathbb{C}^2\} = \mathbb{C}.$$

Corollaire 17. Soient $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Alors $\{b \in \mathbb{C} : |g + b| \text{ est une fonction convexe sur } \mathbb{C}\} = \emptyset$ ou $\{\alpha\}$ ou \mathbb{C} ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Démonstration. Claire. \square

Théorème 27. Soit $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Notons

$$u(z, w) = \log |\exp \circ \exp(g(w - \bar{z}))|, \text{ pour } (z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n.$$

Alors u n'est pas psh dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ si g n'est pas constante.

En réalité, u est psh sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ si et seulement si g est constante sur \mathbb{C}^n .

Démonstration. Il existe $j \in \{1, \dots, n\}$, $a \in \mathbb{C}^n$ avec $g(\cdot, A_j)$ n'est pas constante sur \mathbb{C} , où $A_j = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a = (a_j, A_j) = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$. D'après Abidi-Ben Yattou [2],

$$\log |\exp \circ \exp(g(\cdot, A_j))|$$

caractérise les fonctions holomorphes. Soit $f(z_j) = \bar{z}_j$ pour $z_j, w_j \in \mathbb{C}$. f n'est pas analytique sur \mathbb{C} , donc $\log |\exp \circ \exp(g(w_j - f(z_j), A_j))|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 . Ainsi $\log |\exp \circ \exp(g(w - \bar{z}))|$ n'est pas psh dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. \square

Ce théorème admet de bonnes applications en analyse complexe multidimensionnelle. Soit par exemple le

Corollaire 18. *Pour toute $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante et tout entier $l \geq 2$, $\log |F(g(w - \bar{z}))|$ n'est pas psh dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ ($F = \exp \circ \exp \circ \dots \circ \exp$ (l -fois)). De plus $\log |F(g(w - \bar{z}))|$ n'est pas prh au voisinage de tout point $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.*

En conséquence, $\log |F(g)|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C}^n .

Remarque 7. Soient g_1 et g_2 deux fonctions analytiques sur \mathbb{C} . Supposons que $|g_1|$ et $|g_2|$ sont convexes sur \mathbb{C} . Ceci n'implique pas que la composée $|g_2 \circ g_1|$ est convexe.

Exemple. $g_1(w) = w^2$ et $g_2(w) = e^w$ pour $w \in \mathbb{C}$. C'est clair que $|g_1|$ et $|g_2|$ sont convexes mais $|g_2 \circ g_1|$ n'est pas convexe dans \mathbb{C} .

Observons que pour tout g polynôme analytique sur \mathbb{C} , on a $|g \circ g|$ est convexe si et seulement si $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} . Ce résultat n'est pas vrai pour les fonctions analytiques sur \mathbb{C} .

Exemple. $f(z) = e^z$, pour $z \in \mathbb{C}$. f est analytique et $|f|$ est convexe sur \mathbb{C} . $f \circ f(z) = e^{e^z}$ vérifie $|f \circ f|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} . En effet $|f \circ f(w - \bar{z})| = |e^{e^{w-\bar{z}}}|$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 , car si $w_1(z) = z$ on a $|f \circ f(w_1 - \bar{z})| = |e^{\cos(2y)}| \leq e$, où $y = \text{Im}(z)$. Donc $|f \circ f(w_1(z) - \bar{z})|$ est bornée et non constante sur \mathbb{C} . Ainsi $|f \circ f(w - \bar{z})|$ n'est pas psh sur \mathbb{C}^2 et par suite $|f \circ f|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} .

Observons en réalité la remarque suivante. Soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue où D est un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Si u est convexe sur D alors $|e^u| = e^u$ est convexe sur D . Mais si $k(w) = w_1^{2l}$ ($l \in \mathbb{N}, l \geq 2, w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$), k est analytique sur \mathbb{C}^n (donc k est continue sur \mathbb{C}^n), $|k|$ est convexe sur \mathbb{C}^n cependant $|e^k|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C}^n .

Question. Etudier la convexité de $\log(|g_1|^2 + |g_2|^2)$ pour $g_1, g_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques. En déduire pour une somme finie puis pour une série convergente de fonctions analytiques les résultats de convexité.

3. Les fonctions harmoniques et plurisousharmoniques. On a le lemme suivant

Lemme 10. *Soit $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que pour toute fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue la condition v ($v(z, w) = u(w - f(z))$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$) est psh sur \mathbb{C}^2 implique que f est holomorphe sur \mathbb{C} .*

Alors u n'est pas convexe sur \mathbb{C} .

Démonstration. On remarquera alors que $u(w - \bar{z})$ n'est pas psh sur \mathbb{C}^2 . D'après le lemme 3, u n'est pas convexe sur \mathbb{C} . \square

Lemme 11. Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique non affine. Alors, h n'est ni convexe ni concave sur \mathbb{C} .

Démonstration. Supposons que h est convexe sur \mathbb{C} , on a la forme bilinéaire suivante,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} t^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} s^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} ts \geq 0$$

pour tout $t, s \in \mathbb{R}$.

On a alors pour $t = s$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \geq 0$.

Si $t = -s$ on doit avoir $-\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \geq 0$.

Donc $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$.

Il résulte alors que $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} t^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} s^2 \geq 0$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$.

Prenons $t = 1$ et $s = 0$, on a donc $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \geq 0$ comme h est harmonique on doit alors avoir $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \leq 0$. D'autre part si on prend $t = 0$ et $s = 1$, on obtient $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \geq 0$. Enfin on conclut que $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ et par suite $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$.

On a $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0$. Donc $\frac{\partial h}{\partial x}$ est constante. Soit $h(x, y) = ax + \varphi(y)$ avec φ est une fonction de classe C^∞ . Dérivons par rapport à y on doit avoir $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b$ (car $\frac{\partial h}{\partial y}$ est aussi constante en procédant le même raisonnement). Soit $\varphi(y) = by + c$ ($c \in \mathbb{R}$) et enfin $h(x, y) = ax + by + c$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Contradiction.

En réalité observons que h n'est ni convexe ni concave au voisinage de tout point de \mathbb{C} . \square

Comme application de ce résultat on a le

Corollaire 19. Soit $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique non affine, ($d \geq 2$). On note $k(x, y) = h(x - y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}^d$. Alors k n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Démonstration. On applique la complexification de \mathbb{R}^d pour utiliser le lemme précédent. On considère dans ce cas $h : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $h(z) = h(x)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^d$, $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}^d$. Alors h est harmonique dans \mathbb{C}^d . Posons aussi $h_1(w - \bar{z}) = h(x - y)$ lorsque $w = (x + ix_1)$, $(z = y + iy_1) \in \mathbb{C}^d$. Alors $h_1(w - \bar{z}) = k(x, y)$. Supposons que k est convexe sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Alors h_1 est psh et harmonique sur \mathbb{C}^d . Donc h_1 est pluriharmonique sur \mathbb{C}^d . Si h_1 est convexe sur \mathbb{C}^d , alors h_1 est une fonction affine sur \mathbb{C}^d . Donc h est affine sur \mathbb{R}^d . Contradiction. Ainsi k n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. \square

Aussi on a

Théorème 28. Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique non affine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue, D domaine de \mathbb{C}^n . On note k une fonction harmonique réelle conjuguée de h . On a les équivalences suivantes

- (i) f est holomorphe sur D ;
- (ii) $h(w - f)$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$;
- (iii) $h(w - f)$ est plurisurharmonique sur $D \times \mathbb{C}$;
- (iv) $h(w - f)$ est prh sur $D \times \mathbb{C}$;
- (v) $k(w - f)$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$.

Démonstration. Confère à l'article de Abidi et Ben Yattou [2]. \square

Lemme 12. Soit $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pluriharmonique. Alors, h est convexe sur \mathbb{C}^n si et seulement si $(e^h + h)$ l'est aussi.

Démonstration. Notons que si h est convexe sur \mathbb{C}^n alors $(e^h + h)$ l'est aussi.

Réciproquement. Soit $u = h + e^h$. u est convexe et de classe C^∞ sur \mathbb{C}^n . D'après le problème de fibration et pour simplifier on admet que $n = 1$.

Si h est constante alors u est convexe sur \mathbb{C} .

Supposons que h n'est pas constante sur \mathbb{C} . On a

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial h}{\partial \zeta} e^h + \frac{\partial h}{\partial \zeta}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} e^h + \left(\frac{\partial h}{\partial \zeta}\right)^2 e^h + \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} (1 + e^h) + \left(\frac{\partial h}{\partial \zeta}\right)^2 e^h.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta} = \left|\frac{\partial h}{\partial \zeta}\right|^2 e^h.$$

Posons $v(z, w) = u(w - \bar{z})$, pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

On a v est psh sur \mathbb{C}^2 si et seulement si u est convexe sur \mathbb{C} .
 Mais v est psh sur \mathbb{C}^2 si

$$(18) \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right| \leq \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}$$

sur \mathbb{C} (cette inégalité classique s'appelle inégalité complexe de convexité et on a u est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si l'inégalité (18) est vraie dans \mathbb{C}).

Soit $\left| (1 + e^h) \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial \zeta} \right)^2 e^h \right|^2 \leq \left| \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right|^4 e^{2h}$ sur \mathbb{C} . Donc

$$(1 + e^h)^2 \left| \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} \right|^2 + 2 \operatorname{Ré} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 (1 + e^h) e^h \right] \leq 0.$$

Comme $(1 + e^h)^2 \left| \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} \right|^2 \geq 0$ alors $\operatorname{Ré} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} \right)^2 \right] \leq 0$. Il résulte que

$$\operatorname{Ré} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} \frac{\left| \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right|^4}{\left(\frac{\partial h}{\partial \zeta} \right)^2} \right] \leq 0 \text{ et par suite } \operatorname{Ré} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} \frac{1}{\left(\frac{\partial h}{\partial \zeta} \right)^2} \right] \leq 0 \text{ sur } \mathbb{C} \setminus E, \text{ où}$$

$E = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\partial h}{\partial z}(z) = 0\}$ est polaire fermé dans \mathbb{C} .

Posons $g = \frac{\partial h}{\partial \zeta}$. g est holomorphe sur \mathbb{C} . $\operatorname{Ré} \left[\frac{g'}{g^2} \right] \leq 0$ sur $\mathbb{C} \setminus E$.

$\operatorname{Ré} \left[\frac{g'}{g^2} \right]$ est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus E$. Donc $\operatorname{Ré} \left[\frac{g'}{g^2} \right]$ se prolonge en une fonction sousharmonique négative sur \mathbb{C} . Donc $\operatorname{Ré} \left[\frac{g'}{g^2} \right]$ est constante sur \mathbb{C} et par suite $\left[\frac{g'}{g^2} \right] = c$ avec $c \in \mathbb{C}$. Montrons que $c = 0$ pour en déduire que g est constante et par suite h est une fonction affine sur \mathbb{C} .

$$\begin{aligned} g' &= cg^2. \\ g'' &= 2cgg' = 2c^2g^3. \\ g''g &= 2c^2g^4 = 2(cg^2)^2 = 2(g')^2. \end{aligned}$$

Soit alors

$$(19) \quad g''g = 2(g')^2 \text{ sur } \mathbb{C}.$$

Si g n'est pas constante sur \mathbb{C} , l'équation (19) est impossible d'après le théorème 22.

Ainsi g est constante sur \mathbb{C} . $g = \frac{\partial h}{\partial \zeta}$, de plus h n'est pas constante, donc $g \neq 0$.

Comme $g' = cg^2 = 0$, alors $c = 0$. \square

Notons qu'on peut obtenir d'autres résultats liant la convexité (notion réelle) et les fonctions pluriharmoniques dans $\mathbb{C}^n, n \geq 1$.

Par exemple, pour tout réel $A \geq 0$ et pour toute $k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pluriharmonique, $v = [e^k + Ak]$ est convexe sur \mathbb{C}^n si et seulement si k l'est aussi (c'est à dire k est une fonction affine sur \mathbb{C}^n). Ce résultat montre l'importance de l'exactitude dans l'espace global complexe \mathbb{C}^n .

Enfin notons la remarque suivante.

Soit $k(z) = 2 \log |z|$ pour $z \in D \left(2, \frac{1}{4}\right) = D \subset \mathbb{C}$. k est harmonique sur le domaine D . $[e^k + k]$ est convexe sur D . Cependant k n'est pas convexe sur D . Ceci montre l'importance de considérer l'espace global \mathbb{C}^n dans l'énoncé du lemme 12. \square

En réalité on a

Lemme 13. Soit $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique non affine (D domaine de $\mathbb{R}^d, d \geq 2$). Alors, la valeur absolue $|h|$ n'est ni convexe ni concave sur D .

Lemme 14. Soit $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, u(z) = \log(1 + |z|^2)$, pour $z \in \mathbb{C}$. Alors, u vérifie la propriété suivante $\forall D$ domaine de $\mathbb{C}^n, \forall f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue, si v est psh sur $D \times \mathbb{C}$ alors f est holomorphe sur $D (v(z, w) = u(w - f(z)), z \in D, w \in \mathbb{C})$.

Démonstration. Confère au papier de Abidi [1]. \square

Théorème 29. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction, D domaine de \mathbb{C}^n . Posons $v(z, w) = \log |w - \bar{f}(z)|$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. On suppose que

- a) v n'est pas psh au voisinage de tout point de $D \times \mathbb{C}$.
 - b) Pour tout $w \in \mathbb{C}, v(\cdot, w)$ est psh ou égale à $(-\infty)$ sur D .
- Alors f est holomorphe non constante dans D .

Démonstration. Posons $g = \bar{f}$. Alors $v(z, w) = \log |w - g(z)|$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

Remarquons d'abord que g n'est pas constante sur D . En effet si g est constante sur D , on a alors v est psh sur $D \times \mathbb{C}$. Contradiction.

Donc $\forall w \in \mathbb{C}, v(\cdot, w) \neq (-\infty)$ sur D .

Montrons que g est continue sur D . Soit $z_0 \in D$. Posons $w_0 = g(z_0)$. $v(\cdot, w_0)$ est psh sur D . Donc $e^{v(\cdot, w_0)}$ est s.c.s sur D . D'où $|w_0 - g|$ est s.c.s sur

D . On a $|w_0 - g(z_0)| = 0$. Soit $\epsilon > 0$. $\exists \delta > 0 / \|z - z_0\| < \delta$ et $z \in D$ implique $|w_0 - g(z)| < \epsilon$ et donc $|g(z_0) - g(z)| < \epsilon$. Ainsi g est continue sur D .

L'assertion b) implique que g est prh sur D d'après Abidi [1].

Soit $z^0 \in D, r > 0$ avec $\overline{\Delta}^{(n)}(z^0, 4r) \subset D$. $g(\overline{\Delta}^{(n)}(z^0, 4r))$ est un sous ensemble compact dans \mathbb{C} , soit donc $R > 0$ avec $g(\overline{\Delta}^{(n)}(z^0, 4r)) \subset D(0, R)$. Notons de plus que v est de classe C^∞ sur l'ouvert $G = \Delta^{(n)}(z^0, 4r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)]$.

Cas 1. $n = 1$. Soit $(z, w) \in D(z^0, r) \times [\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)]$. La condition b) implique

$$\log |w - g(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w - g(z + re^{i\theta})| d\theta.$$

$$\forall t \in [0, 2\pi] \text{ on a } \log |we^{it} - g(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| d\theta.$$

Intégrons par rapport à $t \in [0, 2\pi]$, il arrive que

$$\int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| dt d\theta \text{ (d'après Fubini)}.$$

Notons que la fonction $\xi \mapsto \log |w - \xi|$ est harmonique sur $D(0, R), \forall w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$.

Mais $z \in D(z^0, r)$, donc $(z + re^{i\theta}) \in D(z^0, 2r) \subset D(z^0, 4r)$. Soit alors $g(z + re^{i\theta}) \in D(0, R), \forall z \in D(z^0, r), \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

Maintenant notons que $\int_0^{2\pi} \log |we^{it} - a| dt = 2\pi \log |w|$ est indépendant du choix du point $a \in D(0, R)$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| dt &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| dt d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| dt d\theta. \end{aligned}$$

Utilisons encore Fubini, il arrive

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| dt d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| d\theta dt \\ &= \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| dt. \end{aligned}$$

Il résulte que

$$\int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| dt d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| dt.$$

Ainsi les inégalités précédentes se transforment en une égalité, soit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z)| dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| dt d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| d\theta dt. \end{aligned}$$

Soit

$$\int_0^{2\pi} [\log |we^{it} - g(z)| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| d\theta] dt = 0.$$

La fonction

$$t \in [0, 2\pi] \mapsto [\log |we^{it} - g(z)| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| d\theta]$$

est continue négative sur $[0, 2\pi]$ et est d'intégrale nulle. Donc

$$\log |we^{it} - g(z)| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |we^{it} - g(z + re^{i\theta})| d\theta = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Si $t = 0$, on a

$$\log |w - g(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w - g(z + re^{i\theta})| d\theta$$

et il résulte que

$$z \in D(z^0, r) \mapsto \log |w - g(z)| = v(z, w)$$

est harmonique pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$.

Soit alors

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} [2 \log |w - g(z)|] = 0 \quad \text{sur } D(z^0, r), \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R).$$

En tenant compte de l'hypothèse g est harmonique sur D on obtient,

$$\text{Ré} \left[\frac{\frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}}{(w - g)^2} \right] = 0$$

sur $D(z^0, r)$, $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$.

Il résulte que

$$\frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$$

sur $D(z^0, r)$. Comme $\frac{\partial g}{\partial z}$ et $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ sont analytiques réelles sur $D(z^0, r)$, alors $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$ ou $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ partout sur $D(z^0, r)$. L'hypothèse $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ sur $D(z^0, r)$ implique g est holomorphe même sur D . Donc v donnée par $v(z, w) = \log |w - g(z)|$, est psh sur $D \times \mathbb{C}$. Contradiction.

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \neq 0$ sur $D(z^0, r)$ et g n'est pas holomorphe sur D .

La condition $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$ sur $D(z^0, r)$ implique \bar{g} est holomorphe sur D . Rappelons que g n'est pas constante sur D . v est de classe C^∞ sur l'ouvert G et remarquons que $\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$ dans G .

La forme hermitienne de Levi associée à v dans G est alors donnée par

$$L(v)(z, w)(b, c) = \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial z}(z, w) b \bar{b} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial w}(z, w) \bar{b} c \right],$$

pour tout $(z, w) \in G$, et $(b, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Cette forme de Levi ne garde pas un signe constant au voisinage de tout point $(z, w) \in G$ lorsque le couple (b, c) varie dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

La condition a) implique que v n'est pas psh au voisinage de tout point $(z, w) \in G$.

Comme $v(\cdot, w)$ est harmonique sur $D(z^0, r)$, $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R)$. Alors $\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z} \partial w} \neq 0$ au voisinage de tout point de G .

En dérivant on obtient alors $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \neq 0$.

On a montré ici que $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \neq 0$ si et seulement si v n'est pas psh au voisinage de tout point de $D \times \mathbb{C}$.

Enfin, il résulte que $\bar{g} = f$ est holomorphe non constante sur D .

Cas 2. $n \geq 2$. Ce cas résulte du cas précédent en utilisant le problème de fibration. \square

On a aussi

Corollaire 20. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante. Si $\log |g|$ n'est pas affine, alors

(i) $\log |g(w - \bar{f}(z))|$ n'est pas psh au voisinage de tout point de \mathbb{C}^2 , pour toute $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante.

(ii) Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, $u(z, w) = \log |g(w - \bar{f}(z))|$, pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Supposons que

- a) u n'est pas psh au voisinage de tout point de \mathbb{C}^2 .
- b) Pour tout $w \in \mathbb{C}$, $u(\cdot, w)$ est sh ou égale à $(-\infty)$ sur \mathbb{C} .

Alors f est analytique non constante sur \mathbb{C} .

Corollaire 21. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction, D domaine de \mathbb{C}^n . Posons $u(z, w) = \log |w - \bar{f}(z)|$ et $v(z, w) = \log |w - f(z)|$, pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

Alors l'une des conditions a) ou b) n'est pas satisfaite.

a) u et v ne sont pas psh au voisinage de tout point de $D \times \mathbb{C}$.

b) Pour tout $w \in \mathbb{C}$, $u(\cdot, w)$ est psh ou égale à $(-\infty)$ sur D .

Démonstration. Si a) et b) sont vérifiées alors f et \bar{f} sont holomorphes non constantes sur D . Mais f et \bar{f} sont holomorphes sur le domaine D , implique f est constante sur D . Contradiction. \square

Exemple. Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique non constante. $u_1(z, w) = \log |w - h(z)|$, $u_2(z, w) = \log |w - (z + |z|^2)|$ et $u_3(z, w) = \log |w - |z|^2|$ pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Alors les fonctions u_1, u_2 et u_3 ne sont pas psh au voisinage de tout point de \mathbb{C}^2 .

4. La caractérisation en plusieurs variables complexes des fonctions holomorphes. On donne d'abord les définitions suivantes.

Définition 1. Soit $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ($n \geq 2$). On dit que u caractérise suivant la première direction les fonctions analytiques si pour tout D domaine dans \mathbb{C}^m et pour toute $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue, la condition $v(z, w) = u(w - f(z), z_2^0, \dots, z_n^0)$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ implique f est holomorphe sur D , m_{2n-2} -presque partout $z_2^0, \dots, z_n^0 \in \mathbb{C}$.

Définition 2. Soit $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction psh. u produit (ou caractérise) les fonctions analytiques si $\forall D$ domaine de $\mathbb{C}^m, \forall f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ continue, la condition v est psh sur $D \times \mathbb{C}^n$ implique f est holomorphe sur D ($v(z, w) = u(w - f(z))$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}^n$).

Remarque 9. Soit $f_1, f_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ pluriharmoniques ($n \geq 2$). Supposons que le produit $f_1 f_2$ est analytique sur \mathbb{C}^n et non constant par rapport à chaque composante variable complexe z_1, z_2, \dots, z_n ($z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$). Alors, f_1 et f_2 sont analytiques sur \mathbb{C}^n .

Théorème 30. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. Supposons que la fonction $\log |\exp(g(w - \bar{z}))|$ est psh sur \mathbb{C}^2 . Alors $|g(w - \bar{z})|$ est psh sur \mathbb{C}^2 .

En conséquence si $\log |\exp(g)|$ est convexe sur \mathbb{C} , alors $|g|$ est convexe dans \mathbb{C} .

Ce résultat nous montre l'existence de fonctions g et k analytiques sur \mathbb{C} avec

- (i) $|\exp(g(w - \bar{z}))|$ est psh sur \mathbb{C}^2 de plus $|g(w - \bar{z})|$ est psh sur \mathbb{C}^2 .
- (ii) $|\exp(k(w - \bar{z}))|$ n'est pas psh sur \mathbb{C}^2 mais $|k(w - \bar{z})|$ est psh sur \mathbb{C}^2 .

Théorème 31. Soit $g = (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ analytique. On a les équivalences suivantes

- (i) Il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ avec $\log |g_j|$ produit les fonctions analytiques;
- (ii) $g \neq (\alpha_1 e^{k_1}, \dots, \alpha_n e^{k_n}), \forall k_1, \dots, k_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques affines et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$;
- (iii) Il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ avec $\log |g_j|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} .
La condition suivante (iv) implique la condition (i).
- (iv) $\log \|g\|$ produit les fonctions analytiques.

Démonstration. (iv) implique (i). Supposons que $\log |g_j|$ ne produit pas les fonctions analytiques, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. D'après Abidi et Ben Yattou [2], $g_j(z) = e^{(a_j z + \beta_j)}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, $(a_j, \beta_j \in \mathbb{C})$. On a $g_j(w - \bar{z}) = e^{a_j(w - \bar{z}) + \beta_j}$ de sorte que $\log |g_j(w - \bar{z})|$ est une fonction à valeurs réelles et affine sur \mathbb{C}^2 (donc elle est psh sur \mathbb{C}^2). Il résulte que $2 \log |g_j(w - \bar{z})| = \log(|g_j(w - \bar{z})|^2)$ est psh sur \mathbb{C}^2 pour chaque $j = 1, \dots, n$. D'après Hörmander

[11], $\log \|g(w - \bar{z})\| = \frac{1}{2} \log \left(\sum_{j=1}^n |g_j(w - \bar{z})|^2 \right)$ est psh sur \mathbb{C}^2 . Rappelons que la

fonction f (donnée par $f(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$) n'est pas analytique sur \mathbb{C} . Cependant $\log \|g(w - f(z))\|$ est psh dans \mathbb{C}^2 . Contradiction.

Pour établir l'équivalence entre (i) et (iv) il fallait développer quelques propriétés liants les fonctions holomorphes, les fonctions convexes et la fonction classique absorbante \log . \square

Définition 3. Soient u_1, u_2, \dots, u_n des fonctions sh sur \mathbb{C} . $u = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ produit au sens n -classique dans \mathbb{C} les fonctions analytiques si $\forall f_1, \dots, f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continues, l'hypothèse

$$v(z, w) = (u_1(w - f_1(z)) + u_2(w - f_2(z)) + \dots + u_n(w - f_n(z)))$$

est psh sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ implique f_1, f_2, \dots, f_n sont holomorphes dans \mathbb{C} .

Théorème 32. Soit $g_1, \dots, g_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques.

$$\begin{aligned} u(w) &= u(w_1, \dots, w_n) = \log |e^{g_1(w_1) + \dots + g_n(w_n)}|, v(z, w) \\ &= \log |e^{g_1(w_1 - \bar{z}) + \dots + g_n(w_n - \bar{z})}|, \end{aligned}$$

pour $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ et $z \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence suivante

- (a) u produit les fonctions analytiques;
 - (b) g_j n'est pas analytique affine dans $\mathbb{C}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.
- La condition (a) implique l'assertion (c) suivante
- (c) v n'est pas psh dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

Exemple. $u_j(z) = \log |k_j(z)|, k_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique non constante, $k_j(a_j) = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}, a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n, n \geq 1$.

Soit $u = (u_1 + \dots + u_n)$. Alors u produit au sens n-classique dans \mathbb{C} les fonctions analytiques.

Lemme 15. Soit $g = h + ik$ analytique sur \mathbb{C} , h est la partie réelle de g . Si $|g|$ caractérise les fonctions analytiques alors h et k le sont aussi.

On a aussi la version suivante.

Lemme 16. Soient h et $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmoniques. On suppose que $(h^2 + k^2)$ caractérise les fonctions analytiques. Alors h ou k caractérise les fonctions holomorphes.

La réciproque n'est pas vraie (par exemple $h(x, y) = x^2 - y^2$ et $k(x, y) = 2xy$, h et k caractérisent les fonctions holomorphes mais $(h^2 + k^2)$ ne caractérise pas les fonctions analytiques).

En réalité on a le résultat suivant.

Lemme 17. (a) Pour tous réels $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ avec $a\alpha \neq 0$ et $(l, s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$, soit $u(z) = (ax + by + c)^l + (\alpha x + \beta y + \gamma)^s$ pour $z \in \mathbb{C}, z = (x + iy), x = \text{Ré}(z)$. Alors u ne produit pas les fonctions analytiques si les entiers l et s sont pairs.

(b) Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $|g| > 0$ sur \mathbb{C} . Alors $h = \log |g|$ produit les fonctions analytiques si et seulement si $|g|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} .

En conséquence, on a $|g|$ est convexe sur \mathbb{C} si et seulement si $\log |g|$ est convexe sur \mathbb{C} .

Cette dernière propriété permet d'établir un lien entre la convexité des fonctions harmoniques et la convexité des fonctions du type $|k|$ avec $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $|k| > 0$ sur \mathbb{C} .

Dans $\mathbb{C}^n, (n \geq 2)$ on a aussi des résultats analogues à l'énoncé de ce lemme.

5. Sur le minimum de plusieurs fonctions psh.

Théorème 33. Soient $u, v, w \in sh(D) \cap C(D)$, où D est un domaine de \mathbb{R}^n . $E = \{x \in D : u(x) = v(x)\}$ et $F = \{x \in D : u(x) = w(x)\}$. On suppose

que $D \setminus E$ et $D \setminus F$ sont connexes. S'il existe $x_1 \in D$ avec $u(x_1) < w(x_1)$, alors $\min(u, v, w)$ est sousharmonique sur D .

Démonstration. Soit $x_0 \in E$. Montrons que x_0 est un extrémum absolu de $(u - v)$ sur D . On a $u(x_0) = v(x_0)$, donc $(u - v)(x_0) = 0$.

Posons $w_1 = u - v$, w_1 est continue sur D . $D \setminus E = D_1 \cup D_2$ où $D_1 = \{x \in D : u(x) > v(x)\}$, $D_2 = \{x \in D : u(x) < v(x)\}$. D_1 et D_2 sont deux ouverts disjoints de D et $D_1 \cup D_2 = D \setminus E$.

Comme $D \setminus E$ est connexe alors $D_1 = \emptyset$ ou $D_2 = \emptyset$. Si $D_2 = \emptyset$. Alors $w_1 > 0$ sur $D \setminus E$ et $w_1 = 0$ sur E . Donc $w_1 \geq 0 = w_1(x_0)$ sur D . Il résulte que $u - v \geq 0$ sur D . Donc $\min(u, v) = v$ sur D et par suite $\min(u, v) \in \text{sh}(D)$. A partir de cette preuve on déduit que $\min(u, w) = u$ dans D . En conséquence, $\min(u, v, w) = \min(u, v)$ est sousharmonique dans D . \square

Corollaire 22. Soient $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$, convexes où D est un ouvert convexe de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. $E = \{x \in D : u(x) = v(x)\}$.

On suppose que $D \setminus E$ est connexe. Alors $u \leq v$ ou $v \leq u$ partout sur D . En particulier $\min(u, v)$ est convexe sur D .

Démonstration. u et v sont convexes sur D , donc u et v sont continues et sousharmoniques dans D . D'après la preuve du théorème précédent, on a $\min(u, v) = u$ ou v partout sur D . Donc $u \leq v$ ou $v \leq u$ partout sur D . En particulier $\min(u, v)$ est convexe sur D . \square

Corollaire 23. Soient $u_1, u_2 : G \rightarrow [-\infty, +\infty[$ psh, G domaine dans \mathbb{C}^n , $n \geq 1$. On suppose que e^{u_1} et e^{u_2} sont continues sur G . On note $E = \{z \in G : u_1(z) = u_2(z)\}$. Si $G \setminus E$ est connexe dans \mathbb{C}^n , alors $\min(u_1, u_2)$ est psh sur G .

Démonstration. Claire. \square

Cependant pour les fonctions harmoniques on a

Théorème 34. Soient D un domaine dans \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, u et $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmoniques. On note $E = \{x \in D : u(x) = v(x)\}$ et $w = \min(u, v)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

- (a) w est sh sur D ;
- (b) $u \leq v$ ou $v \leq u$ partout sur D ;
- (c) $D \setminus E$ est un ouvert connexe dans \mathbb{R}^d .

Démonstration. On notera d'abord que si w est sh sur D alors $(u = v$ ou $u < v$ ou $u > v)$ partout sur D . Donc (a) et (b) sont équivalentes. De même (a) et (c) sont équivalentes. \square

Remarque 10. Pour les fonctions convexes même analytiques réelles ce théorème n'est pas vrai. Exemple. Dans \mathbb{R}^2 on considère $u(x, y) = x + x^2, v(x, y) = x$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. u et v sont convexes et analytiques réelles sur \mathbb{R}^2 . $w(x, y) = \min(u(x, y), v(x, y)) = x$. Donc w est convexe et analytique réelle sur \mathbb{R}^2 . On a $v \leq u$ sur \mathbb{R}^2 . $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) = v(x, y)\} = \{0\} \times \mathbb{R}$. Cependant $\mathbb{R}^2 \setminus E = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ n'est pas connexe dans \mathbb{R}^2 .

On a aussi l'énoncé suivant

Corollaire 24. Soient $g_1, g_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques. Considérons $u_1(z) = \log |e^{g_1(z)}|, u_2(z) = \log |e^{g_2(z)}|, u = \min(u_1, u_2), z \in \mathbb{C}^n$. On note aussi $v(z, w) = u(w - \bar{z})$, pour $z, w \in \mathbb{C}^n$. On a les équivalences suivantes

- (a) u est convexe sur \mathbb{C}^n ;
- (b) u est constante sur \mathbb{C}^n ;
- (c) v est psh sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$;
- (d) g_1 et g_2 sont constantes sur \mathbb{C}^n ;
- (e) $\log |e^{g_1}|$ et $\log |e^{g_2}|$ sont convexes sur \mathbb{C}^n ;
- (f) $\max(u_1, u_2)$ est convexe dans \mathbb{C}^n .

On veut développer le théorème suivant en étudiant la convexité et le problème de fibration. D'abord considérons le cas de la pseudoconvexité et le problème de la fibration. On a

Théorème 35. Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques non constantes, D domaine dans \mathbb{C}^n . Soit $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \beta, \delta \in \mathbb{R}$, on pose $u_1(z, w) = \alpha \log |w - f(z)| + \beta$ et $v_1(z, w) = \gamma \log |w - g(z)| + \delta$ si $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Soit $u = \inf(u_1, v_1)$ et $v = \sup(u_1, v_1)$. On note aussi $E = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : u_1(z, w) = v_1(z, w)\}$ et si $w \in \mathbb{C}, E(w) = \{z \in D : u_1(z, w) = v_1(z, w)\}$. Alors on a les propriétés suivantes

(a) Pour $w \in \mathbb{C}$, on note $A(w) = \{z \in D : u(\cdot, w) \text{ est psh au voisinage de } z\}$ et $A(z) = \{w \in \mathbb{C} : u(z, \cdot) \text{ est psh au voisinage de } w\}$ si $z \in D$ et $A = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : u \text{ est psh au voisinage de } (z, w)\}$.

(i) $A(w) = D \setminus E(w), \forall w \in \mathbb{C}$ si et seulement si $(\alpha \neq \gamma \text{ et } f \neq g)$ ou $(\alpha = \gamma \text{ et } f \neq g)$.

(ii) $A(z) = \mathbb{C} \setminus E(z), \forall z \in D$ si et seulement si $(A(w) = D \setminus E(w), \forall w \in \mathbb{C})$.

(iii) Si D est pseudo-convexe, alors $A(w)$ est un ouvert pseudo-convexe, $\forall w \in \mathbb{C}$.

(iv) $A(w) = D, \forall w \in \mathbb{C}$ si et seulement si $(\alpha = \gamma \text{ et } f = g \text{ non constante})$.

(b) Soit $B = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : v \text{ prh au voisinage de } (z, w)\}$. Alors $B \subset A$.

On note Γ_1 et Γ_2 les graphes de f et g respectivement.

$A = (D \times \mathbb{C} \setminus E) \cup (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ si et seulement si $(\alpha \neq \gamma \text{ et } f = g)$.

$\{z \in D : A(z) = \mathbb{C}\}$ est vide ou analytique ou égale à D .

De plus, $\{z \in D : A(z) = \mathbb{C} \setminus E(z)\} = \emptyset$ si et seulement si (($\alpha = \gamma$ et $f = g$) ou ($\alpha \neq \gamma$ et $f \neq g$)).

Démonstration. (a) Pour (i), supposons que $A(w) = D \setminus E(w)$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. Admettons que $\alpha = \gamma$. Montrons que $f = g$. Par l'absurde supposons que $f \neq g$ sur D . Donc $u(z, w) = \alpha \log |w - f(z)| + \inf(\beta, \delta)$ si $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Il résulte que $u(\cdot, w)$ est psh sur D . Mais

$$E(w) = \{z \in D : |w - f(z)|^\alpha e^\beta = |w - f(z)|^\alpha e^\delta\}$$

et pour $w \in f(D)$, $\{z \in D : f(z) = w\}$ est non vide et inclus dans $E(w)$. Donc $A(w) = D \neq D \setminus E(w)$. D'où $f \neq g$. Maintenant, admettons que $\alpha \neq \gamma$. Si $f = g$ sur D , on a pour $w \in f(D)$, $A(w) = [D \setminus E(w)] \cup \Gamma_1(w) \neq D \setminus E(w)$, où Γ_1 est le graphe de f (car f non constante). Il résulte enfin que $f \neq g$. Pour la réciproque, notons que si $\alpha \neq \gamma$ et $f \neq g$, donc $A = D \times \mathbb{C} \setminus E$ est le plus grand ouvert sur lequel u est psh. Donc $A(w)$ est le plus grand ouvert sur lequel $u(\cdot, w)$ est psh (pour tout $w \in \mathbb{C}$). D'où $A(w) = D \setminus E(w)$. De même si $\alpha = \gamma$ et $f \neq g$.

Pour (ii), supposons d'abord que $A(z) = \mathbb{C} \setminus E(z), \forall z \in D$. Si $\alpha = \gamma$ et $f = g$, alors $u(z, w) = \alpha \log |w - f(z)| + \inf(\beta, \delta)$, donc $A(z) = \mathbb{C}$ et $\{w \in \mathbb{C} : w = f(z)\} = \{f(z)\} \subset E(z)$ pour tout $z \in D$. Donc $A(z) \neq \mathbb{C} \setminus E(z)$ et par suite, on doit avoir $\alpha \neq \gamma$ ou $f \neq g$.

La situation $\alpha \neq \gamma$ et $f = g$ étant impossible, car on a $E = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : |w - f(z)|^\alpha e^\beta = |w - f(z)|^\gamma e^\delta\} = \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : w = f(z)\} \cup \{(z, w) \in D \times \mathbb{C} : |w - f(z)|^{\alpha-\gamma} = e^{\delta-\beta}\}$. Donc $A = (D \times \mathbb{C} \setminus E) \cup \Gamma_1$ où Γ_1 est le graphe de f . Donc pour tout $z \in D$, $A(z) = [D \setminus E(z)] \cup \{f(z)\} \neq D \setminus E(z)$ (car $f(z) \in E(z)$). Donc $f \neq g$. Dans ce cas on vérifie que $A(z) = D \setminus E(z); \forall z \in D$.

Si $\alpha = \gamma$, alors $f \neq g$ et on vérifie aussi que $A(z) = \mathbb{C} \setminus E(z), \forall z \in D$. Réciproquement, supposons que $\alpha \neq \gamma$ et $f \neq g$ ($\alpha > 0$ et $\gamma > 0$), on vérifie que $A = D \times \mathbb{C} \setminus E$. Donc $A(z) = D \setminus E(z), \forall z \in D$ (la même conclusion est obtenue si $\alpha = \gamma$ et $f \neq g$).

Pour (iii), on a A est pseudo-convexe dans $D \times \mathbb{C}$. D'après Hörmander [11], $A(w)$ est un ouvert pseudo-convexe, pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Pour (iv), si $A(w) = D, \forall w \in \mathbb{C}$. $A(w) = D = \{z \in D : u(\cdot, w) \text{ est psh au voisinage de } z\}$. Donc $u(\cdot, w)$ est psh sur $D, \forall w \in \mathbb{C}$. Supposons que $\alpha \neq \gamma$. Si $f = g$, alors $A = (D \times \mathbb{C} \setminus E) \cup \Gamma_1$ où Γ_1 est le graphe de f . Comme f n'est pas constante, alors $A(w) = [D \setminus E(w)] \cup \{z \in D : f(z) = w\} \neq D$ car $E(w) \neq \{z \in D : f(z) = w\} (w \in \mathbb{C})$. Aussi le cas où $f \neq g$ est impossible. En effet, $f \neq g$, donc $A = D \times \mathbb{C} \setminus E$. On choisit maintenant $w \in f(D)$, alors $E(w) \neq \emptyset$

et par suite $A(w) \neq D$. D'où $\alpha = \gamma$. Si $f \neq g$, alors $A(w) = D \setminus E(w), \forall w \in \mathbb{C}$. Mais si $w = f(z^0)$ où $z^0 \in D$, alors $E(w) \neq \emptyset$ et par suite $A(w) \neq D$. Ceci étant impossible. Ainsi, $\alpha = \gamma$ et $f = g$ non constante sur D . Pour la réciproque, on a $\alpha = \gamma$ et $f = g$ non constante, alors $A(w) = D$, pour tout $w \in \mathbb{C}$. Remarquons que si $f = g$ est constante sur D l'assertion (iv) n'est pas vraie.

(b) Remarquons que $B = D \times \mathbb{C} \setminus E$ si $\alpha \neq \gamma$ et $B = D \times \mathbb{C} \setminus \Gamma_1$ si $\alpha = \gamma$ et $f = g$.

Si $\alpha \neq \gamma$, alors $B = D \times \mathbb{C} \setminus E \subset A$. Pour le cas $\alpha = \gamma$, on a si $f = g$, alors $A = D \times \mathbb{C}$ et $B = D \times \mathbb{C} \setminus \Gamma_1$, donc $B \subset A$. Si $f \neq g$, on a $B = D \times \mathbb{C} \setminus E = A$. D'où $B \subset A$. On vérifie sans peine que $A = (D \times \mathbb{C} \setminus E) \cup (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ si et seulement si $\alpha \neq \gamma$ et $f = g$.

Maintenant caractérisons $\{z \in D : A(z) = \mathbb{C}\}$. Soit $z^0 \in D$. Supposons que $\alpha = \gamma$. Si $f(z^0) = g(z^0)$, alors $A(z^0) = \mathbb{C}$. Plus exactement, si $f \neq g$, alors $\{z \in D : A(z) = \mathbb{C}\} \subset \{z \in D : f(z) = g(z)\}$. Donc $\{z \in D : A(z) = \mathbb{C}\}$ est un ensemble analytique non vide. Le cas où $f = g$ sur D implique que $\{z \in D : A(z) = \mathbb{C}\} = D$.

Si $f(z^0) \neq g(z^0)$, alors $A(z^0) \neq \mathbb{C}$. Supposons que $\alpha = \gamma$ et $f(z) = g(z), \forall z \in D$. Alors $A(z) \neq \mathbb{C}, \forall z \in D$. Donc $\{z \in D : A(z) = \mathbb{C}\} = \emptyset$.

Le cas où $\alpha \neq \gamma$ et $f(z^0) = g(z^0)$ implique $A(z^0) \neq \mathbb{C}$.

Si $f(z^0) \neq g(z^0)$, alors $A(z^0) \neq \mathbb{C}$. Pour la dernière assertion, supposons que $\alpha = \gamma$ et $f = g$. $\forall z \in D, A(z) = \mathbb{C}$ et $E(z) \neq \emptyset$. Donc $A(z) \neq \mathbb{C} \setminus E(z)$.

Si $\alpha \neq \gamma$ et $f = g$, on a $E(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - f(z)|^\alpha e^\beta = |w - f(z)|^\gamma e^\delta\}$, donc $\{w \in \mathbb{C} : w = f(z)\} = \{f(z)\} \subset E(z)$ pour $z \in D$. Remarquons en fait que $A(z) = [\mathbb{C} \setminus E(z)] \cup \{f(z)\} \neq \mathbb{C} \setminus E(z)$. La réciproque est triviale. \square

Pour le cas de la convexité d'abord on a

Lemme 18. Soit D un domaine convexe dans $\mathbb{C}^n, n \geq 1, f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $C^2. u(z, w) = e^{|w - f(z)|}$. On a l'équivalence suivante

- (a) f est une fonction affine sur D ;
- (b) u est convexe sur $D \times \mathbb{C}$.

L'application de ce lemme est très importante en analyse complexe et réelle. On peut aussi obtenir et énoncer des versions fortes de ce lemme.

Lemme 19. Soient $u_1, u_2, \dots, u_l : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions affines, $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$. On suppose que $\min(u_1, \dots, u_l) = u$ est convexe sur \mathbb{C}^n . Alors il existe $(l - 1)$ réels $\gamma_2, \dots, \gamma_l$ avec $u_2 = u_1 + \gamma_2, \dots, u_l = u_1 + \gamma_l$ sur \mathbb{C}^n .

En conséquence, $u = u_1 + \min(0, \gamma_2, \dots, \gamma_l)$ est affine sur \mathbb{C}^n .

Démonstration. Sans perte de généralité on suppose que u_1, u_2, \dots, u_l sont distinctes deux à deux. Notons que u est surharmonique sur \mathbb{C}^n .

Comme u est convexe, alors u est sousharmonique sur \mathbb{C}^n . Il résultera alors que u est harmonique convexe sur \mathbb{C}^n . Donc u est une fonction affine sur \mathbb{C}^n . Soit $z_0 \in \mathbb{C}^n$. On suppose que $u(z_0) = u_1(z_0)$. Montrons alors que $u = u_1$ sur \mathbb{C}^n .

Soit $r > 0$.

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \frac{1}{m_{2n}(B(z_0, r))} \int_{B(z_0, r)} u(\xi) dm_{2n}(\xi) \\ &\leq \frac{1}{m_{2n}(B(z_0, r))} \int_{B(z_0, r)} u_1(\xi) dm_{2n}(\xi) = u_1(z_0) = u(z_0). \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{m_{2n}(B(z_0, r))} \int_{B(z_0, r)} (u_1 - u)(\xi) dm_{2n}(\xi) = u_1(z_0) - u(z_0) = 0$. Comme $(u_1 - u)$ est continue positive sur $B(z_0, r)$, alors $u_1 - u = 0$ partout sur $B(z_0, r)$.

Soit enfin $u_1 = u$ sur $B(z_0, r)$. Comme u_1 et u sont affines sur \mathbb{C}^n alors $u_1 = u$ partout sur \mathbb{C}^n .

Cette démonstration est indépendante du choix du point $z_0 \in \mathbb{C}^n$ avec $u(z_0) = u_1(z_0)$.

$u_1 = \min(u_1, u_2, \dots, u_l)$ sur \mathbb{C}^n . Il résulte que $u_1 < u_2, \dots, u_1 < u_l$ sur \mathbb{C}^n . En effet, par exemple si $u_1(z_1) = u_2(z_1)$ avec $z_1 \in \mathbb{C}^n$. Alors, d'après la preuve précédente, on obtient $u_1 = u_2$ sur \mathbb{C}^n . Contradiction.

Ainsi, il existe $\gamma_2, \dots, \gamma_l \in \mathbb{R}$ avec $u_1 = u_2 - \gamma_2 = \dots = u_l - \gamma_l$. Posons $\gamma_1 = 0$.

Alors $u = u_1 + \min(0, \gamma_2, \dots, \gamma_l)$ sur \mathbb{C}^n . \square

Enfin notons qu'on peut énoncer quelques résultats analogues au lemme 19 concernant les fonctions harmoniques sur un domaine D de \mathbb{R}^d , ($d \geq 2$).

Corollaire 25. *Soit $(u_j)_{j \geq 1}$ une suite de fonctions affines définies sur \mathbb{C}^n et à valeurs réelles. On suppose que $\min(\{u_j : j \geq 1\}) = u_1$ sur \mathbb{C}^n . Alors il existe une suite de nombres réels $(\gamma_j)_{j \geq 2}$ avec $u_j = u_1 + \gamma_j$, pour tout $j \geq 2$.*

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $N \geq 2$, il existe une suite finie $\{\gamma_2, \dots, \gamma_N\} \subset \mathbb{R}$ avec $u_j = u_1 + \gamma_j$ pour tout $j = 2, \dots, N$.

Posons $\gamma_1 = 0$. Il résulte que $u_j = u_1 + \gamma_j, \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. \square

Le théorème suivant nous servira dans la suite du papier.

Théorème 36. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue, D domaine dans $\mathbb{C}^n, n \geq 1$.*

Soit p un polynôme analytique sur \mathbb{C} admettant au moins deux racines distinctes dans \mathbb{C} . On note $v(z, w) = |p(w - f(z))|$, pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. Supposons que v est psh sur $D \times \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe sur D .

Réciproquement. Soit p_1 un polynôme analytique sur \mathbb{C} . Supposons que pour toute $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et v_1 est psh sur \mathbb{C}^2 ($v_1(z, w) = |p_1(w - g(z))|$, pour $(z, w) \in \mathbb{C}^2$) implique g est holomorphe sur D .

Alors p_1 est un polynôme de degrés $\deg(p_1) \geq 2$, de plus $|p_1|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} .

Démonstration. Pour simplifier on admet que $n = 1$ et D est simplement connexe dans \mathbb{C} . D'après le théorème 3, f est harmonique sur D . Ecrivons que $f = g + \bar{k}$, g et $k : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes. Notons alors que v^2 est de classe C^∞ sur $D \times \mathbb{C}$.

Soit $\varphi : D \times \mathbb{C} \rightarrow D \times \mathbb{C}$, $\varphi(z, w) = (z, w + g(z))$, pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. φ est un biholomorphisme de $D \times \mathbb{C}$ sur lui même.

Posons $u(z, w) = v \circ \varphi(z, w)$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. u est psh sur $D \times \mathbb{C}$. $u(z, w) = |p(w + g(z) - g(z) - \bar{k}(z))| = |p(w - \bar{k}(z))|$. Comme p admet deux racines distinctes dans \mathbb{C} , alors $|p|^2$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} . Notons $u_1(z, w) = |p(w - \bar{z})|$, $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

$(u_1)^2$ n'est pas psh dans \mathbb{C}^2 . Supposons que k n'est pas constante.

On a alors $(u_1)^2$ est psh sur \mathbb{C}^2 si et seulement si u^2 est psh sur $D \times \mathbb{C}$ (pour obtenir cette équivalence, il fallait développer la forme hermitienne de Levi associée à u^2 . La fonction k qui apparait dans l'écriture de cette forme de Levi sera absorbée par un changement de variables convenable).

Ainsi u n'est pas psh sur $D \times \mathbb{C}$. Contradiction. \square

Il résulte que k est constante et par suite f est holomorphe sur D .

Théorème 37. Soient $f_0, f_1, \dots, f_{k-1} : D \rightarrow \mathbb{C}$ continues, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, D domaine dans \mathbb{C}^n , $n \geq 1$. $v(z, w) = |w^k + f_{k-1}(z)w^{k-1} + \dots + f_1(z)w + f_0(z)|$ pour $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$. On suppose que

a) v est psh sur $D \times \mathbb{C}$.

b) Il existe $z_0 \in D$ avec $v(z_0, \cdot)$ n'est pas convexe dans \mathbb{C} .

c) Il existe un polynôme p holomorphe sur \mathbb{C} et une fonction $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue avec $p(w - F(z)) = w^k + f_{k-1}(z)w^{k-1} + \dots + f_1(z)w + f_0(z)$, pour tout $(z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

Alors f_0, f_1, \dots, f_{k-1} sont holomorphes sur D .

Démonstration. On a $v(z, w) = |p(w - F(z))|$, $\forall (z, w) \in D \times \mathbb{C}$.

Donc $v(z_0, w) = |p(w - F(z_0))|$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Il résulte alors que $|p(w - F(z_0))|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} . En conséquence, $|p|$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} . Comme v est psh sur $D \times \mathbb{C}$, alors F est holomorphe sur D , d'après le théorème 36.

$p(w) = w^k + A_{k-1}w^{k-1} + \dots + A_0$ avec $A_0, \dots, A_{k-1} \in \mathbb{C}$.

$p(w - F(z)) = w^k + F_{k-1}(z)w^{k-1} + \dots + F_0(z)$, où $F_{k-1}, \dots, F_0 : D \rightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes.

Identifions, il arrive que $f_{k-1} = F_{k-1}, \dots, f_0 = F_0$. Donc f_0, \dots, f_{k-1} sont holomorphes sur D . \square

Remarquons que $v(z_0, \cdot)$ n'est pas convexe sur \mathbb{C} est une hypothèse très importante en analyse complexe.

Extension des résultats. Notons l'existence de polynômes p et q analytiques sur \mathbb{C} avec $|p|^2$ caractérise les fonctions holomorphes, $|q|^2$ ne caractérise pas les fonctions holomorphes. Cependant $(|p|^2 + |q|^2)$ ne caractérise pas les fonctions holomorphes.

Exemple. $p(z) = z^2 - 1, q(z) = 2z$, pour $z \in \mathbb{C}$. Posons $(|p|^2 + |q|^2)(w - \bar{z}) = v(z, w), (z, w) \in \mathbb{C}^2$. Soit $f(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$.

v est psh sur \mathbb{C}^2 car sa forme hermitienne de Levi est $L(v)(z, w)(a, b) = (4|w - \bar{z}|^2 + 4)(a\bar{a} + b\bar{b}) + 2 \operatorname{Ré}[-2[(\bar{w} - z)^2 - 1]\bar{a}b] \geq 0, \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall (z, w) \in \mathbb{C}^2$. Donc v est psh sur \mathbb{C}^2 mais f n'est pas holomorphe sur \mathbb{C} .

Proposition 3. *Il existe $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytique où D est un ouvert convexe dans $\mathbb{C}^n, (n \geq 1)$ avec $|g|$ est convexe sur D mais il n'existe pas une fonction $g_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analytique avec $g_1 = g$ sur D et $|g_1|$ est convexe sur \mathbb{C}^n .*

Exemple. $g(w) = 1 + w^2$ pour $w \in D = D\left(2, \frac{1}{4}\right)$. g est holomorphe sur $\mathbb{C}, |g|$ est convexe sur D mais n'est pas convexe sur \mathbb{C} . Donc il n'existe pas une fonction $g_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique avec $g_1 = g$ sur D et $|g_1|$ est convexe sur \mathbb{C} . Notons de plus que $|g|$ est convexe sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 2)$.

Observons que pour $f_0, \dots, f_{k-1} : D \rightarrow \mathbb{C}$ continues, D domaine dans \mathbb{C}^n , la condition $|w^k + f_{k-1}w^{k-1} + \dots + f_1w + f_0|$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ implique f_{k-1} est prh sur D , mais on ne peut rien dire sur les autres composantes $f_0, \dots, f_{k-2} (k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$.

RÉFÉRENCES

- [1] J. ABIDI. Sur quelques problèmes concernant les fonctions holomorphes et plurisousharmoniques. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **51**, 3 (2002), 411–424.
- [2] J. ABIDI, M. L. BEN YATTOU. Le minimum de deux fonctions plurisousharmoniques et une nouvelle caractérisation des fonctions holomorphes. *Math. Bohem.* **136**, 3 (2011), 301–310.
- [3] J. ABIDI. On convex and analytic functions (in preparation).

- [4] M. BRELOT. Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point. *Actualités scient. et industr.* **139** (1934), 5–55.
- [5] U. CEGRELL. Removable singularities for plurisubharmonic functions and related problems. *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.* **36** (1978), 310–336.
- [6] U. CEGRELL. Removable singularity sets for analytic functions having modulus with bounded Laplace mass. *Proc. Amer. Math. Soc.* **88** (1983), 283–286.
- [7] J. B. CONWAY. Functions of One Complex Variable II. Graduate Texts in Mathematics vol. **159**. New York, Springer-Verlag, 1995.
- [8] H. FEDERER. Geometric measure theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **153** New York, Springer-Verlag New York Inc., 1969.
- [9] R. C. GUNNING, H. ROSSI. Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [10] G. HENKIN, J. LEITERER. Theory of Functions on Complex Manifolds. Monographs in Mathematics vol. **79**. Basel, Birkhäuser Verlag, 1984.
- [11] L. HÖRMANDER. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Third edition. North-Holland Mathematical Library vol. **7**. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1990.
- [12] L. HÖRMANDER. Notions of convexity. Progress in Mathematics vol. **127**. Boston, MA, Birkhäuser Boston, Inc., 1994.
- [13] J. HYVÖNEN, J. RIIHENTAU. On the extension in the Hardy classes and in the Nevanlinna class. *Bull. Soc. Math. France* **112**, 4 (1984), 469–480.
- [14] M. JARNICKI, P. PFLUG. Extension of holomorphic functions. de Gruyter Expositions in Mathematics vol. **34**. Berlin, Walter de Gruyter & Co., 2000.
- [15] M. KLIMEK. Pluripotential theory. London Mathematical Society Monographs. New Series vol. **6**. Oxford Science Publications. New York, The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991.
- [16] S. G. KRANTZ. Function theory of several complex variables. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1982.

- [17] P. LELONG. Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Paris-London-New York, Gordon et Breach (Distributed by Dunod éditeur, Paris), 1968.
- [18] E. A. POLETSKY. Holomorphic currents. *Indiana Univ. Math. J.* **42**, 1 (1993), 85–144.
- [19] J. RIIHENTAU. On the extension of separately hyperharmonic functions and H^p -functions. *Michigan Math. J.* **31**, 1 (1984), 99–112.
- [20] L. I. RONKIN. Introduction to the theory of entire functions of several variables. Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations. Translations of Mathematical Monographs vol. **44**. Providence, R.I., American Mathematical Society, 1974.
- [21] W. RUDIN. Function Theory in Polydiscs. New York-Amsterdam, W. A. Benjamin, Inc., 1969.
- [22] D. C. ULLRICH. Removable sets for harmonic functions. *Michigan Math. J.* **38**, 3 (1991), 467–473.
- [23] V. S. VLADIMIROV. Les fonctions de plusieurs variables complexes et leur application à la théorie quantique des champs. Traduit du Russe par N. Lagowski. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 14, Paris, Dunod, 1967.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis
1060-Tunis, Tunisia
e-mail: abidijamel1@gmail.com

Received May 5, 2014