MATEMATИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

ОПИТ ЗА ЗАДЪЛБОЧАВАНЕ НА НЯКОИ ИДЕИ НА Д. ПОЙА ЗА „ЕВРИСТИЧНИТЕ МЕТОДИ“ ПРИ РЕШАВАНЕТО НА ЗАДАЧИ

Иван Ганчев Донев

В доклада се споделят мисли във връзка с някои идеи на Д. Пойа за „Евристичните методи“. Направен е опит да се задълбочат и обогатят тези идеи на базата на по-точното изявяване логическата структура на математическите разсъждения и психическите възможности на учащите се. Докато Д. Пойа поставя ударението предимно на начините, по които разсъждават хората, можещи да решават задачи, при самото решаване, то докладчикът насочва вниманието си към предварителната подготовка, която може да осигури съответните начини на разсъждение.

1. Увод. На българо-гръцкия семинар по проблемите на обучението по математика, проведен през месец януари 1993г., колегите М. Васкоглу и Х. Шасиотис изнесоха според мен два много интересни и със съвременна тематика доклади, а именно:

- Евристиката при решаването на задачи (едно „пътуване“ от Пойа до наши дни).
- Логическите способности на учениците.

Проучвайки внимателно тези доклади, съпоставяйки ги с някои разработвани от мен проблеми, свързани с формирането на умения у учениците да извършват математически разсъждения, а също и с идеи на други автори, изказали ги преди Пойа (и не непременно отнасящи се за математически факти) стигнах до някои изводи, част от които си позволявам да предложа на Вашето внимание.

2. Изводи, свързани с евристиката в математическите дейности в училище.

2.1. Не е целесъобразно Дьорд Пойа и неговите идеи за евристиката да се поставят като начало на изследването на евристиката, независимо от това, че той извършва нещо много съществено и предлага идеи, изключително важни за развитието на творческата дейност на учащите се по математика. Тези идеи обаче са само един етап, макар и много важен, от историята на разработването на проблема изобщо за евристичните методи в човешките дейности и в частност при решаването на задачи по математика. Затова според мен освен последователите на Пойа, трябва внимателно да се изучават и неговите предшественици и съвременници, включително и онези, които са се занимавали с евристиката в други нематематически области на човешката дейност. Такива са например някои древногръцки учени още от школата на Платон, живелия през третия век от н.е. математик Пап, известният ни от средните векове математик и философ Р. Декарт, а също и много учени, писатели, композитори, психолози и др. от по-ново време като Болцано, Давид Хилберт, Анри Поанкаре, Алберт Айнщайн, Марк Твен, Пьотр Илич Чайковски, Самуел Бътлър, Юрий Калягин, Ярослав Шедиви, Пиаже, Брунер, Биргхоф, Пушкин (психолог), Секей и др.

2.2. Всяка от тези личности е открила различни особености на евристиката и са натрупани много знания за нея, но тези знания са разпокъсани. Може би те вече са достатъчни, за да бъдат систематизирани и представени в някаква по-стройна теория така, както навремето Евклид систематизира в своите „Начала“ натрупаните преди него математически знания. Необходимо е обаче да се изберат подходящи релации между съответните понятия, които да изпълняват функциите на систематизиращи фактори.

2.3. Откритията при проблемите в математиката имат два аспекта:

А) Откриване на релации между математически обекти или на техни свойства и формулиране на съответна теорема или задача, която да ги изразява;

Б) Откриване и конструиране на доказателство на теорема или решение на задачата, в което е допустимо да се използват само дедуктивни умозаключения.

2.4. Дедуктивните умозаключения са основават на определени правила за извод или закони от логиката.

Както е известно, всяко доказателство има три съставни части:

А) тезис — това е твърдението, което се доказва;

Б) основания — това в математиката са определенията, аксиомите и теоремите, които се използват в доказателството;

В) правила за извод и закони от логиката, които обвързват тезиса с основанията и определят структурата на доказателството, а от там и структурата на дейността, чрез която то се открива и излага.

Това означава, че откриването и конструирането на доказателствата на теоремите и решенията на математическите задачи изисква предварително овладяване на тези правила и закони. В донеотдавнашната практика усвояването на последните се предоставяше само на неосъзнатото подражание и на стихийното натрупване на опит от решаването на много задачи и доказването на теореми, а също и от разсъжденията в ежедневието. Изследвания показват, че тази практика не осигурява задоволително усвояване на основните правила за извод и закони от логиката.

3. Възможности за по-нататъшно развитие и обогатяване идеи на Д. Пойа за евристиката.

На фона на тези общи изводи в изложението си по-нататък ще се опитам да анализирам някои от идеите на Пойа и да предложа възможности за тяхното доразвиване и обогатяване.

Както отбелязва господин Воскоглу в цитирания по-горе доклад, Д. Пойа пръв описва стратегиите за решаване на задачи по такъв начин, по който те могат да бъдат преподавани. Най-сетне той предлага „правила за предимствен избор“, с който се въвежда някакъв ред в евристичните методи при тяхното използване.

В основата на всички идеи, методи и подходи на Пойа, свързани с евристиката, е една на пръв поглед твърде тривиална, но ценна негова идея: „учениците трябва да се учат да решават задачи така, както това правят експертите (можещите да решават задачи)“. Затова според него важен подход в разработването на евристични методи е наблюдаването и изучаването опита на хора, които успешно решават задачи. Тази идея му дава възможност някои от големите идеи на Давид Хилберт за творчеството на математиците — творци в науката математика, изложени в знаменития му доклад „Математическите проблеми и техните източници“, изнесен на втория конгрес на ММС през 1900 г., да пренесе на учениково и училищно равнище. Такива са например идеите за индукцията и аналогията, а също и за сравнението, обобщението и специализацията. Дали Пойа е заимствал осъзнато тези идеи от Хилберт и ги е адаптирал към решаването на задачи в училище или ги е преоткрил, не зная. Прави ми впечатление, че в проучената литература този факт на общност на съответните идеи на Хилберт и Пойа не се третира. За практическата работа от значение обаче се оказва фактът, че Пойа и неговите последователи се интересуват преди всичко от това „в момента на решаването на нова задача какви методи се използват и как те се използват“. А в подробности на въпросите „как се овладяват тези методи?“ и „каква по-далечна и каква по-близка подготовка за тяхното овладяване е необходима?“, те почти не търсят и не намират задоволителни отговори.

Изключение в това отношение прави следната мисъл на Д. Пойа, изказана в [6] „... Той (бъдещият математик — бел. е моя) може да се опита да изясни по-дълбоко поставената задача, като я сравни с решени преди това задачи. ... Може да използва резултата или метода за някоя друга задача. Като усвоява най-пълно решените от него задачи, той може да придобие систематизирани и готови за използване познания“.

Освен това недостатъчно осъзнато и рационално се използват определенията, аксиомите и теоремите като „концентрати“, в които са синтезирани и фиксирани важни порции от знания, съществено подпомагащи досещането или както казва Пойа „От къде да започна“, т. е. реализирането на евристични подходи. По тази причина остават незабелязани няколко факта:

3.1. След появата на дефинирани понятия и на теореми, задачите променят своите функции в математиката; от основно средство за фиксиране на знания, каквито те са в Древен Вавилон и Древен Египет, при древните гърци и особено след разширяването на училищното обучение в по-ново време, задачите стават помощно дидактически средство за трениране да се работи с определения и теореми, а заедно с това — да се формират и съответни умения. Освен това в най-ново време в много страни задачите по математика са превърнати в средство за проверка на математически знания и умения и за класиране при различни състезания или конкурси. По този начин те отново добиват известна самостоятелност и уменията да се решават задачи стават цел в обучението. При това положение използването на теоремите наготово при решаването на задачи осигурява икономия на време и сили, а освен това подпомага досещането, т. е. рационализира дейностите и повишава тяхната ефективност, както това Пойа счита, че постига като се използва резултат от решена задача.

3.2. Чрез изучаването на теоремите се добавят нови свойства или признаци на усвояваните понятия, които не са посочени в определенията. При това, поради дедуктивната структура на математиката, много често различните теореми за едно и също понятие не се изучават компактно в един или няколко последователни урока, а разпокъсано в различни уроци в продължение на една или повече години. Така например теоремите, свързани с понятието успоредни прави, в българското училище се изучават в различни уроци в продължение на четири години. Подобно е положението с понятията перпендикулярни прави, равенство на отсечки, ъгъл по-голям от ъгъл, прав ъгъл и много други. Подреждането на теоремите в паметта на ученика според времето на изучаването им можем да сравним с подреждането на вещите в едно семейство според времето на купуването им. Например в понеделник купуват плат за костюм, поставят го в средата на стая. Във вторник купуват месо, поставят го върху плата. В сряда купуват яйца, поставят ги върху месото. В четвъртък купуват телевизор, поставят го върху яйцата и т.н. Ясно е, че с така подредени вещи много трудно ще се работи и хората в такъв дом ще ни изглеждат като мудни и ненаходчиви. В подобно положение се поставят и учениците с подреждането на теоремите само според времето на изучаването им. Затова те се проявяват като недосетливи при решаването на задачи, тъй като не могат „да намират“ необходимите им за целта теореми, въпреки че са ги учили.

3.3. Причина за недосещането коя теорема да се използва за решаването на дадена задача е и фактът, че в досегашната масова практика не се посочват осъзнато на учениците всички възможности, за които може да се използва всяка изучена теорема. Нещо повече чрез решаването на задачите, които се преписват от един учебник в друг, учениците обикновено се упражняват в използването само на някои възможности на изучаваните теореми. Например след доказването на теоремата за ортоцентъра в триъгълника в най-добрия случай се учат да я използват за доказване на твърдения, че „три отсечки или три прави минават през една точка“, а не се показва, че чрез тази теорема може да се доказва перпендикулярност на отсечки или прави. Поради това тази възможност на теоремата за ортоцентъра в триъгълника за масата ученици се проявява като слабо свойство, според терминологията на скандинавския психолог Л. Секей, и естествено е, че те не се досещат да използват това свойство.

Трябва да подчертая, че ползата от познаването на всички възможности за извършване на дадена дейност не е останала незабелязана от Д. Пойа. Нещо повече, използването на всички възможности той свързва със здравия смисъл в поведението на хората.

4. Предварителната подготовка за евристичните методи и подходи. За отстраняване или поне ограничаване на посочените недостатъци на установилата се досега практика и на разработената теория, свързана с евристиката в обучението по математика, стигнах до извода, че могат да се използват различни нови подходи и методи. Ще си позволя да посоча само някои от тях.

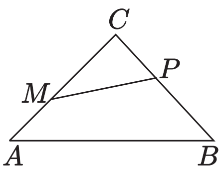
4.1. След доказването на всяка теорема се посочва за какво може и за какво не може тя да се използва и се илюстрират и съответните възможности чрез решаване на подходящи задачи. Например след доказването на теоремата „Ако един четириъгълник е успоредник, то срещуположните му страни са две по две равни“ трябва да се изтъкне, че тя може да се използва, когато е на лице успоредник, за да се докаже, че срещулежащите страни са две по две равни и че тя не може да се използва за доказване, че даден четириъгълник е успоредник. Последната възможност осигурява обратната на цитираната теорема: „Ако срещулежащите страни на един четириъгълник са две по две равни, то той е успоредник“.

Чрез дейности като тези, особено през първите две години на систематичния курс по математика, се постигат три ефекта: Учениците осмислят значението на словосъчетанието „Ако ..., то ...“, което от своя страна им помага да се досещат да използват правилото за извод $\dfrac{p \to q, p}{q}$. Освен това то ги предпазва от използването на схемата $\dfrac{p \to q, q}{p}$, която не е правило за извод. Заедно с това те се учат да използват конкретната теорема като средство за смяна на понятийните характеристики, а именно като чуят за „срещулежащи страни на успоредник“, да се досещат за „равенство на отсечки“ и обратно. Най-сетне чрез решаването на задачи, илюстриращи еднакво всички възможности за използване на теоремите, тези възможности се превръщат за ученика в еднакво силни техни страни и учениците ще могат да се досещат да ги използват.

Ще отбележа също така, че не са малко и свойствата на някои обекти или двучленни релации и операции, които са тривиални и се използват често без обаче явно да се обособяват като твърдения за използване наготово. Такива са симетричността, транзитивността и антисиметричността на срещаните в училище двучленни релации, а също груповите свойства на изучаваните в училище операции. Изследванията показват, че извършването на много допълнителни построения в геометрията, а също и прибавянето и изваждането на едно и също число, и умножаването и деленето с едно и също число в аритметиката и алгебрата се приемат като изкуствени за учениците, защото се основават именно на посочените свойства на релациите и операциите, които не са били преди това обект на внимание в обучението. С този проблем започнах да се занимавам осъзнато от 1969 г., когато в един разговор с полската математичка проф. А. С. Криговская научих, че според проведени от нея изследвания симетричността на симетричните релации се оказва психологически по-трудна в сравнение с транзитивността на транзитивните релации.

4.2. След посочването за какво може да се използва дадена теорема, се припомнят чрез беседа другите, учени до момента теореми или определения, които могат да се използват за същата цел. По този начин теоремите и определенията се систематизират в паметта на учениците според това за какво може да се използват. Под мое влияние много учители в България използват осъзнато и системно този начин за систематизиране на изучаваните определения и теореми повече от 20 години. Някои от тях даже въвеждат още от 7 клас използването на отделна тетрадка, където се записват по специален начин определенията и теоремите, осигуряващи достатъчни условия за съществуване на всяко понятие, когато за това понятие се изучават повече от 2 такива теореми. Така постепенно се получават сложни изречения, съдържащи цялата информация, чрез която могат да се разпознават обектите от обемите на почти всички изучавани понятия. Тези сложни изречения нарекох за учителите „дидактически системи от признаци“ (ДСП), а за учениците — системи от признаци.

Ще си позволя да посоча, че заслужава специално да обърнем внимание на ползата от включването в ДСП на транзитивността на транзитивните релации, а също и на изключването на така наречените „други възможности“. Невладеенето на транзитивността е причина учениците да не се досещат, когато трябва да доказват, че два обекта са в някаква транзитивна релация, да потърсят трети обект, който е с двата обекта поотделно в същата релация. Интересно в това отношение е например решението на задачата:



Черт. 1

Задача 1. *Да се докаже, че:*

а) *ако в* $\triangle ABC$ *страната* AB *е най-голяма (черт. 1), точката* M *е вътрешна за страната* AC, *а точката* P *е вътрешната за страната* BC, *то* $AB > MP$;

б) $\operatorname{tg} 153^\circ > \cos 136^\circ$.

Невладеенето на изключването на „другите възможности“ е причина учениците да не се досещат да използват „доказателства с допускане на противното“, т. е. отрицанието.

Поради ограничените възможности, с които разполагаме, няма да се спирам на конкретните дейности на учителите и учениците, свързани със съставянето и използването на ДСП.

По аналогичен начин може да се систематизират определенията и теоремите, осигуряващи необходими условия за понятията в „дидактически системи от свойства“ (ДСС).

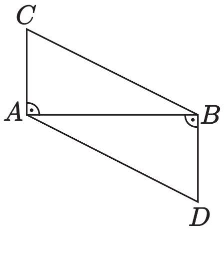
4.3. В началото на така наречения систематичен курс по геометрия, когато се доказват и използват първите теореми, се създават учебни ситуации, в които учениците преоткриват правилото за извод

$$\frac{p \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots, p_k \to q}{p \to q}$$

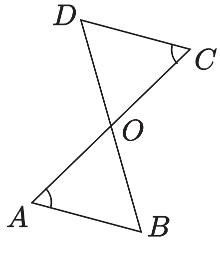
и схемата на Пап за анализ на решения на задачи чрез решаването на конкретни задачи. За целта първо се поставят за решаване задачи, чиито решения се състоят от една „стъпка“, т. е. в които се прилага по една теорема. Такава е задачата:

Задача 2. *На чертежа (черт. 2)* $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ *и* $AC = BD$. *Да се докаже, че* $\triangle ABC \cong \triangle BAD$.

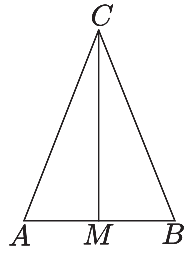
След като учениците придобият умението да решават задачи с използването на едно свойство (теорема), се поставят задачи, при чието решаване се налага прилагане на две свойства (две теореми), но с отделни въпроси, насочващи към използването



Черт. 2



Черт. 3



Черт. 4

съответно на всяко от свойствата. Тези задачи отначало се решават само колективно в клас под ръководството на учителя. Такава е например задачата:

Задача 3. *На чертежа (черт. 3) отсечките AC и BD се разполовяват от пресечната им точка O. Да се докаже, че:*
а) $\triangle ABO \cong \triangle CDO$;
б) $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCD$.

След придобиването на умения за решаването на задачи с използването на две свойства (две теореми), но с поставянето на въпроси за всяка от двете стъпки, се поставят последователно за решаване две задачи, отнасящи се за една и съща фигура, но съответно с два и един въпроси. Такива са например задачите:

Задача 4. *На чертежа (черт. 4) $\triangle ABC$ е равнобедрен ($AC = BC$) и CM е медиана. Да се докаже, че:*
а) $\triangle AMC \cong \triangle BMC$;
б) $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM$.

Задача 5. *На чертежа (черт. 4) $\triangle ABC$ е равнобедрен ($AC = BC$) и CM е медиана. Да се докаже, че $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM$.*

Повтарянето на фигурата във втората от последните две задачи точно такава, каквато е в първата от тях, помага на учениците да се ориентират бързо, че решението на втората задача се състои от същите стъпки, от които се състои и решението на първата. Това „откритие“ те обикновено изразяват с думите: „Това е същата задача“. На провокационния въпрос „Как това да е същата задача, когато в първата се иска да се докаже и еднаквостта на двата триъгълника, а тук се иска само да се докаже, че $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM$“, учениците бързо отговарят: „Но и тук за да докажем, че двата ъгъла са равни, първо ще докажем еднаквостта на двата триъгълника“.

Лесно се съобразява, че решението на задача 4 схематично може да се представи така:

$$\frac{p \to p_1, p}{p_1}, \tag{1}$$

$$\frac{p_1 \to q, p_1}{q}. \tag{2}$$

Решението, което фактически дават учениците с отговора си за задача 5, може да се представи с

$$\frac{p \to p_1, p_1 \to q}{p \to q} \text{ и } \frac{p \to q, p}{q}. \tag{3}$$

Това означава, че учениците сами „сглобяват“ (1) и (2) в (3), а изказаното от тях твърдение съответства на схемата на Пап за откриване на междинните импликации в решението на задача 5.

Впоследствие чрез поставянето на „трети“ въпрос учениците преоткриват схемата

$$\frac{p \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to q}{p \to q} \tag{4}$$

и т. н.

По този начин учениците постепенно преоткриват и усвояват структурата на математическите доказателства, а придобитите знания и умения в това отношение им служат впоследствие като ориентири при доказването на нови теореми и решаването на задачи.

4.4. Разгледаните до тук подходи се отнасят повече за развиване на евристичните способности на учениците в началния етап от усвояването на систематичния курс по математика и на дедуктивния стил на разсъждение. Накрая ще се спра накратко и на един подход, който може да се използва успешно за ускоряване развитието на умения за решаване на задачи и когато учениците вече са усвоили дедуктивния стил на разсъждение. Този подход подробно е изложен и обоснован в книгата „За математическите задачи“ [2]. Тук ще посоча само, че той се свежда до съблюдаването на следното изискване: Решаваните задачи в обучението по математика да се систематизират по групи (системи) така, че решаването на всяка задача след първата в една група (система) да се подготвя чрез решаването на предходни задачи, наречени нейни задачи-компоненти. Използването на този подход позволява учениците бързо и без особени затруднения за кратко време да бъдат научени да решават голям брой задачи — понякога по няколко стотици за около 60 мин. В една такава система от задачи за построение е например задачата:

Задача 6. *Да се построи триъгълник по дадени* $\dfrac{h_b}{h_a}$, γ, $R-r$.

Чрез прилагането на този подход осъзнато се осигурява възможност ученикът да придобие, по думите на Д. Пойа, „добре систематизирани и готови за използване познания“ — идея, която фактически на един етап реализират още древните гърци чрез въвеждането на теоремите, където се фиксират знания за използване наготово. По-късно през средните векове, когато се създава алгебричната буквена символика, подобен ефект се постига и чрез извеждане на формули, които също се използват наготово. В по-ново време все по-често се поставя проблема за въвеждане на общоприети базисни задачи за построение, които да се използват „наготово“ след като веднъж са решени [1]. Във всички тези случаи, за сметка на натоварване на паметта, се увеличават евристичните възможности на учениците. Нещо повече, много от дейностите при решаване на задачи стават полуалгоритмични или алгоритмични. Това обаче според някои специалисти лишава учениците от творчески търсения, т. е. има и отрицателни последствия. По тази причина все по-убедително се налага идеята за необходимост от търсене на по-добро, ако не и оптимално решение на проблема за фиксиране на задачи, които след като веднъж са решени, да се използват „наготово“ (както това става с въвеждането на теоремите в Древна Гърция).

5. За евристиката и третия въпрос, на който все повече преподаватели приемат, че е целесъобразно да се отговаря в обучението по математика. От историята на математиката е известно, че докато в предгръцкия период на математиката се отговаря на въпроса „как?“, то през древногръцкия период вследствие на философския принцип за „разумната обоснованост“ се приема, че трябва да се отговаря на въпроса „защо?“. Утвърждаването на този принцип продължава повече от 600 години. Например и през втория век от н.е. видни учени отричат целесъобразността от доказване верността на твърденията и изобщо от дедуктивното структуриране на знанията като надеждно средство за „достигане до истината“, провъзгласено и защитавано още през четвъртия век пр.н.е. от Аристотел. Подобно явление се наблюдава и от 40-те години на 20-я век с постепенното налагане в обучението по математика на изискването човек да отговаря на въпроса как се е досетил „От къде да започне?“ и „Накъде по-нататък да върви?“, които имат чисто психологичен и евристичен характер. Един от учените, който пръв съвсем осъзнато аргументира целесъобразността да се отговаря на тези въпроси в обучението по математика, е Д. Пойа. Днес броят на преподавателите, които поддържат и защитават тази идея, бързо нараства. Това дава основание да предполагам, че след 100 или 200 години изискването да се отговаря на въпроса за досещането „от къде да се започне“ и „накъде по-нататък“ поне в методиката на обучението по математика ще се превърне в задължителна норма. По този начин ще се намали още повече догматичността на математическите разсъждения, както това става, когато в Древна Гърция като задължителна норма в математическите разсъждения се налага отговорът на въпроса „защо?“.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ян Вишин, Методика за решаване на математически задачи, С., 1965.
[2] Ив. Ганчев, За математическите задачи, С., 1971.
[3] Ив. Ганчев, М. Върбанова, История на математиката (курс лекции), Велико Търново, 1994.
[4] Ю. М. Колягин, Задачи в обучении по математике, ч. I и ч. II, М., 1977.
[5] Ю. Н. Кулюткин, Г. С. Сухобская, Эвристический поиск при решении задач, М., 1967.
[6] Д. Пойа, Как да се решава задача, С., 1973.
[7] В. Н. Пушкин, Эвристика — наука о творческом мышлении, М., 1967.
[10] А. П. Юшкевич (ред.), *Математические проблемы и их источники. Из доклада Д.Гилберта „Математические проблемы“* (1900), Хрестоматия по истории математики, 1976.

Иван Ганчев
ул. „Хан Крум“ 32
1000 София, България

AN ATEMPT FOR DEEPENING SOME D. POLYA'S IDEAS FOR "EURISTIC METHODS IN SOLVING PROBLEMS"

Ivan Ganchev

Some D. Polya's ideas about "Euristic methods" are mentioned in the article. These ideas are enriched on the base of more precised expression of the logical structures of mathematical points and psychic abilities of the students. While D. Polya stresses mainly on the ways people, who can solve problems, think when solving them, the lecturer pays attentions on a preliminary preparation, which can asure the proper ways of thinking.