МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

КУРСЪТ ПО ОСНОВИ НА АРИТМЕТИКАТА В СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ

Петьо Петров Петков

Авторът описва накратко историята на преподаването на предмета в Софийския Университет от 1949 г. насам, а също и своя опит в това преподаване от 1987/88 до 1998/99 учебна година.

1. Из историята на преподаването и пропагандирането на предмета. В Софийския университет, респективно в Математическия факултет, беше добре известен курсът по Основи на математиката на Боян Петканчин, с начало 1942 г. [35]. От гледна точка на логико-философските внушения този курс доста надвишаваше курсовете по други дисциплини на редица български лектори. В него имаше монолитност на изложението, разумен подбор на материала и обмисляне на детайлите, които бяха поднасяни с еднакъв критерий за прецизност и строгост от началото до края, като се държи сметка за постепенното привикване на читателя към равнището на строгостта. В курса е явно влиянието на Хилбертовата философия, и влиянието на Кантор, с отчитането на класическите постановки, свързани с Фреге и Пеано. Той е част от общия, изобилен и преобладаващ по това време поток от съчинения на Хилберто - Бурбакистичното направление. Изложението е базирано върху теорията на множествата, представена, макар и нестрого, по Цермело - Френкел с аксиомата за избора, но без хипотезата за континуума, аксиомата за фундирането и т. н. Отразено е и съдържанието на теоремата на Гьодел за непълнота.

Курсът на Петканчин правеше много силно впечатление на студентите-математици от 50-те години и е един от сериозните успехи в българското математическо преподаване. Носталгията по него кара много колеги от средното и по-възрастно поколение да вярват, че Основи на аритметиката – това е нещо като извънредно детайлизирано (аксиоматично и генетично) изложение на йерархия от математически структури, най-вече по линията *естествени–цели–рационални–комплексни–хиперкомплексни* числа и на по-абстрактно ниво – *пръстени–полета–наредени полета–непрекъснато наредени полета*, а в областта на геометрията – *аксиоматика, аритметични модели, неевклидови геометрии.*

По-късно създаденото от Петканчин четене беше разделено в Математическия факултет на две части – основи на аритметиката и основи на геометрията.

Следваща книга, оказала влияние на този вид преподаване в Софийския университет, е “The number systems” от Solomon Feferman, 1963 г. (Станфордски университет, Калифорния). Интересно е, че по редица параметри (подбор и подредба на материала, гледна точка, равнище на описание на логическите средства и др.) тя твърде малко се различава от учебника на Петканчин. При Феферман се вижда един по-модерен подход, което не е чудно, тъй като този автор е бил по-добре запознат с атмосферата в логическите кръгове това време, а по-късно стана световно известен със сериозните си логико-математически изследвания.

През 1974 г. излезе книгата „Числови системи“ на Иван Проданов и Иван Чобанов [46]. Подборът на материала, като имаме предвид книгата на Петканчин (и на Феферман), е станалият по онова време „традиционен“ за нашата литература подбор. Двамата автори са много добри стилисти. На книгата може да се гледа като на известно „противопоставяне“ на „Основите“ на Петканчин, в смисъл на създаване на текст, който е „по-идеен“ по форма и по-лесен за четене. Тя е „по-бурбакистична“ от „Основите“. Някои лектори (например в курсовете за следдипломна квалификация) доста време се придържаха, а може би и досега се придържат към нея.

Интересно е, че въпросите от типа „що е число“ са заемали много съществено място в Списанието на физико-математическото дружество в началото на нашия век, като се започне от 1904 г. (вж. [58] [68] и [70] – [75] от библиографията). Нещо повече – доста от статиите, публикувани там по този въпрос, се издигат по качество над останалите статии в същото списание, посветени на други теми. Интересът към темата е нестихващ и, разбира се, се дължи на любопитството, което всяка що-годе навлязла в математиката личност изпитва към възможността за създаване на единно здание на математическата наука, притежаващо ясна и проста структура, към изясняване на възможностите за строго обосноваване на една наука въобще, към критериите за преценка на разумността, естетическата ценност и полезността на едни или други методи за разсъждение и т. н. За същия интерес говорят и курсовете, които, по маниера на Феферман и Проданов – Чобанов, се наричат „Числови системи“ и са четени в Института за усъвършенстване на учители към Софийския университет, а също и спецкурсове със същите названия, четени в Математическия факултет.

Четенето на курса по основи на аритметиката във ФМИ ми е възложено от 1987/1988 уч. г., пред студенти от IV курс, специалност математика, направление учители. Главната му цел е да представи в действие основна част от методологията и философията на математиката, посредством конкретно математическо конструиране на основните аритметически системи.

2. Курсът по основи на аритметиката и учителската професия. Не е нужно да се доказва, че учителят трябва да знае и добре да разбира, че на математиката може да се гледа като на цялостен, макар и развиващ се организъм, а не като на мозайка, съставена от различни парчета, които като че ли имат нещо общо помежду си, но не е съвсем ясно какво е то. Той трябва да има широта на погледа, каквато не може да се придобие само чрез слушане на курсове, които отиват напред, що се касае до натрупване на математически факти, но въпреки че дават представа за разнообразието на фактите в математиката, са подчинени на една и съща тясна методология.

Заслужава да се отбележи изрично, че всички съществени спорове и големи течения в математическата философия се илюстрират или дават отражение върху този (на пръв поглед малък) обем математически знания, който се обхваща от средото училище. Понятието „доказателство“, убедителност на доказателствата, въпросите за съществуването на обектите на една математическа теория, понятието „безкрайност“ и т. н. вече присъстват тук в по-явна или по-завоалирана форма. Учителят трябва да има опит в боравенето с тези понятия и в тяхното обсъждане още от началото на своята кариера.

3. Какво би трябвало да съдържа курсът? Времето, което може да бъде отделено в учебния план е, разбира се, малко (кой ли лектор няма да се оплаче от недостига на часове?). Тясно – математическото съдържание може да се ограничи с естествени, цели, рационални и реални числа. Логико-математическите понятия следва да обхванат кръга „определение (индуктивно, аксиоматично, описателно), интуиция за общност и вариране на константа, конструктивно и неконструктивно разбиране на квантора за съществуване (заедно с някои основни теореми за алгоритмична неразрешимост)“. Целесъобразно е да се споменат три методологии по отношение на безкрайността: приемане на абстракцията на потенциалната осъществимост, на актуалната безкрайност и отказът и от двете абстракции. Математическите следствия в първите два случая са прости и широко разработени, което позволява да бъдат включени и в курса, но третият подход води към допълнителни трудности и при краткото време остава само да бъде споменат. Следва да се включи и материал по нестандартни разширения. Би трябвало да има и материал, илюстриращ методите на изследване на математически теории (езици, вярност, доказуемост, теореми на Гьодел за непълнота), но това остава за курсовете по математическа логика.

През различните години съм вземал в различни съотношения на обемите части от казания материал, с изключение на теоремите за непълнота, които чета в отделен спецкурс.

4. Педагогическа подредба. Аксиоматичното излагане, като се върви от общото към частното, е нещо твърде догматично. Догматичният метод е добър, защото може да предоставя ясни класификации на теориите и дава кондензирани доказателства, но, от друга страна, лишава учащия от критичност и от инициатива, а също и от истинско разбиране на целите, преследвани при създаване на важните теории и на причините за възприемане или отхвърляне на едни или други методи. Ето защо е възприета следната подредба за всяка от по-големите теми: Увод, в който се обсъждат целите, водещи до създаване на съответната теория, и мотивировка на по-важните определения; генетично изграждане на теорията; аксиоматика на теорията; празнини в теорията, които могат да се тълкуват като неудобства и мотивират стремеж към нейно разширяване. Полезно е да се полагат усилия, щото студентите да не остават с впечатлението, че пред тях е разгърнато някакво „единствено правилно“ изложение.

5. Конкретни понятия, илюстриращи съдържанието: Думи, графично равенство, конкатенация на думи, естествено число (вкл. позиционни бройни системи – чрез лексикографска наредба на думите в дадена азбука), цяло число (допълване на естествените числа с отрицателни), рационално число, фундаментална редица от рационални числа (конфиналност, наредба, действия), реално число (равенство, наредба, действия, гъстота, фундаментални и сходящи редици), стабилизиране на редица относно предикат, нестандартно разширение на числова теория (разширения на изучените стандартни теории, безкрайна близост, безкрайно малки и безкрайно големи числа, монади, галактики – по методиката от [41]), изчислимо реално число (регулатор на фундаменталност и на конфиналност, алгоритмична неразрешимост).

Заслужава да се отбележи, че систематичното отделяне на принципа за непрекъснатост от гъстотата води до две не съвсем очаквани награди: По-проста от формална гледна точка дефиниция на понятието „граница на функция“, доста добра за нуждите на първоначалното въведение в предмета [42] и една неизползвана възможност за едновременно разглеждане на интерполационни и апроксимационни теореми.

6. Системата от аксиоми. Аксиоматизациите се правят при минимални сигнатури (например, те не включват сбора и произведението). Освен равенството, за естествените числа това е операцията „непосредствен наследник“, за целите числа се добавят „противоположно число“ и „модул“, за рационалните се добавят по същество „числител“ и „знаменател“, а за реалните – „рационално приближение“. По традиция преобладава друг подход: минимална да бъде само сигнатурата в случая на естествените числа. Повсеместната минималност прави нещата по-кратки и по-съгласувани, освен това тя по-добре съответства на начина, по който става първоначалното въвеждане на числата в училище, но донякъде оставя на по-заден план принципа на перманентността. Обаче това е компенсирано в редица други случаи, чрез подчертаване на сходства между определения, теореми и теории, чрез аксиоматична дефиниция на понятието „величина“, чрез нестандартните модели и др.

7. Благодарности. Основните параметри на курса са докладвани пред Колоквиума по математическа логика с ръководител доц. Ив. Сосков, май, 1994 г., и пред Катедрата по математическа логика и приложенията ѝ, с ръководител проф. Д. Скордев, март, 1995 г. Някои факти за границите на функции при наличие на принцип за непрекъснатост, но без гъстота, са докладвани пред Семинара на същата катедра, юни 1994 г. Възможността за прилагането на казаното понятие за граница

с цел опростяване на излагането на анализа в средното училище е докладвана и обсъждана на Семинара по образование на проф. Н. Хаджииванов през м. май 1994 г. Благодаря на участниците в споменатите заседания за вниманието.

Благодаря също на Програмния комитет на настоящата конференция за поканата да изнеса този доклад.

ЛИТЕРАТУРА

Литературата, свързана с разглежданите въпроси, е огромна. Следващият списък от източници, естествено, е непълен. Тук са включени само книги и статии на български език (някои от тях преводни). В библиографията не са включени уводните учебници по стандартен анализ (където по традиция се излагат някои от пътищата за дефиниране на реални числа), нито книги по алгебра, разглеждащи конструирането на различни видове алгебрични системи. За търсене на източници в Internet може да се използва поддържаната от Хайделбергската академия на науките Bibliography of Mathematical Logic and Related Fields, http://www-logic.uni-kl.de /BIBL/.

[1] Архимед. Съчинения. (В два тома). „Наука и изкуство“, София, 1979. (Принципът на Евдокс-Архимед е формулиран в „Квадратура на параболата“, т. I).

[2] Бел, Е. Т. Изгубен рай? Математика и физика, год. XII (1969), кн. 1, 44-51 и кн. 2, 51-55.

[3] Борел, Е. Логика и интуиция в математиката. В сб. Математика в миниатюри. Втора книга. „Наука и изкуство“, София, 1986, 41-50.

[4] Биркхоф, Г. Математика и психология. Физ.-мат. сп.-ние, т. 14(47) (1971), кн. 3, 212-231 и кн. 4, 297-322.

[5] Бланше, Р. Аксиоматика. „Наука и изкуство“, София, 1969.

[6] Брижицки, Ал. Цели числа и нула. Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. XIII (1927), кн. 1, 30-37.

[7] Вайл, Х. Математическият начин на мислене. В сб. Вселена'69. „Наука и изкуство“, София, 1969, 24-35.

[8] ван дер Варден, Б. Л. Пробуждаща се наука. Математиката в древен Египет, Вавилон и Гърция. „Наука и изкуство“, София, 1968.

[9] Гаргов, Г. Диофантово представяне на простите числа. Физ.-мат. сп.-ние, т. 20(53) (1977), кн. 4, 327-330.

[10] Горанко, В., С. Паси, съставители. Сказки по логика. Унив. изд. „Св. Климент Охридски“, София, 1990.

[11] Гудстейн, Р. Л. Проблемата за разрешимост, Физ.-мат. сп.-ние, т. 5(38) (1962), кн. 4, 271-282.

[12] Давидов, Л. И.; Ст. М. Додунеков. Преподаването на алгебра и анализ в НМГ. В сб. Математика и математическо образование. Трудове на XII Пролетна конф. на СМБ, Изд. на БАН, София, 1983, 32-36.

[13] Дейвис, М. Що е изчисление. В сб. Математиката днес. „Наука и изкуство“, София, 1984, 262-289.

[14] Дейвис, М. и Р. Херш. Десетата проблема на Хилберт. Физ.-мат. сп.-ние, т. 20(53) (1977), кн. 3, 245-252.

[15] Евклид. Елементи. „Наука и изкуство“, София, т.1-1972, т. 2-1973, т.3-1974.

[16] Жечев, Ив. Алгебрични и трансцендентни числа. Сп.-ние на Физ.-матем.-то др.-во в София, год XIV (1928), кн. 1, 111-121.

[17] История на математиката от най-древни времена до началото на новото време. Под редакцията на А.П.Юшкевич и А.Н.Колмогоров. „Наука и изкуство“, София, т.1.-1974, т.2.-1975, т.3.-1976, т.4.-1981.

[18] Кантор, Георг. Понятието мощност, или кардинално число. „Математика“, год VII (1968), кн. 4, 6-7.

[19] Кели, Дж. Л. Обща топология. „Наука и изкуство“, София, 1971.

[20] Кнут, Д. Е. Алгоритми в съвременната математика. Физ.-мат. сп.-ние, т. 25(58) (1983), кн. 1, 59-76.

[21] Колмогоров, А. Н, Ф. И. Варпаховский. Решението на десетата Хилбертова проблема. Физ.-мат. сп.-ние, т. 14(47) (1971), кн. 1, 82-87.

[22] Колмогоров, А. Н. Съвременни възгледи върху характера на математиката. В сб. Осъвременяване на обучението по математика, ч. I. „Народна просвета“, София, 1976, 10-20.

[23] Колмогоров, А. Н. Естествени числа. Ibid., 20-41.

[24] Колмогоров А. Н. Обобщение на понятието число. Неотрицателни рационални числа. Ibid., 41-52.

[25] Кристиян, К. Живот и творчество на Курт Гьодел. Физ.-мат. сп.-ние, т. 30(63) (1988), кн. 1, 25-32.

[26] Кросли, Дж., К. Еш, К. Брикхил, Дж. Стилуел, Н. Уилямз. Що е математическа логика? „Наука и изкуство“, София, 1972.

[27] Лакатош, И. Доказателства и опровержения. Логика на математическото откритие. „Наука и изкуство“, София, 1983.

[28] Манин, Ю. И. Теорема на Гьодел. Физ.-мат. сп.-ние, т. 20(53) (1977), кн. 3, 231-244.

[29] Марков, А. А. Конструктивна математика. Физ.-мат. сп.-ние, т. 6(39) (1963), кн. 2, 129-136.

[30] Марков, А. А. Логика на конструктивната математика. В сб. Проблеми на съвременната математика, т.II. „Наука и изкуство“, София, 1974.

[31] Мартинов, Н. Геометрични преобразувания и реални числа. В сб. Осъвременяване на обучението по математика, ч.I. „Народна просвета“, София, 1976, 62-72.

[32] Нагел, Ъ., Дж. Нюман. Доказателството на Гьодел. Физ.-мат. сп.-ние, т. 9(42) (1966), 193-216.

[33] фон Нойман, Дж. Мтематикът. В сб. Вселена'69. Природонаучен алманах. „Наука и изкуство“, София, 1969, 58-64. Също и в сб. Математика в миниатюри. Втора книга. „Наука и изкуство“, София, 1986, 70-81.

[34, .] . Вярност относно ултрафилтър, или как да направим интуицията строга. Физ.-мат. сп.-ние, т. 16(49) (1973), кн. 4, 301-309.

[35] Петканчин, Б. Основи на математиката. София, „Наука и изкуство“, 1959; II изд. 1968.

[36] Петканчин, Б. Измерване на величините в геометрията. Физ.-мат. сп.-ние, т. 2(35) (1959), кн. 2, 83-102, кн.3, 151-168, кн. 4, 213-238.

[37] Петков, П. Позиционни бройни системи. Единственост и съществуване на позиционния запис. Сп. Обучението по математика, год. VIII (XXVI) (1983), кн. 3, 4-13.

[38] Петков, П. Нестандартни реални числа. Сп. Математика, год. XXIV (1985), бр. 10, 7-11.

[39] Петков, П. Животът и делото на Курт Гьодел (по случай 80 години от рождението му). В сб. Математика и математическо образование. Трудове на XV Пролетна конф. на СМБ. Изд. на БАН, София, 1986, 101-135.

[40] Петков, П. Елементи на математическата логика в задачи. СУ „Св. Климент Охридски“, София, 1986.

[41] Петков, П. Нестандартният анализ. Сп. Обучението по математика, год. XI(XXIX) (1986); I. Нестандартни разширения на числови системи – кн. 2, 10-18; II. Нестандартна теория на реалните числа и реалните функции – кн. 3, 11-20.

[42] Петков, П. Проста дефиниция за граница на функция. Сп. Обучението по математика, год. XVI(XXXIV) (1991), кн. 6, 1-8.

[43] Петков, П. Една възможност за подобряване на преподаването на определените интеграли (дефиницията на Хенсток-Курцвайл). В сб. Математика и математическо образование. Трудове на XXV Пролетна конф. на СМБ. София, 1996, 343-349.

[44] Поанкаре, А. Интуиция и логика в математиката. В сб. Математика в миниатюри. Втора книга. „Наука и изкуство“, София, 1986, 30-40.

[45] Проданов, Ив. Принцип за непрекъснатост. Сп. Математика, год. XII (1973), кн. 1, 15-19.

[46] Проданов, Ив., Ив. Чобанов. Числови системи. „Народна просвета“, София, 1974.

[47] Проданов, Ив. Елементарни функции. „Народна просвета“, София, 1978.

[48] Рашова, Х. Елементи на теорията на множествата и математическата логика. „Наука и изкуство“, София, 1972.

[49] Рийд, К. Давид Хилберт. „Наука и изкуство“, София, 1973.

[50] Сйерпиньски, В. За математичната индукция. Сп.-ние на Физ.-матем.-то др.-во, год. XXIII (1938), кн. 5-6, 157-169.

[51] Скордев, Д. Алгоритмична нерешимост на проблемата за съществуване на решение за показателните Диофантови уравнения. Физ.-мат. сп.-ние, т. 5(38) (1962), кн. 4, 302-304.

[52] Скордев, Д. Алгоритмична нерешимост на десетата проблема на Хилберт. Физ.-мат. сп.-ние, т. 13(46) (1970), кн. 2, 155-157.

[53] Смулян, Р. Как се казва тази книга? „Наука и изкуство“, София, 1986.

[54] Смълян, Р. Нерешимото. УИ „Св. Климент Охридски“, София, 1998.

[55] Станчев, Ст. Аксиоматиката до Хилберт. Сп.-ние на Физ.-матем.-то др.-во, год. XXVI (1940), кн. 3 и 4, 111-117.

[56] Стийн, Л. А. Нови модели на реалната числова права. В сб. Вселена'72. Природонаучен алманах. „Наука и изкуство“, София, 1972, 46-57.

[57] Стийн, Л. А. Основи на математиката – неразрешими задачи. Физ.-мат. сп.-ние, т. 20(53) (1977), кн. 3, 262-264.

[58] Стоянов, Г. Новите възгледи върху ирационалните числа (I. Възгледът на Meray-Cantor; II. Възгледът на Weierstrass'a; III. Възгледът на Дедекинда). Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. V (1909), кн. I, 12-28, кн. II, 42-57 и кн. II-IV, 97-110.

[59] Стройк, Д. Я. Кратък очерк по история на математиката. „Наука и изкуство“, София, 1970.

[60] Тонков, Т. Десетата проблема на Хилберт решена. В сб. Вселена'71, „Наука и изкуство“, София, 1972, 74-76.

[61] Тонков, Т. Бройни системи. „Наука и изкуство“, София, 1987.

[62] Търкаланов, Кр. Д. Лекции по елементи на теорията на множествата и математическата логика. Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив, 1980.

[63] Уайлдър, Р. Л. Ролята на аксиоматичния метод. Физ.-мат. сп.-ние, т. 12(45) (1969), кн. 3, 221-234.

[64] Успенски, В. Нестандартният анализ. Физ.-мат. сп.-ние, т. 23(56) (1980-1981), кн. 3, 219-231.

[65] Хаджииванов, Н. Какво можем да докажем с принципа за непрекъснатост и какво не можем да докажем без него. Сп. Обучението по математика, год. XIX (1976); I.-кн. 1, 3-7; II.-кн. 2, 4-9.
[66] Хилберт, Д. Основи на геометрията. „Наука и изкуство“, София, 1978. (По-специално приложенията от VI до X вкл.).
[67] Христов, Хр. Я. Върху аксиоматичния подход в рационалните и експерименталните науки. В сб. Проблеми на логиката, т. 2, Изд. на БАН, София, 1969, 39-83.
[68] Чакалов, Л. Еволюция на понятието число. (Встъпителна лекция, четена на 11.X.1914 г.). Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. IX (1914), кн. I-II, 1-14.
[69] Шопова, Д.; Д. Скордев, Реални числа. „Народна просвета“, София, 1971.
[70] Янчулев, Л. Математическа безкрайност. Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. III (1906), кн. IX-X, 435-440.
[71] Pringsheim, A. и J. Molk. Ирационални числа и граници. Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. IV (1908), кн. VI-V, 172-187, и кн. VII и VIII, 204-227.
[72] U. Към учението за положителни и отрицателни числа. Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. II (1905), кн. II, 41-47 и кн. III, 81-86.
[73] Un. Към: I. Основните аритметически понятия: число, единица, броене. Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. I (1904), кн. IV, 94-100, и кн. V и VI, 129-132.
[74] Un. I. Върху основните аритметични понятия. Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. I (1905), кн. VIII, 225-228 и кн. X, 289-293.
[75] Uni. Числата като прости знакове. Сп.-ние на физ.-матем.-то др.-во в София, год. II (1905), кн. I, 1-6 и кн. II, 47.

СУ „Св.Кл.Охридски“
Факултет по математика и информатика
Бул. „Дж. Баучер“ 5
1164 София

THE COURSE IN THE FOUNDATIONS OF ARITHMETICS AT THE SOFIA UNIVERSITY

Petio Petkov

The author propose a short hirtory of the teaching in the Foundations of Arithmetics at the Sofia University since 1949, and his own experience in that subject from 1987/88 to 1998/99.