МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

ВЪРХУ ЕДНО ФАКТОРМНОЖЕСТВО НА СИМЕТРИЧНАТА ГРУПА

Красимир Янков Йорджев

Разгледана е релация на еквивалентност в множеството на квадратните бинарни матрици с точно една единица на всеки ред и всеки стълб. Използувайки изоморфизма между това множество и симетричната група са решени някои комбинаторни задачи в съответното фактормножество.

1. Основни дефиниции и означения. Използувайки общоприетите методи за означение с S_n и Z_n ще означаваме съответно симетричната група и адитивната абелева група на остатъците по модул n. В работата конкретно ще разглеждаме симетричната група S_n на всички взаимно-еднозначни изображения на $Z_n = \{\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n}\}$ върху себе си. В случая и навсякъде по-нататък с $\overline{x}$ ще означаваме множеството $\{y \mid y \equiv x \ (mod\, n)\}$. Ако $\mu = \left[\begin{smallmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ i_1, & i_2, & \dots, & i_n \end{smallmatrix}\right]$ и $\nu = \left[\begin{smallmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_n \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_n \end{smallmatrix}\right]$ са елементи на S_n, то по дефиниция $\mu\nu = \left[\begin{smallmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_n \end{smallmatrix}\right]$. По-нататък вместо $\left[\begin{smallmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ i_1, & i_2, & \dots, & i_n \end{smallmatrix}\right]$ ще пишем $[i_1, i_2, ..., i_n]$.

Бинарна или (0,1)-матрица се нарича матрица,съставена единствено от нули и единици. Да означим с $\mathcal{B}_n$ множеството на всички квадратни бинарни матрици от n-ти ред. Както е добре известно (виж напр. [4]) съществува взаимно-еднозначно съответствие (изоморфизъм) между елементите на симетричната група S_n и групата на квадратните бинарни матрици от n-ти ред с точно една единица на всеки ред и всеки стълб. Нека $\sigma = [2, 3, 4, ..., n, 1] \in S_n$ и нека A, B са произволни елементи на $\mathcal{B}_n$. Ще казваме, че A и B са σ-еквивалентни, ако съществуват естествени числа k, l, такива, че $A = \sigma^k B \sigma^l$. Очевидно така дефинираната релация (без опасност от недоразумения можем да я означаваме със същата буква σ) е релация на еквивалентност. Разглеждаме фактормножеството $\mathcal{R}_n = \mathcal{B}_n/\sigma$.

Определение 1. *Елементите на* $\mathcal{R}_n = \mathcal{B}_n/\sigma$ *ще наричаме сплитки.*

Терминът сплитки е взаимсван от текстилната техника. Оказва се, че различните видове тъкачни структури математически могат да бъдат описани с помощта на елементите на $\mathcal{R}_n$ [1,2,3]. За да може да бъде на практика изтъкан плат, необходимо е в съответната бинарна матрица да съществува поне една нула и поне една единица на всеки ред и всеки стълб. По такъв начин естествено възникват редица комбинаторни и алгоритмични задачи, свързани с различните подмножества на $\mathcal{R}_n$, предизвикващи интерес както от теоретична, така и от практическа гледна точка.

2. Първични сплитки.

Определение 2. *Елементите на фактормножесвото* $Q_n = S_n/\sigma \subset \mathcal{R}_n$ *на симетричната група ще наричаме първични сплитки.*

Твърдение 1. *Ако* $C_\mu = \{\nu \in S_n \mid \nu = \sigma^k \mu \sigma^l$ *за някои цели числа* $k, l\}$, *то* n *дели* $|C_\mu|$ *и* $|C_\mu|$ *дели* n^2.

Доказателство. Директно следствие от теоремата на Лагранж.

Теорема 1. *Броят* $|Q_n|$ *на първичните сплитки при* n *просто число е равен на*

$$|Q_n| = \frac{(n-1)! + (n-1)^2}{n}.$$

Доказателство. Ако n е просто число, то от твърдение 1 следва, че за всяко $\mu \in S_n$ $|C_\mu|$ е равно на n^2 или на n, при това очевидно $|C_\mu| = n$, тогава и само тогава, когато μ е решение на едно от уравненията $\mu = \sigma\mu\sigma$, $\mu = \sigma\mu\sigma^2$, ..., $\mu = \sigma\mu\sigma^{n-1}$, които са $(n-1)$ на брой и имат различни решения. (Ако допуснем, че $\sigma\mu\sigma^k = \sigma\mu\sigma^l$, то веднага следва, че $k = l$.) Остава да докажем, че за всяко $k = 1, 2, ..., n-1$ уравнението $\mu = \sigma\mu\sigma^k$ има единствено решение при n – просто число и при фиксирано $\overline{x_1}$ (напр. $\overline{x_1} = \overline{1}$). Ако $\mu = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_n}]$, то

$$\begin{aligned}
\sigma\mu\sigma^k &= [\overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{n}, \overline{1}][\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}][\overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{n}, \overline{1}]^k \\
&= [\overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{n}, \overline{1}][\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}][\overline{1+k}, \overline{2+k}, ..., \overline{n-1+k}, \overline{n+k}] \\
&= [\overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{n}, \overline{1}][\overline{x_1+k}, \overline{x_2+k}, ..., \overline{x_n+k}] \\
&= [\overline{x_2+k}, \overline{x_3+k}, ..., \overline{x_n+k}, \overline{x_1+k}]
\end{aligned}$$

От $\mu = \sigma\mu\sigma^k$ получаваме системата:

$$\left\|\begin{array}{l}
\overline{x_1} = \overline{x_2+k} \\
\overline{x_2} = \overline{x_3+k} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\overline{x_{n-1}} = \overline{x_n+k} \\
\overline{x_n} = \overline{x_1+k} \\
\overline{x_i} \neq \overline{x_j} \quad \text{при} \quad i \neq j
\end{array}\right.$$

Давайки произволна стойност на $\overline{x_1}$ (напр. $\overline{x_1} = \overline{1}$), последователно еднозначно получаваме $\overline{x_n}, \overline{x_{n-1}}, ..., \overline{x_2}$.

Следователно в S_n съществуват $(n-1)$ класа на еквивалентност по модул σ съдържащи n елемента и $\dfrac{|S_n| - (n-1)n}{n^2}$ класа на еквивалентност по модул σ съдържащи n^2 елемента. Както е известно $|S_n| = n!$. Следователно

$$|Q_n| = (n-1) + \frac{n! - (n-1)n}{n^2} = \frac{(n-1)! + (n-1)^2}{n}.$$

Теоремата е доказана.

Прилагайки теорема 1 ще получим броя $|Q_n|$ на първичните сплитки при n просто число не по-голямо от 17.

$$|Q_3| = \frac{2! + 2^2}{3} = \frac{2+4}{3} = 2$$
$$|Q_5| = \frac{4! + 4^2}{5} = \frac{24+16}{5} = 8$$
$$|Q_7| = \frac{6! + 6^2}{7} = \frac{720+36}{7} = 108$$
$$|Q_{11}| = \frac{10! + 10^2}{11} = \frac{3628800+100}{11} = 329900$$
$$|Q_{13}| = \frac{12! + 12^2}{13} = \frac{479001600+144}{13} = 36846288$$
$$|Q_{17}| = \frac{16! + 16^2}{17} = \frac{20922789888000+256}{17} = 1230752346368$$

Забележка. Проблемът за пресмятане на броя на първичните сплитки $|Q_n|$ за произволно n е открит. За $n = 4$ $|Q_4| = 3$ и за $n = 6$ $|Q_6| = 24$ [2].

3. Самоогледални първични сплитки.

Определение 3. *Сплитката $U \in \mathcal{R}_n$ ще наричаме огледална на $V \in \mathcal{R}_n$ и ще означаваме с $U \tilde{\leftrightarrow} V$, ако за произволно $\mu \in U$ съществува $\nu \in V$ и естествено число k, такива че $\mu\sigma^k = \tau\nu$, където $\tau = [n, n-1, n-2, ..., 1], \sigma = [2, 3, 4, ..., n, 1] \in S_n$. Сплитки съвпадащи с огледалните си ще наричаме самоогледални.*

От определение 3 непосредствено следва, че ако $U \tilde{\leftrightarrow} V$, то съществуват бинарни матрици $A = (a_{ij})_n \in U$ и $B = (b_{ij})_n \in V$, такива че $a_{i1} = b_{in}, a_{i2} = b_{in-1}, ..., a_{in} = b_{i1}, i = 1, 2, ..., n$, т.е. B е „огледален" образ на A.

Теорема 2. *Ако $\mu \in S_n$ е представител на самоогледална първична сплитка, то n е четно, при това ако $\mu\sigma^k = \tau\mu$, то $k = \dfrac{n}{2}$*

Доказателство. Без ограничение на общността, можем да смятаме, че $0 < k < n$. Нека $x = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}] \in S_n$. Тогава

$$\mu\sigma^k = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}][\overline{1+k}, \overline{2+k}, ..., \overline{n+k}] = [\overline{x_1+k}, \overline{x_2+k}, ..., \overline{x_n+k}]$$

$$\tau\mu = [\overline{n}, \overline{n-1}, \overline{n-2}, ..., \overline{1}][\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_n}] = [\overline{x_n}, \overline{x_{n-1}}, \overline{x_{n-2}}, ..., \overline{x_1}]$$

Следователно получаваме системата:

$$\left\|\begin{array}{l} \overline{x_1+k} = \overline{x_n} \\ \overline{x_2+k} = \overline{x_{n-1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{x_n+k} = \overline{x_1} \\ \overline{x_i} \neq \overline{x_j} \end{array}\right. ,$$

откъдето не е трудно да се получи равенството $\overline{k+k} = \overline{0}$, т.е. $2k \equiv 0 \ (mod\ n)$ и тъй като $0 < k < n$, то $k = \dfrac{n}{2}$. Теоремата е доказана.

Конструктивното доказателство на следващата теорема описва и алгоритъм за получаване на представители от всички самоогледални първични сплитки от $Q_n = S_n/\sigma$.

Теорема 3. *Ако $n = 2k$, то броя на самоогледалните първични сплитки от $Q_n = S_n/\sigma$ е равен на $(k-1)!2^{k-2}$*

Доказателство. Нека $\mu = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}]$ е представител на самоогледална първична сплитка. От доказателството на теорема 2 се вижда, че за да намерим по един представител на всички самоогледални първични сплитки от Q_{2k} е необходимо и достатъчно да намерим всички решения на системата от $2k$ уравнения с $2k$ неизвестни

$$\left\| \begin{array}{l} \overline{x_1 + k} = \overline{x_{2k}} \\ \overline{x_2 + k} = \overline{x_{2k-1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{x_k + k} = \overline{x_{k+1}} \\ \overline{x_{k+1} + k} = \overline{x_k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{x_{2k-1} + k} = \overline{x_2} \\ \overline{x_{2k} + k} = \overline{x_1} \\ \overline{x_i} \neq \overline{x_j} \end{array} \right. .$$

Тъй като $2k \equiv 0(mod\ 2k)$, то уравнението $\overline{x_t + k} = \overline{x_{2k-t+1}}$ е равносилно на уравнението $\overline{\overline{x_t + k} + k} = \overline{x_{2k-t+1} + k}$, което е равносилно на $\overline{x_{2k-t+1} + k} = \overline{x_t}$, $t = 1, 2, ..., k$. Следователно разглежданата система се свежда до системата от k уравнения с $2k$ неизвестни

$$\left\| \begin{array}{l} \overline{x_1 + k} = \overline{x_{2k}} \\ \overline{x_2 + k} = \overline{x_{2k-1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{x_k + k} = \overline{x_{k+1}} \\ \overline{x_i} \neq \overline{x_j} \end{array} \right.$$

Лесно се вижда, че получената система се състои от k линейно независими уравнения, т.е. тя може да се реши като дадем на $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}$ различни стойности измежду $\{\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n}\}$ последователно ще получим $\overline{x_{2k}}, \overline{x_{2k-1}}, ..., \overline{x_{k+1}}$. Освен това трябва да имаме в предвид и условието $\overline{x_i} \neq \overline{x_j}$ при $i \neq j$. Без ограничение на общността можем да приемем, че $\overline{x_1} = \overline{1}$.

От всичко казано по-горе следва, че получаването на по един представител от всички самоогледални първични сплитки от Q_{2k} могат да се получат с помощта на описания по-долу алгоритъм.

Алгоритъм.

1. За всяка пермутация $(\overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_k})$ на числата $\{\overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{k}\}$ получаваме $\mu = [\overline{1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_k}, \overline{x_k + k}, \overline{x_{k-1} + k}, ..., \overline{1 + k}]$.

2. За всяко $i = 1, 2, ..., (k-1)$ правим цикъл

3. Получаваме всевъзможните комбинации от i елемента измежду елементите на множеството $\{\overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_k}\}$ и за всяка от тях в $\mu = [\overline{1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_k}, \overline{x_k + k}, \overline{x_{k-1} + k}, ..., \overline{1 + k}]$ съответният елемент $\overline{x_j}$ замесваме с $\overline{x_j + k}$.

4. Край на цикъла.

5. От всяка сплитка оставяме по един представител.

6. Край на алгоритъма.

Остава да прецизираме пункт 5 от описания по-горе алгоритъм. Нека

$$\mu = [\overline{1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_k}, \overline{x_k + k}, \overline{x_{k-1} + k}, ..., \overline{1 + k}]$$

е представител на самоогледалната първична сплитка U. Ако s е такова, че $x_k + k + s \equiv 1 \ (mod\ 2k)$, то очевидно и

$$\nu = [\overline{x_k + k + s}, \overline{x_{k-1} + k + s}, \overline{x_{k-2} + k + s}, ..., \overline{1 + k + s}, \overline{1 + s}, \overline{x_2 + s}, ..., \overline{x_k + s}]$$

също е представител на U и при това x и y са единствените представители на U, получени с помощта на алгоритъм 1.

Следователно за броя Θ_{2k} на всички самоогледални първични сплитки от Q_{2k} получаваме:

$$\begin{aligned}\Theta_{2k} &= \frac{1}{2}\left\{(k-1)!\left[1 + \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[(k-1)!2^{k-1}\right] = (k-1)!2^{k-2}.\end{aligned}$$

Теорема 3 е доказана.

Използувайки алгоритъм 1 сме получили по един представител на всички самоогледални първични сплитки при $n = 4, 6$ и 8, които са огледални сами на себе си. А именно това са:

При $n = 4$, $\Theta_4 = 1! \cdot 2^0 = 1$

$[1, 2, 4, 3]$

При $n = 6$, $\Theta_6 = 2! \cdot 2^1 = 4$

$[1, 2, 3, 6, 5, 4], [1, 5, 3, 6, 2, 4], [1, 2, 6, 3, 5, 4], [1, 5, 6, 3, 2, 4]$

При $n = 8$, $\Theta_8 = 3! \cdot 2^2 = 24$

$[1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5], [1, 2, 3, 8, 4, 7, 6, 5], [1, 2, 7, 4, 8, 3, 6, 5], [1, 6, 3, 4, 8, 7, 2, 5],$
$[1, 2, 7, 8, 4, 3, 6, 5], [1, 6, 3, 8, 7, 7, 2, 5], [1, 6, 7, 4, 8, 3, 2, 5], [1, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 5],$
$[1, 2, 4, 3, 7, 8, 6, 5], [1, 2, 4, 7, 3, 8, 6, 5], [1, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5], [1, 6, 4, 7, 3, 8, 2, 5],$
$[1, 3, 2, 4, 8, 6, 7, 5], [1, 3, 2, 8, 4, 6, 7, 5], [1, 3, 6, 4, 8, 2, 7, 5], [1, 7, 2, 4, 8, 6, 3, 5],$
$[1, 3, 6, 8, 4, 2, 7, 5], [1, 7, 2, 8, 4, 6, 3, 5], [1, 7, 6, 4, 8, 2, 3, 5], [1, 7, 6, 8, 4, 2, 3, 5],$
$[1, 4, 2, 3, 7, 6, 8, 5], [1, 4, 2, 7, 3, 6, 8, 5], [1, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 5], [1, 4, 6, 7, 3, 2, 8, 5]$

$\Theta_{10} = 4! \cdot 2^3 = 192$

$\Theta_{12} = 5! \cdot 2^4 = 1920$

$\Theta_{14} = 6! \cdot 2^5 = 23040$

$\Theta_{16} = 7! \cdot 2^6 = 322560$

$\Theta_{18} = 8! \cdot 2^7 = 5160960$

$\Theta_{20} = 9! \cdot 2^8 = 92897280$

$\Theta_{22} = 10! \cdot 2^9 = 1857945600$

$\Theta_{24} = 11! \cdot 2^{10} = 40874803200$

ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Я. Йорджев, И. В. Статулов. Математическо моделиране и изследване структурното многообразие на тъкачни сплитки (в печат).
[2] И. В. Статулов. Множествена оценка на тъкачната сплитка. *Текстилна промишленост*, бр. 3 (1973).
[3] И. В. Статулов. Възможности за структуриране на единични тъкачни сплитки по метода на пермутирането. *Текстилна промишленост*, бр. 8-9 (1975).
[4] В. Е. Тараканов. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. Москва, Наука, 1985.

Красимир Янков Йорджев
Тракийски университет
Технически колеж
„Граф Игнатиев“ 38
8602 Ямбол

ON A FACTOR SET OF THE SYMMETRIC GROUP

Krassimir Yankov Iordjev

An equivalence relation in the set of the square binary matrices with exactly one identity in each row and each column is considered. Using isomorphism between this set and symmetric group some combinatorial problems in corresponding factor set are solved.