МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

АЛГОРИТЪМ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЛИНЕЙНА РАНИЧНА ЗАДАЧА НА ИЗПЪКНАЛОТО ОПТИМИРАНЕ

Стоян Костадинов Стоянов

В предлаганата работа се представя алгоритъм за решаване на линейни ранични задачи при ограничение, зададено с изпъкнала квадратична функция и долни и горни граници за променливите. Алгоритъмът решава задачата, ползвайки специфичните ѝ особености, като се опира на добре познатите в изпъкналото оптимиране съответни условия на Кун–Такър.

1. Увод. В статията се описва алгоритъм за решаване на линейни ранични задачи с долни и горни граници за променливите при единствено ограничение от тип неравенство, което е зададено с изпъкнала сепарабелна квадратична функция. Интересът към проблема бе породен от факта, че при решаване на целочислената задача от този клас в опит да се приложи идейната схема на един нов алгоритъм [1] за задачи на дискретната оптимизация, се достига до решаване на съответната непрекъсната задача, която е предмет на тази работа. При класически "branch and bound" метод също на всяка итерация се изисква решаване точно на такава задача. Подобни оптимизационни задачи намират приложения в различни области – разпределение на ресурси, приоритетно планиране на производства, бюджетно планиране, производствени модели и т.н. (за някои приложения виж напр. [2]). Има сериозни резултати за задачи на квадратичното оптимиране при линейно ограничение ([3], [4], [5], [6]). На автора обаче не са известни публикации (вероятно такива съществуват), които разглеждат задачата при квадратично ограничение и линейна целева функция, както е в предлаганата статия.

2. Изложение. Разглежданата задача може да бъде записана като

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1}$$

при ограничения

$$\frac{1}{2} x^t D x + a^t x \le b \tag{2}$$

$$l_i \le x_i \le u_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

където $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, D е диагонална $n \times n$ матрица с елементи от главния диагонал $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, a е n-мерен вектор с $a_i > 0$ за $i = 1, \ldots, n$, b е реална константа, $\frac{1}{2}x^tDx + a^tx \leq b$ е раничното ограничение, l_i и u_i са реални константи, удовлетворяващи $0 \leq l_i \leq u_i$ за $i = 1, \ldots, n$. Без ограничение на общността предполагаме, че $c_i < 0$ за $i = 1, \ldots, n$, защото в противен случай в оптимално решение компонентата x_i е равна на l_i. Предположенията за D определят изпъкнала и сепарабелна квадратична функция в ограничението.

При повечето методи за решаване на задачи на изпъкналото оптимиране се разглеждат и използват условията на Кун-Такър. В предлагания алгоритъм се реализира аналогичен подход, като се използва спецификата на задача (1)–(3). Условията на Кун-Такър могат да се запишат по следния начин:

$$c_i + w_i - v_i + \lambda d_i x_i + \lambda a_i = 0 \quad \text{за } i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$$w_i(x_i - u_i) = 0 \quad \text{за } i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

$$v_i(l_i - x_i) = 0 \quad \text{за } i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

$$w_i \geq 0,\ v_i \geq 0 \quad \text{за } i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

$$\left(\frac{1}{2}x^tDx + a^tx - b\right)\lambda = 0 \tag{8}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{9}$$

заедно с (2) и (3). В този запис λ, w_i и v_i са множители на Лагранж съответно за ограниченията $\frac{1}{2}x^tDx + a^tx \leq b$, $x_i \leq u_i$ и $l_i \leq x_i$. Нека първо потърсим решение на системата (2)–(9) при $\lambda = 0$. Тогава (8) и (9) са удовлетворени, а (4) се модифицира до

$$c_i + w_i - v_i = 0 \quad \text{за } i = 1, \ldots, n \tag{4'}$$

Изчисляването на неизвестните x_i, w_i и v_i $(i = 1, \ldots, n)$ става от системата (3), (4′), (5), (6), (7) и ако това решение удовлетворява ограничение (2), то ние разполагаме с решение на задачата (1)–(3). От (5)–(7) за двойката (w_i, v_i) имаме следните три възможности:

а) $(w_i, v_i) = (0, 0)$, което обаче е невъзможно, защото (4′) изисква $c_i = 0$, а разглеждаме задачата само при $c_i < 0$ за всяко i.

б) $w_i = 0$ и $v_i > 0$, което също е невъзможно, защото (4′) изисква $v_i = c_i$, но $c_i < 0$, което е противоречие с условието за строга положителност на v_i.

в) $w_i > 0$ и $v_i = 0$. Тогава от (4′) имаме $w_i = -c_i$ за всяко $i = 1, \ldots, n$, а от (5) получаваме $x_i = u_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Следователно при $\lambda = 0$ и направените предположения за задачата (1)–(3), решението на системата (3), (4′), (5), (6), (7) относно $x = (x_1, \ldots, x_n)$ е $x_i = u_i$, $i = 1, \ldots, n$

и ако $(u_1, \dots, u_n)$ удовлетворява и (2), то имаме решение на (1)–(3). В противен случай в (3)–(9) имаме $\lambda > 0$ и условията на Кун-Такър се свеждат до търсене на решение на (3)–(7) плюс

$$\frac{1}{2}x^t Dx + a^t x = b. \tag{10}$$

Теорема. *За $\lambda \in (0, +\infty)$ решението на системата от условия на Кун-Такър $(3)-(7)$ като функция на λ е*

$$x_i(\lambda) = \max\left\{\min\left[\left(-\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\cdot\frac{1}{\lambda}\right), u_i\right], l_i\right\} \tag{11}$$

$$w_i(\lambda) = \max\{0, -(d_i u_i + a_i)\lambda - c_i\} \tag{12}$$

$$v_i(\lambda) = \max\{0, (d_i l_i + a_i)\lambda + c_i\} \tag{13}$$

Доказателство. От (5)–(7) при фиксирано i, $1 \le i \le n$, за двойката w_i и v_i са възможни следните случаи:

1. $w_i > 0$ и $v_i = 0$. Тогава от (5) следва $x_i = u_i$ и от (4) w_i може да се запише като функция на λ. Получаваме $w_i(\lambda) = -(d_i u_i + a_i)\lambda - c_i$ (линейна функция на λ) и понеже $w_i > 0$ необходимо е $-(d_i u_i + a_i)\lambda - c_i > 0$, откъдето $\lambda < -\dfrac{c_i}{(d_i u_i + a_i)}$ т.е. $w_i(\lambda) = -(d_i u_i + a_i)\lambda - c_i$ за $\lambda < -\dfrac{c_i}{(d_i u_i + a_i)}$.

2. $w_i = 0$, $v_i > 0$. Тогава от (5) следва $x_i = l_i$ и от (4) v_i може да се запише като функция на λ. Получаваме $v_i(\lambda) = (d_i l_i + a_i)\lambda + c_i$ (линейна функция на λ) и понеже $v_i > 0$ необходимо е $(d_i l_i + a_i)\lambda > -c_i$, откъдето $\lambda > -\dfrac{c_i}{(d_i l_i + a_i)}$ т.е. $v_i(\lambda) = (d_i l_i + a_i)\lambda + c_i$ за $\lambda > -\dfrac{c_i}{(d_i l_i + a_i)}$.

3. $w_i = v_i = 0$. Тогава от (4) x_i може да се запише като функция на λ. Получаваме $x_i(\lambda) = \dfrac{-a_i\lambda - c_i}{d_i\lambda} = -\dfrac{a_i}{d_i} - \dfrac{c_i}{d_i}\cdot\dfrac{1}{\lambda}$, но трябва да удовлетворим и (3).

   От предположенията за d_i, a_i, c_i следва $0 < -\dfrac{c_i}{d_i u_i + a_i} \le -\dfrac{c_i}{d_i l_i + a_i}$. При това

$$x_i\left(-\frac{c_i}{d_i l_i + a_i}\right) = -\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\cdot\frac{1}{\left(-\dfrac{c_i}{d_i l_i + a_i}\right)} = l_i \tag{14}$$

$$x_i\left(-\frac{c_i}{d_i u_i + a_i}\right) = -\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\cdot\frac{1}{\left(-\dfrac{c_i}{d_i u_i + a_i}\right)} = u_i \tag{15}$$

   Изследвайки първата производна на $x_i(\lambda)$ получаваме $x_i'(\lambda) = \left(-\dfrac{a_i}{d_i} - \dfrac{c_i}{d_i}\cdot\dfrac{1}{\lambda}\right)' =$

$-\frac{c_i}{d_i} \cdot \frac{(-1)}{\lambda^2} = \frac{c_i}{d_i} \cdot \frac{1}{\lambda^2} < 0$, т.е. $x_i(\lambda)$ е строго монотонна намаляваща за $\lambda \in (0, +\infty)$, в частност за $\lambda \in \left[-\frac{c_i}{d_i u_i + a_i}, -\frac{c_i}{d_i l_i + a_i}\right]$.

Следователно при $w_i = v_i = 0$ дефинираме $x_i(\lambda) = \frac{-a_i\lambda - c_i}{d_i\lambda} = -\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i} \cdot \frac{1}{\lambda}$ само за $\lambda \in \left[-\frac{c_i}{d_i u_i + a_i}, -\frac{c_i}{d_i l_i + a_i}\right]$, понеже така се удовлетворява (от (14), (15) и $x_i(\lambda)$ – строго монотонна) и условие (3).

Обобщавайки резултатите от 1, 2 и 3 за $\lambda \in (0, +\infty)$ за всяко $i = 1, \ldots, n$ имаме решение:

- при $\lambda \in \left(0, -\frac{c_i}{(d_i u_i + a_i)}\right]$: $\quad \begin{array}{|l} x_i(\lambda) = u_i \\ w_i(\lambda) = -(d_i u_i + a_i)\,\lambda - c_i \\ v_i(\lambda) = 0 \end{array}$

- при $\lambda \in \left[-\frac{c_i}{(d_i u_i + a_i)}, -\frac{c_i}{(d_i l_i + a_i)}\right]$: $\quad \begin{array}{|l} x_i(\lambda) = -\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\frac{1}{\lambda} \\ w_i(\lambda) = 0 \\ v_i(\lambda) = 0 \end{array}$

- при $\lambda, \in \left(-\frac{c_i}{(d_i l_i + a_i)}, +\infty\right)$: $\quad \begin{array}{|l} x_i(\lambda) = l_i \\ w_i(\lambda) = 0 \\ v_i(\lambda) = -(d_i l_i + a_i)\,\lambda - c_i \end{array}$

Тогава за $\lambda \in (0, +\infty)$

$$w_i(\lambda) = \max\left\{-(d_i u_i + a_i)\,\lambda - c_i\,,\ 0\right\}$$

$$v_i(\lambda) = \max\left\{-(d_i l_i + a_i)\,\lambda - c_i\,,\ 0\right\}$$

(16) $$x_i(\lambda) = \begin{cases} u_i, & 0 < \lambda \le -\frac{c_i}{(d_i u_i + a_i)} \\ -\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\frac{1}{\lambda}, & -\frac{c_i}{(d_i u_i + a_i)} < \lambda \le -\frac{c_i}{(d_i l_i + a_i)} \\ l_i, & \lambda > -\frac{c_i}{(d_i l_i + a_i)} \end{cases}$$

Този запис за $x_i(\lambda)$ е коректен заради непрекъснатостта на функцията в точките $\left(-\frac{c_i}{(d_i u_i + a_i)}\right)$ и $\left(-\frac{c_i}{(d_i l_i + a_i)}\right)$, като в тези точки тя не е диференцируема (ъглови точки). От (14), (15) и $x_i(\lambda)$ – строго монотонно намаляваща следва, че за (16) е възможен и запис $x_i(\lambda) = \max\left\{\min\left[\left(-\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\frac{1}{\lambda}\right), u_i\right], l_i\right\}$ за $\lambda \in (0, +\infty)$, с което теоремата е доказана. $\square$

Решението (11)–(13) удовлетворяват всички условия на Кун-Такър с изключение на (10). Следователно решаването на задачата при $\lambda > 0$ изисква определянето на стойност за тази променлива, така че замествайки с $x_i(\lambda)$ в условие (10), то да бъде удовлетворено (ако разбира се решение на задачата съществува). Нека дефинираме

$$g(\lambda) = \frac{1}{2}x^t(\lambda)Dx(\lambda) + a^t x(\lambda).$$

Търсим строго положителна стойност за λ (нека я означим с λ^*), за която $g(\lambda^*) = b$. Тогава $x_i(\lambda^*)$, $i = 1, \dots, n$ е търсеното решение на задача (1)–(3).

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{1}{2}x^t(\lambda)Dx(\lambda) + a^t x(\lambda) = \\ &\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2}d_i \left(\max\left\{ \min\left[-\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\frac{1}{\lambda}, u_i \right], l_i \right\} \right)^2 + a_i \left(\max\left\{ \min\left[-\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\frac{1}{\lambda}, u_i \right], l_i \right\} \right) \right\} \end{aligned} \tag{17}$$

Вече отбелязахме, че от представянето (16) за $x_i(\lambda)$ следва, че това е непрекъсната нерастяща функция на λ. Нека дефинираме за $i = 1, \dots, n$ $\varphi_i(\lambda) = \frac{1}{2}d_i x_i^2(\lambda) + a_i x_i(\lambda)$. Тогава $g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\lambda)$. Понеже $\frac{1}{2}d_i x_i^2 + a_i x_i$ е непрекъсната функция на x_i, а от своя страна всяко x_i като функция на λ ($x_i(\lambda)$) също е непрекъсната за $\lambda \in (0, +\infty)$, то $\varphi_i(\lambda)$ е непрекъсната в разглеждания интервал. Нещо повече – $\varphi_i(\lambda)$ е нерастяща монотонна за $\lambda \in (0, +\infty)$. Наистина за $0 < \lambda \le -\frac{c_i}{d_i u_i + a_i}$ имаме $\varphi_i(\lambda) = \varphi(u_i)$, а за $\lambda > -\frac{c_i}{d_i l_i + a_i}$ получаваме $\varphi_i(\lambda) = \varphi_i(l_i)$, при това $\varphi_i(u_i) \ge \varphi_i(l_i)$.

Разглеждаме $\varphi_i(\lambda)$ за $-\frac{c_i}{d_i u_i + a_i} \le \lambda \le -\frac{c_i}{d_i l_i + a_i}$:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda) &= \frac{1}{2}d_i \left(-\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\frac{1}{\lambda} \right)^2 + a_i \left(-\frac{a_i}{d_i} - \frac{c_i}{d_i}\frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \frac{-\frac{1}{2}a_i^2 d_i \lambda^2 + \frac{1}{2}c_i^2 d_i}{d_i^2 \lambda^2} = -\frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{a_i^2}{d_i}\lambda^2 - \frac{c_i^2}{d_i} \right) \end{aligned}$$

Функцията е дефинирана, непрекъсната и диференцируема за $\lambda \in (0, +\infty)$ и

$$\varphi'(\lambda) = \frac{-a_i^2 d_i \lambda d_i^2 \lambda^2 - \left(-\frac{1}{2}a_i^2 d_i \lambda^2 + \frac{1}{2}c_i^2 d_i \right) 2d_i^2 \lambda}{d_i^4 \lambda^4},$$

откъдето $\varphi'(\lambda) = -\frac{c_i^2 d_i^3 \lambda}{d_i^4 \lambda^4}$. Получихме $\varphi'(\lambda) < 0$ при $\lambda > 0$, в частност за $-\frac{c_i}{d_i u_i + a_i} \le \lambda \le -\frac{c_i}{d_i l_i + a_i}$, където $\varphi_i(\lambda)$ е строго монотонно намаляваща. И така: за всяко $\lambda \in (0, +\infty)$ $\varphi_i(\lambda)$ е непрекъсната монотонно нерастяща функция на λ, диференцируема навсякъде с изключение на ъгловите точки $-\frac{c_i}{d_i u_i + a_i}$ и $-\frac{c_i}{d_i l_i + a_i}$ (точки на недиференцируемост), понеже те са такива и за $x_i(\lambda)$ (виж (16)). От тук непосредствено следва, че $g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\lambda)$ за $\lambda \in (0, +\infty)$ е също непрекъсната, монотонно нерастяща функция на λ с $2n$ точки на недиференцируемост в $-\frac{c_i}{d_i u_i + a_i}$ и $-\frac{c_i}{d_i l_i + a_i}$, $i = 1, \dots, n$. Нека означим тези точки на недиференцируемост с $y_i, \dots, y_{2n}$, при което те са подредени така, че $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{2n}$. Изхождайки от факта, че $g(\lambda)$ е непрекъсната монотонно нерастяща, λ^* може да бъде определена чрез следната обикновена процедура за търсене при условие, че съществува решение на задачата. Стъпки от 0 до 3 определят две съседни точки на недиференцируемост измежду $y_1, \ldots, y_{2n}$ означени с y_L и y_R, такива че λ^* се намира между тях. Стъпка 4 определя стойността на λ^*.

Алгоритъм за $\boldsymbol{\lambda^*}$

Стъпка 0. Полагаме $y_L = y_1$, $y_R = y_{2n}$.

Стъпка 1. Ако y_L и y_R са съседни точки, отива се на Стъпка 4.

Стъпка 2. Нека y_M е средната точка на недиференжируемост, съдържаща се в интервала $[y_L, y_R]$.

Стъпка 3. Ако $g(y_M) = b$, тогава $\lambda^* = y_M$ и отиваме на Стъпка 5.

Ако $g(y_M) > b$ тогава полагаме $y_L = y_M$ и отиваме на Стъпка 1.

Ако $g(y_M) < b$ тогава полагаме $y_R = y_M$ и отиваме на Стъпка 1.

Стъпка 4. Ако $g(y_L) = b$, то $\lambda^* = y_L$. Отиваме на Стъпка 5.

Ако $g(y_R) = b$, то $\lambda^* = y_R$. Отиваме на Стъпка 5.

Изчисляваме λ^* чрез $\lambda^* = \sqrt{\dfrac{[g(y_L) - g(y_R)]y_R^2 y_L^2}{[g(y_L) - b]y_L^2 - [g(y_R) - b]y_R^2}}$. Отиваме на Стъпка 5.

Стъпка 5. Край.

Формулата от Стъпка 4 , по която се изчислява λ^*, има следния извод. При $\lambda \in [y_L, y_R]$ и съседни y_L, y_R е възможно еднозначно дефиниране на $I_1 = \{i | x_i(\lambda) = u_i, 1 \leq i \leq n\}$, $I_2 = \left\{ i | x_i(\lambda) = -\dfrac{a_i}{d_i} - \dfrac{c_i}{d_i}\dfrac{1}{\lambda}, 1 \leq i \leq n \right\}$, $I_3 = \{i | x_i(\lambda) = l_i, 1 \leq i \leq n\}$ при което

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\lambda) = \sum_{i \in I_1} \varphi_i(\lambda) + \sum_{i \in I_2} \varphi_i(\lambda) + \sum_{i \in I_3} \varphi_i(\lambda) = const + \sum_{i \in I_2} \varphi_i(\lambda),$$

т.е

$$g(\lambda) = const + \sum_{i \in I_2} \left[-\frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{a_i^2}{d_i} \lambda^2 - \frac{c_i^2}{d_i} \right) \right] = const - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\sum_{i \in I_2} \left(\frac{a_i^2}{d_i} \right) \lambda^2 - \left(\frac{c_i^2}{d_i} \right) \right).$$

Следователно $g(\lambda) = -\dfrac{1}{2\lambda^2}(A\lambda^2 - B) + C$, където A, B, C са константи със стойности

$$\begin{aligned} &A = \sum_{i \in I_2} \frac{a_i^2}{d_i}, \quad B = \sum_{i \in I_2} \frac{c_i^2}{d_i}, \\ &C = const = \sum_{i \in I_1} \varphi_i(\lambda) + \sum_{i \in I_3} \varphi_i(\lambda) = \sum_{i \in I_1} \left(\frac{1}{2} d_i u_i^2 + a_i u_i \right) + \sum_{i \in I_3} \left(\frac{1}{2} d_i l_i^2 + a_i l_i \right) \end{aligned} \tag{18}$$

Показахме, че за всеки две съседни точки на недиференцируемост y_L, y_R измежду $y_1, \ldots, y_{2n}$ при $\lambda \in [y_L, y_R]$ $g(\lambda)$ има вид

$$g(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda^2}(A\lambda^2 - B) + C, \tag{19}$$

където A, B, C са константи, при което за нашите разглеждания няма да е необходимо изчисляването им по (18). Търсим $\lambda^* \in [y_L, y_R]$ – положителен корен на уравнението $g(\lambda) = b$, т.е. $-\frac{1}{2\lambda^2}(A\lambda^2 - B) + C = b$, откъдето намираме $\lambda^2 = \frac{B}{A - 2(C-b)}$, $\lambda = \pm\sqrt{\frac{B}{A-2(C-b)}}$ и следователно $\lambda^* = \sqrt{\frac{B}{A-2(C-b)}} = \sqrt{\frac{B}{(A-2C)+2b}}$.

По (17) се изчислява $g(\lambda)$ в точките y_L и y_R. От $g(\lambda)$ – непрекъсната за $\lambda > 0$, в частност за y_L и y_R и от вида (19) на $g(\lambda)$ за $\lambda \in [y_L, y_R]$, в сила са също така

$$\left| \begin{array}{l} g(y_L) = -\dfrac{1}{2y_L^2}(Ay_L^2 - B) + C \\ g(y_R) = -\dfrac{1}{2y_R^2}(Ay_R^2 - B) + C \end{array} \right. , \text{ откъдето } \left| \begin{array}{l} [(A-2C) + 2g(y_L)]y_L^2 = B \\ [(A-2C) + 2g(y_R)]y_R^2 = B \end{array} \right. .$$

Решението е

$$A - 2C = \frac{2[g(y_L)y_L^2 - g(y_R)y_R^2]}{y_R^2 - y_L^2}, \quad B = \frac{2[g(y_L) - g(y_R)]y_R^2 y_L^2}{y_R^2 - y_L^2}.$$

Следователно

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{B}{(A-2C)+2b}} = \sqrt{\frac{\dfrac{2[g(y_L) - g(y_R)]y_R^2 y_L^2}{y_R^2 - y_L^2}}{\dfrac{2[g(y_L)y_L^2 - g(y_R)y_R^2]}{y_R^2 - y_L^2} + 2b}},$$

т.е. $\lambda^* = \sqrt{\frac{[g(y_L) - g(y_R)]y_R^2 y_L^2}{[g(y_L) - b]y_L^2 - [g(y_R) - b]y_R^2}}$ – израз за λ^* от Стъпка 4 на алгоритъма.

3. Заключение. Представихме алгоритъм за решаване на линейна ранична задача при квадратично ограничение и долни и горни граници за променливите. Интерес за автора и предмет на бъдеща работа представлява включването на описания тук алгоритъм за решаване на непрекъснатата (1)–(3) задача в схема за решаване на целочислената (1)–(3) задача чрез алгоритъм, описан в [1], и класически "branch and bound" метод. Възможно е реализиране на подобрения и оптимизиране на схемата за определяне на в тези случаи. Съществен е въпроса за компютърно тестване върху класове задачи с цел оценяване работата на двата алгоритъма, което ще покаже в частност ефективността и на цитирания в тази статия метод. Не по-малък интерес ще представлява и въпроса за реализиране на сравнителен анализ между тях.

REFERENCES

[1] V. Chvatal. Resolution Search. *Discrete Applied Mathematics*, **73**, (1997), 81-99.
[2] T. Ibaraki, N. Katoh. Resource Allocation Problems, Cambridge, MA, The MIT Press, (1988).

[3] K. Bretthauer, B. Shetty, S. Syam. A Branch and Bound Algorithm for Integer Quadratic Knapsack Problems. *ORSA Journal on Computing*, **7**, *1* (Winter 1995), 109-116.
[4] P. Michelon, N. Maculan. Lagrangean Decomposition for Integer Nonlinear Programming With Linear Constraints. *Mathematical Programming*, **52** (1991), 303-313.
[5] P. Pardalos, Y. Ye, C. Han. Algorithms for the Solution of Quadratic Knapsack Problems. *Linear Algebra and its Applications*, **152** (1991), 69-91.
[6] P. Pardalos, N. Kovoor. An Algorithm for a Singly Constrained Class of Quadratic Programs Subject to Upper and Lower Bounds. *Mathematical Programming*, **46** (1990), 321-328.

Стоян Костадинов Стоянов
ФМИИ, Шуменски университет „Еп. К. Преславски“
гр. Шумен
e-mail: s.stoyanov@fmi.uni-shoumen.acad.bg

AN ALGORITHM FOR LINEAR KNAPSACK PROBLEMS OF CONVEX OPTIMIZATION

Stoyan Kostadinov Stoyanov

In this paper we present an algorithm for the solution of linear knapsack problems subject to a less than or equal separable convex quadratic singly knapsack constraint with lower and upper bounds on the variables. The algorithm solves the problem via manipulations of it's specific features and the Kuhn-Tucker conditions.