*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999*
*MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999*
*Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of*
*the Union of Bulgarian Mathematicians*
*Montana, April 5–8, 1999*

# ИДЕЯ ЗА ГЕНЕРИРАНЕ НА УРАВНЕНИЯ, ПРИ РЕШАВАНЕТО НА КОИТО СЕ ИЗПОЛЗУВАТ СВОЙСТВА НА ФУНКЦИИТЕ

**В. Балиганд, Д. Раковска, Ю. Нинова**

В статията е показано как изхождайки от уравнения, които се решават с използване на свойствата на функциите, участвуващи в уравнението, могат чрез обобщение и конкретизация да се генерират такива задачи.

Обобщението се базира на свойствата на функциите, а новите задачи се създават чрез конкретизиране с функции, имащи посочените в модела свойства.

В съобщението ще се базираме на следното описание на понятието уравнение: „Уравнение се нарича аналитичния запис на задачата за търсене на стойностите на аргумента за които две функции имат равни стойности“[2].

Този символичен запис има вида:

(1) $$f(x) = g(x).$$

Ако $f$ и $g$ са две функции, чиито свойства се изучават в училищния курс по математика, то можем да ги използваме при решаване на уравнения съгласно горното описание.

В изложението са използувани познавателните методи обобщение и конкретизация. Обобщението се извършва на основата на решението на една конкретна задача, разглеждана като представителен пример, а генерирането на нови уравнения става чрез конкретизиране на функциите $f$ и $g$ с функции, които имат свойствата или вида на тези от модела и са познати на учениците.

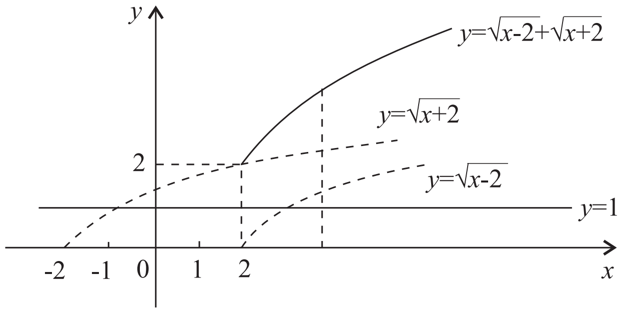
Тези общи идеи ще илюстрираме, започвайки със следната конкретна задача.

**Задача.** *Да се реши уравнението:*

(2) $$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = 1.$$

**Решение.** Уравнението (2) е дефинирано при $x \geq 2$. Нека $f$ и $g$ са функциите, зададени аналитично с условията $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$ и $g(x) = 1$. Тъй като за всяко $x \geq 2$ $\sqrt{x-2} \geq 0$, а $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{4} = 2$, то $f(x) \geq 2$, а $g(x) = 1$ за всяко $x \geq 2$. Тогава получаваме, че $f(x) \geq 2 > 1$, т.е. $f(x) > g(x)$, а от тук следва, че разглежданото уравнение няма реални корени.

Тези разсъждения нагледно-образно могат да се представят на следния чертеж:




При решаването на тази задача явно или неявно се използват или споменават следните свойства:

1) Сборът на две функции $f$ и $g$ с дефиниционни области $D_f$ и $D_g$ е функция с дефиниционна област $D_f \cap D_g$.

2) Сумата на две растящи (намаляващи) функции в даден интервал е растяща (намаляваща) функция в този интервал.

3) Всяка монотонна функция в даден интервал приема точно един път всяка стойност от множеството на образите.

4) Образът на интервал при монотонна функция върху този интервал е интервал.

5) Релацията „$\leq$“ е транзитивна релация.

В разгледания пример функцията $f$ е сума на две функции $f_1$ и $f_2$ от вида $f_i : x \to \sqrt{ax+b}$. Те са дефинирани съответно в $D_{f_1} = [2,\infty)$ и $d_{f_2} = [-2,\infty)$, а $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [2,\infty)$. Най-малката ѝ стойност $g$ е 2. Функцията $g$ е константа и се задава по следния начин : $g : x \to 1$.

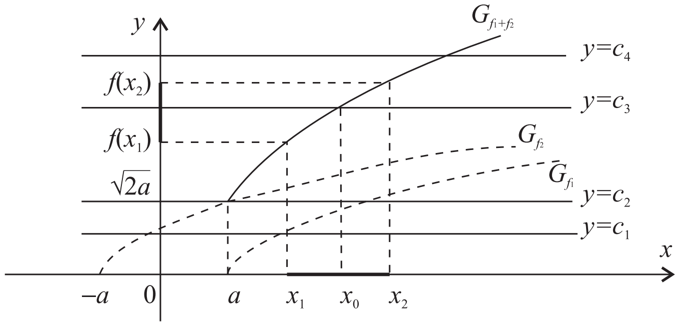
Тогава обобщението може да се направи по следния начин.

Уравнението (2) може да се разглежда като представител на следния тип уравнения:

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} = c, \tag{3}$$

където $c = \text{const}$, $a \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

Тогава можем да разглеждаме функцията $f : x \to \sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}$ като сума от две функции $f_1 : x \to \sqrt{x-a}$ и $f_2 : x \to \sqrt{x+a}$, т.е. $f = f_1 + f_2$ и $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [a,+\infty)$ тъй като $a \in \mathbb{R}^+$. Функцията $f$ е растяща в този интервал като сума на две растящи функции и $f_{\min}(a) = \sqrt{2a}$. Тогава ако $x \in [a,+\infty)$, то за всяко $x$ от този интервал е изпълнено, че $f(x) \geq \sqrt{2a}$, а при тези условия $g(x) = c$. Ако $c < \sqrt{2a}$, то за всяко $x$ от разглеждания интервал е изпълнено, че $c < \sqrt{2a} \leq f(x)$. Оттук следва, че множеството от решенията на уравнението (3) е празно. Ако $c = \sqrt{2a}$, то съществува $x_0 \in [a,+\infty)$ такова, че $f(x_0) = c$ и $x_0 = a$. Ако $c > \sqrt{2a}$, то тогава само с тези разсъждения не може да се направи извод за решенията на уравнението. Затова е необходимо да се даде допълнителна информация или да се използва друг метод за решаване на уравнението.




От предходния чертеж, на който са построени графиките на функциите $f_1$, $f_2$ и $f$ (получена като сбор на две функции), се вижда, че графиките на функциите $f$ и $g$ се пресичат при условие, че $c \geq \sqrt{2a}$. При тези условия уравнението има точно едно решение, което може да се намери аналитично или само да се обоснове, че този корен съществува.

От посочения общ модел може да се генерират редица конкретни задачи с предварително известен брой на техните корени или начин за разсъждение за откриване на решението на уравнението.

Например:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} = 2 \tag{3.1}$$

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6} \tag{3.2}$$

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} = 4,\ x \in [4;7] \tag{3.3}$$

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} = 8,\ x \in [4;7] \tag{3.4}$$

За уравнението (3.1) получаваме, че $\sqrt{2.3} > 2$ и от общите разсъждения следва, че това уравнение има празно множество от решения. За уравнението (3.2) имаме, че $\sqrt{2.3} = \sqrt{6}$ и от общите разсъждения следва, че разглежданото уравнение има единствен корен $x_0 = 3$, т.е $P = \{3\}$. В случая (3.3) получаваме, че $\sqrt{2.3} < 4$ и затова тук е дадено допълнителното условие да търсим решението на уравнението в интервала $[4;7]$.

За функцията $f : x \to \sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}$ с $D_f = [4;7]$ получаваме, че множеството от образите на дефиниционния интервал е $f(D_f) = [1+\sqrt{7}; 2+\sqrt{10}]$. Следователно съгласно свойството 3) и ограничението $1+\sqrt{7} < 4 < 2+\sqrt{10}$ следва, че съществува $x_0 \in [4;7]$, такова че $f(x_0) = 4$. Това число се намира като се реши ирационалното уравнение с познатите за учениците методи. Ако ученикът не разполага с метод за решаване на съответното уравнение, то в този случай с посочените разсъждения той установява само, че разглежданото уравнение има единствено решение. За уравнението (3.4) получаваме, че $8 \notin [1+\sqrt{7}; 2+\sqrt{10}]$ и от тук следва, че това уравнение няма корени в посочения интервал.

По-нататък обобщенията могат да се извършват в следните две посоки:

- чрез промяна и усложняване на подкоренните алгебрични изрази ;
- чрез промяна видът на функциите $f_i$;
- чрез промяна видът на функцията $g$.

Промените трябва да са такива, че да са изпълнени едновременно следните условия за по-общия модел

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x): \tag{4}$$

• функциите и са едновременно растящи (намаляващи);
• функцията е намаляваща (растяща ) или константа.

На тези условия отговарят следните няколко модела (параметрите се реални числа):

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = p - x,\ a > 0,\ c > 0 \tag{5}$$

$$\sqrt[3]{ax+b} + \sqrt[3]{cx+d} = c,\ a > 0,\ c > 0 \tag{6}$$

$$\log_a \varphi(x) + \log_b \varphi(x) = (\frac{1}{c})^x,\ a > 1,\ b > 1,\ c > 1 \tag{7}$$

$$a^x + b^x = \log_{\frac{1}{c}} \varphi(x),\ a > 1,\ b > 1,\ c > 1 \tag{8}$$

От направените конкретни и общи разсъждения, свързани с решаването и решенията на уравненията (2) и (3) се вижда, че в два от случаите решението на уравнението не представлява особена трудност. То е свързано по-скоро с логико-дедуктивни съображения, а не с технически процедури. В третият случай решението на уравнението изисква повече и понякога сериозни и задълбочени знания за свойствата на функциите, участвуващи в уравнението, особено в случаите, в които ученикът не разполага с алгоритъм за решаване на уравнението.

От съчетаването на функциите в уравнението зависи качеството, сложността и красотата на новополучената задача.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Т. Б. Дорофеев и др. Пособие по математика для поступающих в ВУЗ-ы, Наука, 1970.
[2] Математическая энциклопедия, т.5, Москва, 1985.
[3] И. Тонов и др. Теми за кандидатстудентски изпит по математика, София, Регалия-6, 1996.



ФМИ, катедра ОМИ
бул. „Дж.Баучър“ 5
1126 София


## AN IDEA FOR CREATING EQUATIONS WHOSE SOLUTIONS REQUIRE USE OF PROPERTIES OF FUNCTIONS


**Vivian Victor Baligand, Diana Petkova Rakovska, Julia Dimitrova Ninova**



To solve an equation sometimes we need to investigate the properties of the functions in it.Then we can creat new problems based on generalization or specification of the ideas.The article deals with this process.

The generalization is based on the properties of the functins.The new problems are created by specification of functions having the properties of the model.