

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999  
*Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of  
the Union of Bulgarian Mathematicians  
Montana, April 5–8, 1999*

**ТРЯБВА ДА СЕ ПРЕПОДАВА МАТЕМАТИЧЕСКА  
СТАТИСТИКА В БЪЛГАРСКОТО СРЕДНОТО  
УЧИЛИЩЕ**

**Димитринка Иванова Владева**

„Статистическите числа не управляват света,  
но те показват как светът се управлява.“  
Йохан Гьоте

В статията се обосновава необходимостта от въвеждане на учебна дисциплина Математическа статистика в българското средно училище.

Защо трябва да се преподава статистика в средното училище?

Светът се променя, макар в много случаи новото да се оказва добре забравено старо. Нови клонове на науката стават ежедневна необходимост. Измежду тях са и математическите дисциплини математическа статистика и финансова математика.

Вярвам, че в българското средно училище ще се изучава предмет Теория на вероятностите и Математическа статистика, не защото някой конкретен човек го иска, а защото от такива знания се нуждаят всички млади хора и това е обективна необходимост. Но кога и по какъв начин, в какъв обем и с какви учебници, зависи от много субективни мнения. Считам тези въпроси за съвсем актуални, още повече, че и малкото часове по Теория на вероятностите са съкратени. Статистика в българското училище се е преподавала до края на четиридесетте години.

От екрана или по ефира почти ежедневно ни уведомяват, че примерно 35% от българското население има определено мнение по даден въпрос, което е резултат от представително социологическо проучване. Очевидно това е вероятно твърдение и да не се събщи с каква вероятност то е изпълнено е най-малкото некоректно.

Човек, който е слушал елементарен курс по Математическа статистика знае, че ако вероятността за риска е 5%, коректният извод би бил: ако сто пъти повторим това изследване при едни и същи условия, като са налице представителност на извадката, независимост на наблюденията, достоверност на данните и др., то в 95 от тях бихме получили, че търсеният процент е между 30% и 40%.

Всеки житейски избор се базира на някакъв опит, т.е. на статистика. Кой вид медицинска или пенсионна застраховка да изберем? Къде и как да вложим парите си? Как да си изберем подходящ бизнес партньор? Добрата преценка при вземане на решения от този тип касае качеството на живота на всеки отделен човек в пазарното

общество. Какво е това риск и рисково събитие? С каква вероятност то се случва и защо застрахователните банки не фалират, а са едни от най-богатите в света. Заедно с курса по Математическа статистика учениците ще могат да намерят отговорите на някои от тези въпроси или поне ще се доближат до тях, а това ще бъде от полза както за отделния индивид, така и за цялото общество. Знанията, които ще получат, ще им помогнат да комуникират по лесно, да се ориентират по-бързо в социалната среда и да вземат по-добри решения.

Статистическите методи са инструмент за вземане на подходящи за дадена цел управленски решения и следователно са необходими на правителството, на менаджерите на търговски, транспортни и промишлени фирми.

Масовите явления не могат да бъдат изучавани по друг начин, освен с вероятностни и статистически методи. Статистическия начин на многовариантно мислене не отрича детерминистичния подход, а го допълва в случаите, за които е неприложим.

Какво е това статистика?

В Британската енциклопедия е написано, че: „Статистиката е наука за извличане на валидни следствия за характеристиките на група лица или обекти, въз основата на числова информация, получена чрез случайна извадка от групата.“ (виж – Б. Пенков [4].) Статистиката е и практическата дейност, свързана със събиране на тази информация и нейната първична обработка. Под думата статистика се разбира още и всяка функция от елементите на дадена извадка.

Математическата статистика е изкуство, в частта си, когато трябва да се намери най-точно отговарящият на реалната действителност математически модел. Проверката за адекватност на избрания модел и всички заключения се правят на базата на строги математически доказателства и формули, валидни при определени условия, записани на математически език. Математиката, лежаща в основата на статистиката ѝ дава огромна сила. Един математически модел може еднакво добре да описва явления от различни области на човешката дейност: физика и химия, икономика и медицина, селско стопанство и политика. Ето защо това е математическа дисциплина, универсална основа за всяко емпирично изследване.

Статистиката е пряко свързана с две други математически дисциплини: комбинаторика и теория на вероятностите. Комбинаториката се занимава с преброяване на елементите на множество, с определени свойства. Предмет на теорията на вероятностите е анализът на понятието случайно. Ако искаме да опознаем нещо, което по същността си е необозримо за нас единствено възможен е вероятностния подход. Тъй като математическата статистика ползва методите и резултатите на тези дисциплини, то очевидно е че изучаването на статистика предполага и тяхното изучаване, в съответно необходимите размери.

Кога би следвало да се изучава тази дисциплина?

Образованието по математическа статистика може да започне и в най-ранна детска възраст, но ако на математическото образование се гледа като на едно цяло. Тогава някои прости идеи могат да се включат като примери в малките класове и думи като модел, случайно, възможно, вероятност, събитие и т.н. да влязат в реч-

ника им и да придобият смисъл. В някои страни се правят експерименти като се включват часове по теория на вероятностите още в началното образование и задължително такава дисциплина присъства в по-горните класове. В почти всички цивилизовани страни елементарен курс по математическа статистика се изучава в средното училище. Много често кратък курс по теория на вероятностите и комбинаторика се включва в часовете по математическа статистика и това е нормално, тъй като това е основата на математическите разсъждения, които се използват. Съществува и алтернатива те да останат в традиционния курс, което би било по-неуспешен вариант. Приложимостта на математическата статистика е многократно по-голяма от доста части на традиционната математика, но часовете по статистика нито могат, нито трябва да изместват или пък да се конкурират с тези от традиционния курс.

Като основен метод за изследване, математическата статистика се явява принципална основа на ред други дисциплини като социология, психология, икономическа статистика, опазване на околната среда и др.

Математическата статистика може лесно да се свърже с информатиката. Малки образователни програмни продукта вече има написани, макар и за други цели. Творчески използвана работата с компютъра може да се окаже много полезна за неща, които трудно се поддават на просто теоретично обяснение. Ако учениците могат да избират модела, да увеличават и намаляват извадката, да групират по различен начин при едни и същи данни те ще схванат че това е вид изкуство. Ако могат да избират допустимата грешка ще получават различни доверителни интервали и бързо ще достигнат до извода, че всяко нещо има цена. Разбира се най-голямото предимство е, че компютъра може да поеме огромна изчислителна работа и така децата едновременно ще се запознаят и усвоят едновременно две различни достижения на човека на двадесетия век. Това разбира се е подходящо за ученици в горен курс.

Математиката не е само за богоизбрани. Тя реално може да промени живота, ако искат да я използват. Целта е курс, достъпен за всяко дете с нормални способности и умения.

За да бъдем реалисти в България би могло да започне експериментално обучение по математическа статистика с ученици между 8 и 10 клас, може би в математически и природо-математически гимназии.

Кой би следвало да преподава, да пише програми и учебни пособия?

Безспорно хора с образование по математическа статистика. Ще се изкуша да цитирам основоположника на аксиоматичното изграждане на теорията на вероятностите А. Н. Колмогоров:

„Да преподава математика добре може само човек, който сам е увлечен по нея и я възприема като жива, развиваща се наука.“

Убедена съм, че има достатъчно много математици, включително и статистици у нас, които отговарят на това съществено изискване. Проблемът е, че няма готовност за започването на такъв курс – няма достатъчно на брой добре подготвени учители, няма учебни помагала и т. н., което не е най-голямата беда. Учебници могат да се напишат, учители да се подготвят. По-тревожното е, че няма виждане за това от съответните институции, а може би и ние математиците-статистици не сме достатъчно активни.

Кои статистически теми и идеи е разумно да влязат в училище?

Първо – основните и второ – тези, които бихме могли да разкажем цялостно, без загуба на точност и без да се нуждаем от специален математически апарат. Материалът трябва да бъде адаптиран на базата на интересни примери, близки до психиката на учениците. Важното е да ги накараме да мислят, да ги стимулираме да знаят. Можем да ги накараме да разсъждават по въпроси като причината за събитията, връзките между тях, прогнозиране на резултати, адекватни критерии за сравняване на данни и др. Децата трябва сами да достигнат до част от математическите идеи, а примерите от реалния живот да ги накарат да преоткрият света около тях.

„Не е толкова важно какво учат в училище, а е важно как учат. Едно наистина разбрано от ученика математическо положение има по-голяма стойност от десет формули, които той е научил наизуст и даже знае да ползува, но не е разбрал техния истински смисъл. Функцията на училището не е в това да дава специален опит, а в това да изработи последователно и методично мислене.“ – това са думи на Макс Планк.

Разбира се има теми, като събиране на данни, относителна честота и графични изображения, извадъчни числови характеристики и доверителни интервали които безспорно имат място във всеки първоначален курс по този предмет. В [3] А. Обретенов формулира основните задачи на математическата статистика като задачи за оценяване на вероятността за дадено събитие, на неизвестни функции на разпределение, на неизвестни параметри на наблюдавани случайни величини, както и критерии за проверка на хипотези и задачи за установяване на статистическа зависимост между събития и величини. Очевидно ще трябва да се откажем от пълнотата и да подберем конкретни теми, отговарящи на основните математически идеи, които можем да формулираме точно и ясно, както и условията при които са изпълнени.

Как да преподаваме математическа статистика на ученици?

Индукция или дедукция? Категорично за целите и задачите на този курс по подходящ би бил индуктивния подход. Като не трябва да забравяме, че непълната индукция води до нови идеи, но не и до доказателства. Добре би било, където е възможно да се съчетаят двата подхода и да се включат кратки доказателства и съображения или пък практическа проверка на верността на дадено твърдение. Подхода при излагане на материала за студенти и ученици трябва да е различен. Да оставим строгата аксиоматика, тремавите дефиниции и тежките доказателства за университетските курсове. Можем ли по лесно разбираем начин да обясним нещата? Това може да стане единствено на базата на интересни и добре подбрани примери.

„Формулите са всесилни, но слепи“  
Феликс Клайн

Всяка геометрична интерпретация внася нагледност в резултатите. Затова използването на графики, таблици, диаграми, хистограми, графи и рисунки се предпочита, а в някои случаи е задължително. Добре би било, например за едни и същи данни да се използват различни мащаби по  $x$  и  $y$  и да се види, как една почти хоризонтална права става силно наклонена. Много пъти геометричната интерпретация ни помага да намерим вярното решение. Ето един пример от корелационен

анализ на данни от който става ясно колко важно е да се уточнят условията на приложимост на математическия резултат. Така коефициентът на корелация би могъл да бъде равен на нула и данните да са силно зависими. Нека разполагаме със следните двойки данни, зададени с таблицата:

$x$	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
$y$	347	317	253	181	107	48	21	44	95	152	209	269	325	347

Данните са взети от книгата на П. Спрент [6]. Първото число означава номера на неделата след 1-ви януари, а второто – времето, когато изгрява слънцето в този ден в минути, три часа след полунощ по Гринуич. Изчислявайки корелационния коефициент за всички данни получаваме, че  $r = 0,064$ , което е много близко до 0. Но всички много добре знаят, че тези две величини са силно зависими. Ако направим графика веднага ще видим, че данните от първите 24 седмици са почти линейно зависими, както и тези от втората половина. Коефициентите на корелация са съответно – за първата половина приблизително  $-1$ , а за втората приблизително  $1$ .

„Теория на вероятностите не е нищо друго, освен здравия смисъл, сведен до изчисления.“  
Пиер Лаплас

При преподаване на теория на вероятностите трябва да се експериментира чрез зарове, кутии с топки, карти, монети. Разполагаме с целия реквизит на хазартните игри (в крайна сметка, вероятно първата книга по тази дисциплина е „Хазартни игри“ на италианския лекар и математик Кардано). Добре е да се използват елементарни разсъждения и игрови ситуации. Ето един пример, който ще провокира по-скоро разумност и справедливост, отколкото хазартни страсти. Нека две деца хвърлят по два зара последователно. Първото печели 1 точка, ако сумата от точките е 2, 3, 4, 10, 11 или 12, а второто печели 1 точка в останалите случаи. Справедлива ли е играта и ако не е може ли да се направи справедлива? При решението на тази задача първо следва да се обърне внимание на това, че адекватния комбинаторен модел е да се разглеждат заровете като различни. Като се разпишат всички възможности, учениците ще установят, че второто дете е облагодетелствано, тъй като точно два пъти по-често ще печели и за да стане играта справедлива първото трябва да печели 2 точки, докато второто остава с 1 точка, в случай че сумата е 5, 6, 7, 8 или 9.

Добре е дори и най-простите примери да са свързани с реални ситуации. Например: купени са 30 яйца. Измежду тях 5 са негодни. Случайно се избират 3 за омлет. Каква е вероятността той да е негоден?

„Заровете на Господ“ не са симетрични  
в обичайния смисъл

Когато моделираме реално явление можем да използваме различно точни модели. Ако зададем въпроса: каква е вероятността в едно семейство да се роди момче или момиче естественият отговор е  $\frac{1}{2}$ . Това е най-грубият модел. Без да разполагаме с никакви допълнителни условия, можем да уточним тази вероятност на базата на достатъчно много наблюдения. Колкото повече наблюдения, толкова по-точни

резултати – основен принцип в статистиката. Ако приложим честотна таблица за поне 1000 наблюдения за броя на родените в даден регион момчета ще видим как след първите 100 наблюдения вероятността за това събитие се фиксира до първия знак, след първите 300 до втория и т. н. При това вероятността да се роди момче е по-голяма от  $\frac{1}{2}$ . От друга страна статистически е установен и фактът, че жените живеят по-дълго. Известно е също така, че след Втората световна война, когато мъжете са били по-малко, относителната честота за раждане на момче рязко се е покачила. Очевидно в природата има заложили компенсаторни механизми, които ние все още не можем да разтълкуваме, но можем да установим тяхното съществуване.

Друг много удачен и интересен пример за учениците при преподаването на този материал би бил за установяване относителната честота на буквите в българския език. В случай, че тази относителна честота е известна, тя може да се използва за разшифроване на конкретен закодиран текст.

„Всички общи теории възникват от частен проблем и няма никакъв смисъл, ако те не служат за разясняването на повече частни въпроси и внасянето в тях на порядък“  
Рихард Курант

Примерите трябва не само да апликират основните идеи, но и да водят до нови нива на знания и умения постепенно, както и да предполагат различни подходи. Водейки ги по тези стъпала на познанието ние едновременно ще развием у тях вкус към изследователски подход и творческо мислене.

Да разгледаме квадрат със страна 1. Чрез таблица от случайни числа в десетична бройна система се рисува облак от точки по следния начин. Нека първите четири цифри от таблицата са 0, 7, 5, 5. На тях се съпоставя точка с координати  $x = 0,07$  и  $y = 0,55$ . На следващите четири числа, например ако те са 8, 4, 3, 1 се съпоставя точка с координати  $x = 0,84$  и  $y = 0,31$  и т. н. Така на таблица от 400 равномерно разпределени случайни числа се съпоставят 100 точки от вътрешността на квадрата. Нека начертаем затворена крива, лежаща изцяло в квадрата и преброим, че точките вътре в нея са  $m$ . Тогава за приблизителна стойност на лицето на фигурата можем да считаме числото  $S = \frac{m}{100}$ . При това, колкото е по голям броят на точките, толкова по точен е резултатът. Така, ако кривата е една четвърт от окръжност с център в единия връх на квадрата и радиус 1, можем приблизително да пресметнем числото  $\pi$ , а именно  $\pi = 4 \frac{m}{100}$ , където  $m$  е броят на точките вътре в сектора. Този пример (виж [2]) ни въвежда в симулационното моделиране и методите Монте-Карло. Удачно е да се разглеждат реални задачи, които водят до прости системи за масово обслужване или прости марковски вериги.

Очевидно да се пише лесно разбираемо и едновременно с това достатъчно точно е мъчна задача. Това, че сме закъснели от световния опит има и своите плюсове: можем да го използваме и да предложим атрактивни учебници за учениците от средния курс преди да е имало практика да се пишат скучни и несъобразени с аудиторията. В крайна сметка по-важна е целта – усвояване на определени знания. Следователно ако изберем приятен и интересен път това ще стане с желание и удоволствие и печалбата ще бъде двойна. Разбира се за да можеш да дадеш трябва да имаш и да искаш. Тогава рецептата се състои от две лекарства: любов и професио-

нализъм, които трябва да се дават едновременно. Ще съумеем ли ние да дадем на нашите деца това, което можем, зависи от нас самите.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. ВЛАДЕВА Образование по математическа статистика – интересно и полезно, Математика и информатика, 2, 1998.
- [2] М. ГЛЕМАН, Д. ВАРГА Вероятностите в училище, Народна просвета, София, 1983.
- [3] А. ОБРЕТЕНОВ Вероятности и статистически методи, Наука и изкуство, София, 1978.
- [4] Б. ПЕНКОВ Статистика и/или стохастика?, Бюлетин на БСД, София, 1994.
- [5] М. KATZ “Probability” in: Mathematics in the Modern World, Scientific American, 1964.
- [6] P. SPRENT Statistics in action, Penguin Books, 1977.
- [7] D. VLADEVA Matematical Statistics for Engineers, Fourth World Conf. on Eng. Education, Minnesota, USA, 1995.

Димитринка Иванова Владева,  
ВВТУ „Т. Каблешков“  
Слатина, 1574 София,  
e-mail: vladeva @ mail.vvtu.bg

#### **MATHEMATICAL STATISTICS MUST BE TAUGHT IN BULGARIAN HIGH SCHOOL**

**Dimitrinka Ivanova Vladeva**

In this article the necessity of initiating Mathematical Statistics in Bulgarian secondary education is grounded.