МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

КЪДЕ СА ВЕКТОРИТЕ В УЧЕБНИТЕ ПРОГРАМИ ПО МАТЕМАТИКА?

Румяна Караджова, Иван Тонов*, Иван Трендафилов

Four good mothers
have four bad daughters:
truth, hatred; prosperity, pride;
security, peril; familiarity, contempt.

В статията се разглеждат проблеми, свързани с преподаването на векторното смятане в училище по новите учебници за 8. и 9. клас.
Направени са предложения за промени в сега действащите учебни програми с цел да се подобри усвояването на учебния материал, свързан с вектори.

Формалният отговор на въпроса от заглавието е следният: „Вектори започват да се изучават в 8. клас, а след това в учебниците за горен курс (съобразени със старата програма от преди години) векторите от време на време се срещат.“ Ако обаче въпросът се разгледа по същество, се достига до някои неприятни изводи. Да напомним, че преди време вектори се изучаваха още в 7 клас — виж [7]. След като беше „преценено“, те отпаднаха от учебната програма и потънаха в небитието. Така три випуска първият, от които ще завърши средното си образование през учебната 1998/99 година, не са учили вектори (освен в часовете по физика) и като че ли никой не е отговорен за това. Но да забравим за учениците от тези три випуска и да разгледаме как се преподават векторите според сега действащите учебни пособия за 8. клас [1], [2], [3] и [4] и за 9. клас [5] и [6].

Във учебниците [3] и [4] за 8. клас се дефинира операцията умножение на вектор с число и се споменават свойствата:

1. $1.\vec{a} = \vec{a}$;   2. $(p.q)\vec{a} = p(q\vec{a})$;   3. $(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$;   4. $p(\vec{a}+\vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$, където p и q са рационални числа, без да се доказват.

В [1] след дефиницията са споменати свойствата 2., 3. и 4., а в [2] тези свойства изобщо липсват, въпреки, че по-късно се използват.

В преговорния урок на учебника за 9. клас [5] свойствата 2., 3. и 4. също са формулирани, но никъде не се споменава дали участващите в тях константи са реални числа. По-късно, в урока за теорема на Талес, свойството 4. се използва, но пак не става ясно дали участващият коефициент е реално число.

*Работата на автора е частично спонсорирана от фонда за научни изследвания на СУ „Св. Климент Охридски“.

Всичките тези неясноти произтичат от факта, че в учебната програма за 8. клас не са предвидени часове за реални числа. Необоснованото преместване на сведенията за реални числа в девети клас води също така и до непълноти в уроците за графика на права пропорционалност и линейна функция. Да припомним, че по старата учебна програма, виж [7] и [8], реалните числа се изучаваха в края на 7-ми и началото на 8-ми клас. *Авторите ще си позволят да направят предложение на компетентните за това органи, учебният материал за реални числа да влезе в програмата за 8. клас.* Това технически може да се осъществи например, ако се издаде една притурка към съществуващите учебници, която да съдържа само реални числа.

Основният въпрос, на който би трябвало да се отговори в изграждането на частта от учебната програма по математика за средното училище, отнасяща се за вектори, е:

„Каква е целта на изучаването на вектори?“

Някои учебници, например [6], ни водят до подозрението, че вектори се изучават само за да се докаже теоремата на Талес, за да се обясни хомотетията и да се въведе скаларното произведение, защото в задачи от други уроци и в никакви други приложения векторният апарат не се използва.

Краткият, макар и не съвсем точен, отговор на поставения въпрос е: „*Целта е да се изгради една алгебрична структура, която позволява да се решават геометрични проблеми с алгебрични средства.*“

Ето защо изучаването на вектори от дадена група от ученици би било **безсмислено**, ако учебниците, по които те учат не удовлетворяват изискванията:

А. Да е изградена една логически осмислена система от знания за вектори.

Б. Да е показано как се прилагат векторите в решенията на разнообразни задачи.

Може определено да се каже, че учебният материал за вектори в учебните пособия за 8. клас [1], [3] и [4] и в тези за 9. клас [5] и [6] е поднесен формално вярно и логически смислено. Да отбележим, че в [1] и [3] векторите са насочени отсечки, докато в [4] те са множества от насочени отсечки. Считаме, че „печалбата“ от по-кратката дефиниция в процеса на преподаването се „изразходва“ в по-трудното осмисляне на нулевия вектор и в задачите, в които се налага подходящ избор на вектор равен на даден. „Бягството от свободния вектор“ всъщност води до въвеждане на сума и разлика на вектори с точност до равенство на насочени отсечки, което е отбелязано в учебните пособия [1] и [3], но само е загатнато в [2].

В [2] се забелязват следните недостатъци:

1. В определението за вектор (стр. 120) се появява неравенството $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, което не е ясно какво означава понеже чак на стр. 122 се обяснява кои вектори се наричат равни.

2. Определенията на стр. 121 за еднопосочни и противопосочни вектори са логически неиздържани, защото в тях се използват недефинираните понятия вектори с една и съща посока, съответно с противоположни посоки.

3. От определенията на стр. 121 и 122 не става ясно дали $\overrightarrow{AA} \neq \overrightarrow{BB}$.

4. Не се изяснява (стр. 124) защо сборът на вектори има свойството комутативност.

5. Не е вярно твърдението, че първата теорема на стр. 129 се доказва с разсъждения, аналогични на онези, с които е решена зад. 3 от стр. 128. С аналогични

разсъждения се доказва само обратната на тази теорема. Логично е тези две теореми (правата и обратната) да се докажат, но по-важно е, те да се приложат в задачи, а това липсва в [2].

6. Липсват равенствата $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ и $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$.

7. Липсват *каквито и да е общи свойства* на произведение на вектор с число и това води до необоснованост както на задачи 3 и 4 и теоремите от стр. 130 и 131, така и на всички следващи задачи и теореми, в които се използва произведение на вектор с число.

Посочените недостатъци ни дават основание да твърдим, че в учебното пособие [2] знанията за вектори не са представени формално вярно и логически смислено.

Сега подробно ще разгледаме как се прилагат векторите в учебниците за 8. и 9. клас.

Както вече отбелязахме в [6] приложенията на векторите са съвсем малко, но да бъдем по-конкретни. След съвсем краткия преговор на основните определения за операциите с вектори не може да се очаква, че ученикът сам ще се справи със задачи 5 – 8 на стр. 15, в които трябва да използва вектори. В уроците за теорема на Талес (стр. 15), за хомотетия (стр. 38) и за образ на отсечка и на ъгъл при хомотетия (стр. 42) векторите се използват, но в нито една задача след уроците векторите не присъстват. Векторите отново се появяват в урока за скаларно произведение на два вектора на стр. 129 от [6]. Като изключим задачите от този урок задачи за вектори в целия учебник няма.

Приложения на векторите в учебното пособие [1] липсват. На стр. 128 е решена задачата за изразяване средата на отсечка при това твърдението е доказано в двете посоки. То обаче се прилага (само в едната посока) в единствена задача за самостоятелна работа на стр. 129. По-нататък векторите изчезват — те не се срещат нито в урока за средна отсечка в триъгълник, нито в урока за медицентър, нито където и да е било в следващите уроци. Защо тогава в това учебно пособие са въведени векторите?

Не е много по-различна картината с приложенията на векторите в учебното пособие [5]. Още в първия урок е разгледана една задача за медицентър. Решението ѝ обаче е трудно разбираемо за онези ученици, които в осми клас са използвали [1]. Задача 9 за самостоятелна работа от стр. 78 е може би постижима за ученици, които са доказвали теоремата за средната отсечка в 8. клас с вектори и са придобили някаква техника за работа с вектори, но не е по силите на онези, които са се подготвяли по [1]. Същото е положението със задачи 11, 12 и 13 от стр. 78. Нереално е да се очаква ученици, които в 8. клас са срещали единствено задачата за среда на отсечка, в първия преговорен урок от 9. клас (задача 11) самостоятелно да докажат твърдението за делене на отсечка в произволно отношение. Също така е нереално да предполагаме, че ученик, който има знанията, придобити от [1] и преговора на [5] ще успее да реши съдържателните, но трудни задачи 32, 33 и 34 от стр. 91, в които се иска успешно да борави с векторите върху ъглополовящите в произволен триъгълник. Задачи за вектори се срещат единствено още в урока за скаларно произведение на два вектора, но освен да затвърдят понятието скаларно произведение те не постигат други цели.

Какви са приложенията на векторите в учебното пособие [3]? Почти толкова, колкото приложенията от [1]. Вектори не се използват в доказателството на теоремата за средна отсечка в триъгълник. Въпреки, че има задача (зад. 9 от стр. 20), в която се симулира тази теорема, задачата не представлява нищо повече от разчитане на едно векторно равенство. Векторите липсват и в урока за делене на отсечка в дадено отношение — не е ясно каква е ролята на тривиалната, но със звездичка зад. 9 от стр. 24. Вектори се появяват и в последната задача от втория урок за медицентър, но също като илюстрация. Странно е мястото на задачата за изразяване на вектора с край точка, деляща отсечка в дадено отношение (зад. 18 на стр. 35). Тази задача е първата и единствена, в която вектор се изразява като линейна комбинация на два други. Всъщност тя никакви знания не припомня и никакви не затвърждава. Естественото ѝ място беше преди урока за медицентър. Тъй като в това учебно пособие няма други задачи за вектори, логично е да предположим, че векторите присъстват в него само, защото трябва да се удовлетворят формалните изисквания на учебната програма.

След обоснованата критика към авторите на учебните пособия [1], [2], [3], [5] и [6], чиято професионална подготовка дълбоко уважаваме, ще отговорим на въпроса: „*Какво предлагат авторите на тази статия?*“

1. Изграждането на векторите в 8. клас да стане на основата на реалните числа. Дълбоко некоректно е развиването на една важна част от планиметрията да се основава на равенството $p(\vec{a}+\vec{b}) = p\vec{a}+p\vec{b}$, което дори не е формулирано ясно при $p \in \mathbb{R}$, а в предния (осми) клас само е споменато, когато p е рационално число. Това равенство, а също и много други твърдения (за графиката на линейната функция, теоремата на Талес и др.) могат *коректно* да се докажат, когато коефициентите са рационални числа (виж раздел „Функции и графики“ от [4]). Така в 8. клас може да се извърши добра пропедевтика на теоремата на Талес, която в началото на 9. клас по-лесно ще се възприеме от учениците.

2. Да се изяснят приложенията на векторите с достатъчно много решени задачи и доказани с помощта на векторите твърдения. Съществуват разнообразни задачи, които да покажат ползата от векторите на ученика — една много малка част от тях е представена в [4]. Особено важно за усвояването на векторния апарат, за формирането на усет към векторни разсъждения, е доказването на теоремите за средната отсечка в триъгълник и в трапец, и на теоремата за медицентъра в триъгълник чрез векторния апарат — това също е направено [4]. Също в [4] ученикът ще се запознае с векторното решение на задачата за делене на отсечка в дадено отношение и с приложенията на тази важна задача в други задачи, които също сме решили с вектори. Считаме, че за да добие техника за работа с вектори, ученикът трябва да се запознае с векторните решения на разнообразни задачи.

Силата на векторните разсъждения в [4] е показана най-ярко в урока за забележителни точки в триъгълника, в който чрез вектори е установено как с а разположени върху правата на Ойлер медицентърът, ортоцентърът, центърът на описаната окръжност и центърът на окръжността на деветте точки за произволен триъгълник и е доказано, че радиусът на последната окръжност е равен на половината от радиуса на описаната окръжност. Всъщност тези факти учениците по-късно ще могат да установят и с други методи, което е една малка стъпка от големия им поход към постигането на разнообразие и формиране на въображение на мисълта.

Накрая да отбележим, че в [4] не се фетишизира векторния апарат, което там е изразено по следния начин:

„Векторният метод е силно оръжие за решаване на геометрични задачи и понататък често ще го прилагаме. Понякога решението на задачата с вектори е по-дългото, но то е стандартно решение — в него не се изискват особена досетливост, допълнителни построения, не се налага разглеждането на различни случаи и т.н.“

3. В учебниците по математика за 8. клас, а също и в учебниците по математика за следващите класове идеята за векторно решение да присъства във всички раздели, където това е възможно. Разбира се, че да се вмъкват задачи с вектори например в раздела „Окръжност“ от учебника за 8. клас е нецелесъобразно, но и да липсват в раздела „Триъгълник и трапец“ е също така нецелесъобразно. Да подчертаем, че проследяването на векторната идея не става само със задачи за самостоятелна работа, а е необходимо да има поне 2-3 решени задачи от подобен тип в урока.

4. Скаларното произведение на два вектора не е инструмент единствено за доказване на косинусовата теорема, а с негова помощ могат и трябва да се решават разнообразни и интересни планиметрични задачи. Такива решени и нерешени задачи е полезно да присъстват както в урока за скаларно произведение на два вектора, така и в годишния преговор от учебника за 9. клас.

Съществуват много и разнообразни стереометрични задачи, в решението на които ясно проличава силата на векторния метод. Убедени сме, че в бъдещите учебници по математика както за 10. клас, така и за по-горните класове, векторни решения на задачи и доказателства чрез вектори на някои твърдения трябва да присъстват.

5. Важен момент от преподаването на вектори в средното училище трябва да стане изразяването на векторите чрез техните координати. Читателите вероятно ще се досетят, че това е една позабравена идея от по-старите учебници за СИП. Да погледнем на нея и от гледната точка на промяната в българското образование — в повечето европейски образователни програми по математика векторите се преподават заедно с координатния метод. Съществено е обаче да отговорим на въпроса „*В учебната програма на кой клас е удачно да се появят координатите на вектори?*“ Добавянето на координатния метод в учебната програма по геометрия в 8. клас, която съвсем не е лека, ще увеличи проблемите в усвояването на геометрията на част от осмокласниците; ето защо такава промяна не е удачна. От друга страна считаме, че въвеждането на координати в учебника за 10. клас не е удачно, защото там няма да проличи веднага ползата от координатите.

Считаме, че подходящото място, където учениците е добре да се запознаят с координати на вектори, е началният преговор (с допълнения) в 9. клас. Разделът „Функции и графики“ от учебника за 8. клас може да се разглежда като част от подготовката за въвеждане на координати на вектор.

По-късно в учебника за 9. клас е удачно координатите на вектор да се използват в урока за хомотетия и скаларното произведение на вектори да се изрази чрез координатите им. Само така учениците ще се убедят, че скаларното произведение представлява ефикасен инструмент за намиране на ъгли. В учебниците за 10. клас и по-горните класове координатите на вектори и скаларното произведение, изразено чрез координати на вектори, е добре да играят важна роля в решенията на някои геометрични задачи.

Преди време един колега се хвалеше със сабята на дядо си, която висеше на *стената в хола му. На въпроса остра ли е сабята той нищо не отговори, а я извади от канията и с нея отряза тънка филийка хляб. Ако направим паралел между векторите и сабята можем да заключим:*

— много е лошо, когато векторите в учебните програми и в учебниците са като ръждясало желязо скрито в овехтялата прашолясала кания провесена на стената;

— също така не е добре, ако те са като острата сабя, с която можем да си позволим само да отрежем една тънка филийка;

— чудесно ще бъде, ако векторите са ефикасно оръжие в ръцете на ученика, с което той може лесно да спечели битката с някои нестандартни и трудни геометрични задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски. Математика за 8. клас, Анубис, С., 1997.
[2] З. Паскалева, Г. Паскалев. Математика 8. клас, Летера, 1997.
[3] Г. Ганчев, Н. Райков, И. Георгиев, С. Петкова, В. Дамянова. Математика за 8. клас, Просвета, С., 1998.
[4] И. Тонов, И. Трендафилов, Р. Караджова. Математика за 8. клас, Булвест 2000, С., 1998.
[5] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски. Математика за 9. клас, Анубис, С., 1998.
[6] А. Лангов, В. Георгиев. Геометрия, учебно помагали за 9 клас, ИК Свят. Наука, С. 1998.
[7] И. Ганчев и др. Математика за 7. клас, Народна просвета, 1987.
[8] Бл. Сендов и др. Математика за 8. клас, Народна просвета, 1988.

Румяна Караджова,
Софийска математическа гимназия
София 1000.

Иван Костадинов Тонов
Факултет по математика и информатика
СУ „Св. Кл. Охридски"
ул. Дж. Баучър 5
1126 София

Иван Димитров Трендафилов,
Институт по приложна математика и информатика
ТУ - София
София 1000

WHERE ARE VECTORS IN THE SCHOOL CURICULA?

Rumiana Karadjova, Ivan Tonov, Ivan Trendafilov

Some problems about teaching vectors according the new manuals for the grades 8 and 9 are discussed. Some propositions for chandes in the now acted curricula are raised for improvind the process of learning vectors in the secondary schools.