МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

ДРОБНО СМЯТАНЕ И ФУНКЦИИ НА МИТАГ-ЛЕФЛЕР: ВЪЗНИКВАНЕ И НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКАТА И СИСТЕМИТЕ ЗА УПРАВЛЕНИЕ *

Виржиния С. Кирякова, Сава И. Гроздев, Георги П. Иванов

Целта на този обзор е да привлече вниманието към „дробното смятане“ – област на математическия анализ, не много популярна, но с все по-широки приложения както в самия анализ, така и в механиката, физиката, теорията на управлението и сигналите, фракталната геометрия, химията, статистиката. Използването му е тясно свързано с функциите на Митаг-Лефлер, обобщаващи експоненциалната и тригонометричните функции, като решения на диференциални и интегрални уравнения от произволен (дробен) ред.

1. Дробното смятане. Понятието *„дробно смятане“* (ДС) включва теорията и приложенията на операторите за интегриране и диференциране от произволен (т.е. вкл. дробен) ред, наричани обикновено *дробни интеграли* и *дробни производни*. Това смятане е дисциплина, стара колкото класическото диференциално и интегрално смятане, но има доста по-различна съдба и популярност. Напоследък интересът към него нараства изключително бързо (серия от конференции, справочници, монографии, специализирани списания, бум от чисто теоретични и съвсем приложни публикации), стимулиран от приложенията му във физиката, инженерството, природните науки – за описване на явления вкл. от „фрактален“ характер. Счита се, че то е възникнало от някои формални манипулации на Лайбниц (1695, 1697) и Ойлер (1730). На въпроса на Лопитал: „А какво би станало, ако n е $1/2$ в израза $d^n y/dx^n$?“, Лайбниц отговаря пророчески: „Това би довело до парадокс... От този привиден парадокс обаче, един ден ще бъдат извлечени полезни следствия... “. Исторически, първото приложение на ДС идва тъкмо от нужди на механиката, във връзка с т.нар. изохронна задача. Абел (1823) илюстрира елегатността и силата на ДС като решава съответното интегрално уравнение (наричано сега уравнение на Абел), макар и формално – в термините на т.нар. дробни производни. Това изглежда е мотивът, накарал по-нататък Лиувил и Риман да положат основите на по-строга математическа теория, доразвивайки идеите на Ойлер, Лагранж, Лаплас, Лакроа. Много още други известни математици са допринесли за развитието на ДС (споменаваме само тези до средата на нашия век !): Фурие, Грюнвалд, Лоран, Адамар, Хевисайд, Харди, Литълууд, Вайл, Зигмунд, Лъв, Ердей, Кобер, Уидер, Рис

*Тази работа е частично подпомогната от Национален фонд „Научни изследвания“ - МОН, по договор ММ 708/1997.

и т.н. Но дробното смятане е и *нова дисциплина*, тъй като то започва интензивното си развитие и възраждане след 1974 г. (първата книга [9] изцяло посветена на ДС и първата конференция по ДС в Ню Хейвън). Оттогава насам бяха организирани поредица от международни конференции и се появиха бързо нарастващо количество от монографии, научни статии, сборници с трудове и специализирани списания по тази дисциплина (измежду тях – енциклопедията на Самко, Килбас и Маричев [13], монография на един от авторите [7], новото списание *„Fractional Calculus & Applied Analysis"* (Ed. V. Kiryakova), и др. *Обобщеното дробно смятане* ([4]) борави с по-общи интегро-диференциални оператори, съдържащи специални функции.

Най-често използваната дефиниция за интегриране от произволен (нецелочислен, т.е. дробен) ред произхожда от добре известната формула за n-кратно (целочислено) интегриране,

$$\int\limits_0^z dz_1 \int\limits_0^{z_1} dz_2 \cdots \int\limits_0^{z_{n-1}} f(z_n)dz_n = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^z (z-\zeta)^{n-1} f(\zeta)d\zeta, \quad n \in \mathbb{N},$$

като се замени факториелът с гама-функция: $(n-1)! = \Gamma(n)$. Действително, така се получава т. нар. *дробен интеграл на Риман-Лиувил (Р-Л)* от ред $\alpha \geq 0$:

$$R^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z (z-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta)d\zeta, \quad R^0 f(z) := f(z), \tag{1}$$

удовлетворяващ *правилото за произведение* (*полу-груповото свойство*): $R^\alpha R^\beta = R^{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$; $R^0 = \mathrm{Id}$. *Дробните производни на Р-Л* от ред $\alpha \geq 0$ се дефинират чрез композиции (произведения) на производни от целочислен ред и интеграли от дробен ред (1), с подходящ избор на цялото число n:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(z) &:= \left(\frac{d}{dz}\right)^n R^{n-\alpha} f(z) = \\ &= \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left\{\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^z \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(z-\zeta)^{\alpha-n+1}}\right\}, \quad n-1 < \alpha < n. \end{aligned} \tag{2}$$

Алтернативна дефиниция на производните от дробен ред, която отчита и началните условия и се оказва по-подходяща за приложенията, е въведена от Капуто (вж. Капуто и Майнарди [3]), т.нар. *производна на Капуто*:

$$\widetilde{D}^\alpha f(z) := R^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^z \frac{f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta}{(z-\zeta)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 < \alpha < n. \tag{3}$$

В общия случай, $\left(\frac{d}{dz}\right)^n R^{n-\alpha} f(z) \neq R^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z)$. Да отбележим също, че $D^\alpha\{1\} = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ (т.е. за нецели показатели α производните (2) от константа не се анулират), докато $\widetilde{D}^\alpha\{1\} \equiv 0$. Дефиницията на Капуто (3) позволява отчитането на лесно интерпретируеми конвенциални начални условия, представими чрез целочислени производни, а именно:

$$D^\alpha f(z) = \widetilde{D}^\alpha f(z) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0)\frac{z^{k\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\,.$$

и нейната трансформация на Лаплас се задава с

$$\mathcal{L}\{\widetilde{D}^{\alpha} f(z); s\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(z); s\} - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(+0) s^{n-k-1}, \ n-1 < \alpha < n.$$

За да демонстрираме естествения подход при въвеждането на операторите на Р-Л за решаване на практически задачи, ще дадем една съвременна интерпретация на решението на абеловото интегрално уравнение в термините на ДС. През 1823 г. Абел [1] разглежда следната задача от механиката (тясно свързана със задачата на Бернули): Във вертикалната равнина xOy да се намери графиката на растящата функция $x = \varphi(y)$ надолу по която се хлъзга, под влиянието на гравитацията материална частица, така че времето на падане до най-ниската точка ($y = 0$) да е равно на зададена функция $t(y)$ от началната височина $y = H$. Съответното интегрално уравнение, което Абел решава по отношение на $u(t)$, е:

$$\int_0^y (y-z)^{-1/2} u(z) dz = \sqrt{2g}\, t(y), \quad y \in [0, H].$$

Фактически обаче, той решава по-общо уравнение, в което показателят $-1/2$ е заменен с $(\alpha - 1)$, $\alpha \in (0, 1)$. След субституции, уравнението (наречено *абелево*), по отношение на неизвестната функция $u(t)$ има вида:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{4}$$

Като умножим двете страни на (4) с $(y-x)^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$, интегрираме по $(0, y)$; сменим реда на интегралите, и използуваме формулата за B-функцията (за детайли вж. [5]), намираме решението от [1], в съвременен вид – като дробна производна (2):

$$u(y) = D^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dy} \int_0^y (y-x)^{-\alpha} f(x) dx. \tag{5}$$

2. Функции на Митаг-Лефлер. *Функциите на Митаг-Лефлер* E_{α} (Митаг-Лефлер, 1902-1905) и $E_{\alpha,\beta}$ (Агарвал, 1953), дефинирани чрез степенните редове

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \tag{6}$$

са естествено обобщение на експоненциалната функция (с $\alpha = \beta = 1$)

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)},$$

решение на най-простото диференциално уравнение $D^1 \exp(\lambda z) = \lambda \exp(\lambda z)$.

Много от свойствата на функциите на М-Л са следствия от техните *интегрални представяния*, вж. например [4, 6, 7, 8].

Примери на функции на Митаг-Лефлер. $\alpha > 0$, $\beta = 1$:

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad E_{1,1}(z) = \exp(z), \quad E_{2,1}(z^2) = \cosh z, \quad E_{2,1}(-z^2) = \cos z,$$

$$E_{1/2,1}(z^{1/2}) = \exp(z)\left[1 + \mathrm{erf}(z^{1/2})\right] = \exp(z)\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma(\frac{1}{2}, z)\right],$$

(функции на грешката, или непълни гама-функции);

$\beta \neq 1$:

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z},\ E_{1/2,2}(z) = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{z}}{z},\ E_{2,2}(z) = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Основната роля на функциите на М-Л в дробното смятане и при решаване на задачи с метода на трансформацията на Лаплас се дължи на факта, че *техните трансформации на Лаплас* са рационални функции от твърде общ вид (виж напр. [7, 11]):

$$(7)\qquad \mathcal{L}\{E_\alpha(-\lambda z^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}; \mathcal{L}\{z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda z^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}, \quad \Re(s) > |\lambda|^{1/\alpha}.$$

По-общо, следните спомагателни, функции се използуват напоследък:

$$(8)\qquad \mathcal{E}_k(z, \lambda; \alpha, \beta) := z^{\alpha k + \beta - 1} E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

тъй като техните образи по Лаплас ([6])

$$\mathcal{L}\{\mathcal{E}_k(z, \pm\lambda; \alpha, \beta)\} = \int\limits_0^\infty \exp(-st)\mathcal{E}_k(z, \pm\lambda; \alpha, \beta)ds$$

$$(9)\qquad = \frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^{k+1}}, \quad \Re(s) > |\lambda|^{1/\alpha}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

дават възможности да се интерпретират, след известни алгебрични манипулации (разлагане в елементарни дроби) почти всички рационални функции на s, като линейни комбинации на образи по Лаплас на функции (8).

Функциите на М-Л са решения на основни дробно-диференциални уравнения, възникващи в механиката и физиката, т. нар. *дробно-релаксационни* ($0 < \alpha \leq 1$) и *дробно-осцилационни уравнения* ($1 < \alpha \leq 2$), вж. [4]:

$$(10)\quad \frac{d^\alpha y}{dz^\alpha} + y(z) = 0 \implies y_j(z) = \mathcal{E}_1(z, -1; \alpha, j+1), j = 0, \ldots, n-1,\ n-1 < \alpha \leq n.$$

3. Системи за управление от дробен ред. Основните характеристики на една проста *система за управление с обратна връзка* са: $W(s)$ – „вход“, $E(s)$ – „грешка“, $U(s)$ – „изход на контролера“, $Y(s)$ – „изходът на системата“; $G(s)$ е предавателната функция на управляваната система, а $G_c(s) = U(s)/E(s)$ е предавателната функция на контролера (управляващото устройство).

Известно е, че „отговорите“ (реакциите) на такава система могат да се намерят от предавателните функции (или от техни композиции), чрез интегрални оператори като: *трансформацията на Лаплас и нейното обръщане*:

$$(11)\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int\limits_0^\infty \exp(-st)f(t)dt, f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \exp(st)F(s)ds,$$

последователни интегрирания и/или диференцирания от целочислен ред, и др., например: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} := y_{\mathrm{imp}}(t)$, реакция на системата на единично-импулсно въздействие, $\int\limits_0^t g(\tau)d\tau := y_{\mathrm{step}}(t)$, реакция на системата на единично-скокообразно въздействие, $\int\limits_0^t y_{\mathrm{step}}(\tau)d(\tau) := y_{\mathrm{ramp}}(t)$, реакция на системата на единично линейно-нарастващо въздействие, и др.

Системите за контрол *от цял ред*, които обикновено се разглеждат, са свързани с предавателни функции $G(s), G_c(s)$ от вида

$$(12) \qquad G(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}, \quad G_c(s) = K + Ts^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Напоследък обаче, често се разглеждат и *динамични системи от дробен ред*, които позволяват по-ефективно управление и по-адекватно описание на процеси от реалния свят ([2, 3, 10, 12]). Предавателните функции от дробен ред позволяват да се отчитат паметта и наследствените свойства на материалите, докато при моделите от цял ред тези ефекти обикновено се пренебрегват. Оказва се, че системите от дробен ред играят ролята на „реалността“ във „фракталния“ (дробно-размерен) свят, докато целочислените системи са само „приближения“, в ролята на по-прости, но не дотам подходящи модели.

Тъй-наречените *предавателни функции от дробен ред* имат вида

$$(13) \qquad G_n(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1}s^{\beta_{n-1}} + \ldots + a_1 s^{\beta_1} + a_0 s^{\beta_0}},$$

с произволни реални степенни показатели $\beta_n > \beta_{n-1} > \ldots > \beta_1 > \beta_0 > 0$ и реални коефициенти. Във времевата област, те отговарят на *диференциалните уравнения от дробен ред*

$$(14) \qquad a_n \widetilde{D}^{\beta_n} y(t) + a_{n-1}\widetilde{D}^{\beta_{n-1}} y(t) + \ldots + a_1 \widetilde{D}^{\beta_1} y(t) + a_0 \widetilde{D}^{\beta_0} y(t) = u(t),$$

където $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ е изходът на системата и $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ е изходът на контролера; а $\widetilde{D}^{\beta}$ означава производна на Капуто (3).

Доскоро системи от дробен ред бяха изучавани съвсем епизодично, поради липсата на подходящи математически модели или математически апарат за третирането им. В действителност обаче, причините са в непознаването на този математически апарат – малката полулярност, и сред математици-теоретици, и сред приложници, на понятията на дробното смятане и на функциите на Митаг-Лефлер. За да се работи успешно със системи и контролери (управляващи устройства) от дробен ред, е необходимо да се знае явното аналитично решение на задачата за намиране на обратна трансформации на Лаплас от функции като:

$$\frac{s^{\beta-1}}{s^{\beta}+\lambda},\ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\beta+\lambda}},\ \ldots,\ G(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + \ldots + a_0 s^{\beta_0}}$$

Такива функции обаче не могат да бъдат намерени – като известни образи – в съществуващите (остарели морално!) таблици на трансформациите на Лаплас. Изключение правят някои много частни случаи, с параметри (индекси) $\alpha, \beta = 1/2,\ 1,\ 2,$ които съответствуват на добре известните - експоненциална, тригонометрични функции, функции на грешките, непълни гама-функции. Функциите на Митаг-Лефлер (с произволни индекси) бяха изцяло игнорирани в досегашните таблици и справочници. В тяхната терминология обаче, могат да се разложат – по известните аналитични процедури, предавателните функции от вида (13), поради което те са удобен инструмент за описване на реакциите на системи от дробен ред:

$$
\begin{aligned}
G_n(s) &= \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1}s^{\beta_{n-1}} + \ldots + a_0 s^{\beta_0}} \\
&= \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1}s^{\beta_{n-1}}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-2} a_k s^{\beta_k}}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1}s^{\beta_{n-1}}}} = \cdots \\
&= \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_{n-2}=m, k_i\geq 0} (m; k_0, k_1, \ldots, k_{n-2}) \\
&\times \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} \frac{s^{-\beta_{n-1}} + \sum\limits_{i=0}^{n-2}(\beta_i - \beta_{n-1})k_i}{(s^{\beta_n - \beta_{n-1}} + \dfrac{a_{n-1}}{a_n})^{m+1}},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

където $(m; k_0, \ldots, k_{n-2}) = m!/k_0! \ldots k_{n-2}!$ са тъй-наречените „мултиномиални“ коефициенти. Вижда се, че разлагането се състои от елементарни дроби от вида (7), (9), чиито обратни трансформации на Лаплас са представими посредством функции на М-Л (6), (8). Тогава, реакцията на системата на единично-импулсно въздействие (импулсната преходна функция) се намира лесно във вида

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{imp}}(t) &= g_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_n(s)\} \\
&= \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k_0+\ldots+k_{n-2}=m, k_i\geq 0} (m; k_0, \ldots, k_{n-2}) \\
&\times \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} \mathcal{E}_m \left(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j \right).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

По-нататък, интегрирайки този израз, можем да намерим реакцията на системата на единично-скокообразно въздействие (преходната функция), отново в термините на функциите на М-Л:

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{step}}(t) &= \int_0^t g_n(\tau)d\tau = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k_0+\ldots+k_{n-2}=m, k+i\geq 0} (m; k_0, \ldots, k_{n-2}) \\
&\times \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} \mathcal{E}_m \left(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j + 1 \right).
\end{aligned}
$$

Примери:

а) $G_2(s) = \dfrac{1}{as^{\alpha} + b}, \ \alpha > 0$

$$
\left.
\begin{aligned}
y_{\mathrm{imp}}(t) &= g_2(t) \\
y_{\mathrm{step}}(t) &= \int_0^t g_2(\tau)d\tau
\end{aligned}
\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{E}_0(t_1, -\frac{b}{a}; \alpha, \alpha + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}).
$$

б) $G_3(s) = \dfrac{1}{as^\beta + bs^\alpha + c}$, $\beta > \alpha > 0$

$$\left.\begin{array}{l} y_{\rm imp}(t) = g_3(t) \\ y_{\rm step}(t) = \int\limits_0^t g_3(\tau) d\tau \end{array}\right\} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^k \mathcal{E}_k(t, -\frac{b}{a}; \beta - \alpha, \beta + \alpha k + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\}).$$

Контролерите (устройства за управление) от дробен ред са друг подходящ начин за по-ефикасен контрол на системи от дробен ред. Подлубни [12] предлага обобщение на класическите (от целочислен ред) дробно-интегрални (PID-) контролери до контролери с предавателна функция от вида $G_c(s) = U(s)/E(s) = K_P + K_I s^{-\lambda} + K_D s^\mu$, $\lambda, \mu > 0$. Съответното моделно уравнение във времевата област на такъв $PI^\lambda D^\mu$-контролер е: $u(t) = K_p w(t) + K_I \widetilde{D}^{-\lambda} w(t) + K_D \widetilde{D}^\mu w(t)$, и съдържа едновременно дробна производна от ред $\mu > 0$ и дробен интеграл от ред $\lambda > 0$. За $\lambda = \mu = 1$ се получават класическите PID-контролери, а за $\mu = 0$ или $\lambda = 0$, PI- или PD-контролерите, съответно. Реакциите на такива системи отново са представими чрез функции на Митаг-Лефлер. За повече подробности, вж. [8].

ЛИТЕРАТУРА

[1] N. H. Abel. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intègrales definies. *Magazin for Nuturvindensaberne*, **1**, *2* (1823), 11-27.

[2] R. L. Bagley, R. A. Calico. Fractional-order state equations for the control of viscoelastic damped structures. *J. Guidance, Control and Dynamics*, **14**, *2* (1991), 304-311.

[3] M. Caputo, F. Mainardi. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Appl. Geophysics*, **91**, *8* (1971), 134-147.

[4] R. Gorenflo, F. Mainardi. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order. In: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Eds. A. Carpinteri, F. Mainardi), Springer-Verlag, Wien - N. York (1997).

[5] S. Grozdev. On the appearance of the fractional calculus. *J. Theor. Appl. Mechanics* **27**, *3* (1997), 11-20.

[6] A. Erdélyi et al. Higher Transcendental Functions, Vols. **1-3**. McGraw-Hill, N. York (1953).

[7] V. Kiryakova. Generalized Fractional Calculus and Applications. Longman, Harlow (1994).

[8] V. Kiryakova, G. Ivanov. The fractional calculus and Mittag-Leffler functions: some applications in the control theory. Appl. of Math-s in Engineering (Summer School Tehn. Univ. Sofia, Sozopol'98), Heron Press, 1999 (to appear).

[9] K. Oldham, J. Spanier. The Fractional Calculus. Acad. Press, N. York (1974).

[10] A. Oustaloup. Systèmes asservis lineáres d'ordre fractionnaire (théorie et pratique). Masson, Paris (1983).

[11] I. Podlubny. The Laplace transform method for linear differential equations of fractional order. Inst. Exp. Phys., Slovak Acad. Sci. No UEF-02-94, Kosice (1994).

[12] I. Podlubny. Fractional-order systems and fractional order controllers. Inst. Exp. Phys., Slovak Acad. Sci. No UEF-03-94, Kosice (1994).

[13] С. Самко, А. Килбас, О. Маричев. Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения. Наука и Техника, Минск (1987).

Виржиния С. Кирякова
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев бл. 8
1113 София, България
e-mail: virginia@math.bas.bg

Сава И. Гроздев
Институт по механика
ул. Акад. Г. Бончев бл. 4
1113 София, България
e-mail savagroz@math.bas.bg

Георги П. Иванов
ВВИСУ „Л. Каравелов“,
ул. Суходолска
София, България

FRACTIONAL CALCULUS AND MITTAG-LEFFLER FUNCTIONS: ORIGINS AND SOME APPLICATIONS IN MEHANICS AND CONTROL SYSTEMS

Virginia S. Kiryakova, Sava I. Grozdev, Georgi P. Ivanov

The aim of this survey is to attract the attention to the so-called "Fractional Calculus" (FC) – a field of Mathematical Analysis (Calculus), not so popular but with growing applications in Analysis itself, as well as in disciplines like Mechanics, Physics, Control Theory, Signals, Fractal Geometry, Chemistry, Statistics, etc. It deals with the operators of integration and differentition of arbitrary order (fractional integrals and fractional derivatives). The use of FC's aparatus is closely related to the Mittag-Leffler functions, generalizing the exponential and cylindrical functions as solutions of differential and integral equations of arbitrary (fractional) order.