МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

ТРИ ЗАДАЧИ С ПО ПЕТ РЕШЕНИЯ

Милен Н. Найденов

Тази работа съдържа разнообразни решения на три задачи, давани на конкурсните изпити по математика за постъпване във ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“ – Варна. По такъв начин е споделен опита, натрупан при проверка на стотици различни кандидаткурсантски работи. Поради това предложената тема или части от нея биха могли да бъдат използувани не само за извънкласна работа, а и в конкретната урочна дейност.

Задача 2 (1991г). Да се докаже, че за всяко реално $x \neq 1$, съществува остър ъгъл α, чийто косинус е равен на

$$\frac{x^2+2}{2x^2-2x+3}.$$

Решение на задача 2.

Първи начин: Щом α е остър, то $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\alpha \in (0; 1)$. Ще докажем, че

$$0 < \frac{x^2+2}{2x^2-2x+3} < 1.$$

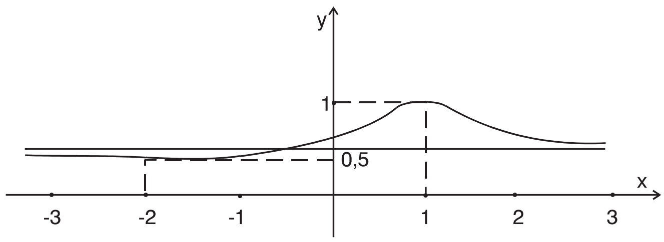
Числителят $x^2+2>0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Знаменателят $2x^2-2x+3$, разглеждан като квадратна функция има коефициент пред x^2 : $a=2>0$ и дискриминанта $D_1=-5<0$, което води до $2x^2-2x+3>0$ за всяко реално x. Частното на две положителни числа е положително и това доказва лявото неравенство. Щом за всяко реално x, знаменателят е положителен, то дясното неравенство е равносилно на $x^2+2<2x^2-2x+3 \to x^2-2x+1>0 \to (x-1)^2>0$. Равенство се достига при $x=1$, но по условие $x \neq 1$.

Втори начин: Задачата може да бъде решена чрез пълно изследване на функцията $f(x)=\frac{x^2+2}{2x^2-2x+3}$. Тук ще посочим някои по-важни резултати от изследването. $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално x. $f'(x)=-2\frac{x^2+x-2}{(2x^2-2x+3)^2}$ и от $f'(x)=0 \to x_1=-2$, $x_2=1$.

Знакът на $f'(x)$ определяме от знака на $\left(-x^2-x+2\right)$, т.е.

$$f'(x)<0 \text{ за } x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \text{ и } f'(x)>0 \text{ за } x \in (-2; 1).$$

Лесно определяме $f_{\min}=f(-2)=0,4$; $f_{\max}=f(1)=1$. Този начин задължително изисква да получим $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$, т.е. функцията притежава хоризонтална асимптота $y = \dfrac{1}{2}$. Функцията има следната графика:



Тъй като по условие $x \neq 1$, изследването показва, че $0,4 \leq f(x) < 1$ и $f(x)$ може да бъде косинус на остър ъгъл за всяко реално $x \neq 1$.

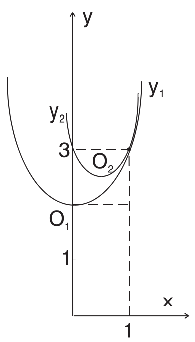
Трети начин: Означаваме $u = \dfrac{x^2+2}{2x^2-2x+3}$, $2x^2 - 2x + 3 \neq 0$ за всяко реално x. Тогава $2ux^2 - 2ux + 3u = x^2 + 2$ или още $(2u-1)\,x^2 - 2ux + 3u - 2 = 0$. Това е едно квадратно уравнение спрямо x. Според условието x е реално и дискриминантата $D_1 = u^2 - (2u-1)(3u-2) = u^2 - 6u^2 + 7u - 2 = -5u^2 + 7u - 2$ трябва да е по-голяма или равна на нула, т.е. $-5u^2 + 7u - 2 \geq 0$. Решението на последното неравенство е $0,4 \leq u \leq 1$. Ясно е, че при $x = 1 \to u = 1$, но по условие $x \neq 1$. Следователно отдясно интервалът трябва да бъде отворен т.е.$0,4 \leq u < 1$. Тези граници показват, че u може да бъде стойност на $\cos\alpha$, където α е остър ъгъл, за всяко реално $x \neq 1$.

Четвърти начин: $\dfrac{x^2+2}{2x^2-2x+3} = \dfrac{x^2+2}{x^2+2+(x-1)^2}$. Този вид показва, че дробта е винаги положителна и по-малка от единица, като равенство с единицата се достига при $x = 1$, но по условие $x \neq 1$. След преработката се вижда още, че знаменателят не се анулира за никое реално x.

Пети начин: Означаваме $y_1 = x^2+2$, $y_2 = 2x^2-2x+3$ и начертаваме графиките на y_1 и y_2 върху една обща координатна система. За целта предварително преработваме

$$y_2 = 2x^2 - 2x + 3 = 2x^2 - 2x + 2 - 1 = 2\left(x^2 - x + 1\right) + 1 =$$

$$= 2\left(x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}.$$



От този вид на y_2 се вижда, че върха O_2 на тази парабола има координати $(0,5; 2,5)$, т.е. той е изместен надясно от координатното начало на половин единица. Върхът O_1 на параболата y_1 има координати $(0; 2)$, а коефициентите пред x^2 са съответно $a_1 = 1$; $a_2 = 2$ и $a_1 < a_2$. От свойствата на квадратната функция е известно, че параболата y_2 е разположена над параболата y_1 и двете параболи имат обща точка при $x = 1$. От казаното погоре следва (виж чертежа), че за всяко реално $x \neq 1$, $0 < \dfrac{y_1}{y_2} < 1$, т.е. $\dfrac{y_1}{y_2}$ може да бъде косинус на остър ъгъл.

Задача 3 (1992г.). В равнобедрения триъгълник ABC $(AC = BC)$ с ъгъл $C < 60^0$ е прекарана ъглополовящата на ъгъл BAC, която пресича бедрото BC в точка L. От точката L е издигнат перпендикуляр към тази ъглополовяща до пресичането му с правата AB в точка K. Да се намери лицето на триъгълника ABC, ако $AB = a,\ BK = b,\ (a > b)$.

Решение на задача 3.

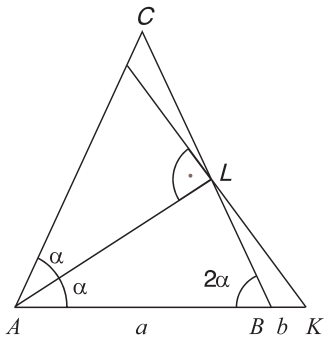
Първи начин: В триъгълник ABC означаваме $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 2\alpha$ и $AC = BC = x$. Тогава ъглополовящата $AL = \dfrac{2ax\cos\alpha}{a+x}$. Но от правоъгълния триъгълник AKL, $AL = (a+b)\cos\alpha$. Приравняваме десните страни на тези две равенства и получаваме уравнението $(a+b)\cos\alpha = \dfrac{2ax\cos\alpha}{a+x}$, $\cos\alpha \neq 0$, откъдето определяме $x = \dfrac{a(a+b)}{a-b}$. Тогава $\cos 2\alpha = \dfrac{a}{2x} = \dfrac{a-b}{2(a+b)}$ и

$$\sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \sqrt{1-\frac{(a-b)^2}{4(a+b)^2}} = \frac{1}{2(a+b)}\sqrt{(a+3b)(3a+b)}$$

и търсеното лице

$$S = \frac{ax\sin 2\alpha}{2} = \frac{a.a(a+b)}{2(a-b)2(a+b)}\sqrt{(a+3b)(3a+b)},$$

т.е. $S = \dfrac{a^2}{4(a-b)}\sqrt{(a+3b)(3a+b)}$.



При този начин за решаване на задачата за неизвестни избрахме една линейна и една ъглова величини. При съставяне на уравнението ъгловата величина отпадна и като го решихме, определихме неизвестната линейна величина, която в случая е бедрото на равнобедрения триъгълник. При следващия начин ще получим уравнение спрямо неизвестната ъглова величина. В зависимост от това каква тригонометрична функция на тази ъглова величина участва в уравнението, се получават и различните варианти при този начин.

Втори начин: Прилагаме синусова теорема за триъгълник ALC:

$$\frac{LC}{\sin\alpha} = \frac{AL}{\sin(180^0-4\alpha)} \rightarrow LC = \frac{AL\sin\alpha}{\sin 4\alpha}.$$

От триъгълник AKL имаме $AL = AK\cos\alpha = (a+b)\cos\alpha$. Заместваме и получаваме $LC = \dfrac{a+b}{4\cos 2\alpha}$. Но от свойството на ъглополовящата имаме $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$ или

$$\frac{BL}{LC}+1 = \frac{AB}{AC}+1 \quad \rightarrow \frac{BL+LC}{LC} = \frac{AB+AC}{AC},\ \text{т.е.}\ \ LC = \frac{AC.BC}{AB+AC} = \frac{AC^2}{AB+AC}.$$

От правоъгълния триъгълник CHB определяме $AC = \dfrac{a}{2\cos 2\alpha}$ и за LC получаваме $LC = \dfrac{a^2}{4\cos^2 2\alpha\left(a+\dfrac{a}{2\cos 2\alpha}\right)} = \dfrac{a}{2\cos 2\alpha(1+2\cos 2\alpha)}$. Приравняваме двата получени израза за LC и получаваме уравнение спрямо $\cos 2\alpha$, т.е.

$$\frac{a}{2(1+2\cos 2\alpha)\cos 2\alpha} = \frac{a+b}{2.2\cos 2\alpha}, \ \ \cos 2\alpha \neq 0.$$

$\cos 2\alpha = \dfrac{a-b}{2(a+b)}$. Вече лесно определяме $AC = \dfrac{a}{2\cos 2\alpha} = \dfrac{a(a+b)}{a-b}$ и пресмятаме лицето както при първия начин.

Втори вариант на втори начин: Прилагаме синусова теорема за триъгълник ALB: $\dfrac{AB}{\sin(180^0-3\alpha)} = \dfrac{AL}{\sin 2\alpha} \to AB\sin 2\alpha = AL\sin 3\alpha$.

От триъгълник AKL, $AL = AK\cos\alpha = (a+b)\cos\alpha$ или

$$a.2\sin\alpha\cos\alpha = (a+b)\cos\alpha\sin 3\alpha, \ \ \cos\alpha \neq 0 \to$$

$$\frac{2a}{a+b}\sin\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha, \ \sin\alpha \neq 0 \to$$

$$\frac{2a}{a+b} = 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \to \cos^2\alpha = \frac{3a+b}{4(a+b)}$$

Тогава $\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{3a+b}{4(a+b)} = \dfrac{a+3b}{4(a+b)}$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{(a+3b)(3a+b)}}{2(a+b)}$. Нататък лицето може да пресметнем както преди.

Трети вариант на втори начин: Прилагаме синусова теорема за триъгълник BKL:

$$\frac{BK}{\sin BLK} = \frac{LK}{\sin(180^0-2\alpha)} \to \frac{b}{\sin(3\alpha-90^0)} = \frac{(a+b)\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \to$$

$$\frac{b}{-\cos 3\alpha} = \frac{(a+b)\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \ \sin\alpha \neq 0.$$

Получихме уравнението $2b\cos\alpha + (a+b)\cos 3\alpha = 0$, т.е.

$$2b\cos\alpha + (a+b)(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = 0,$$

което се разлага на два множителя:

1-ви: $\cos\alpha = 0, \ \alpha \neq 90^0$ не е решение.

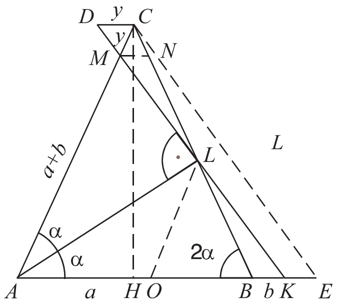
2-ри: $\cos^2\alpha \ = \dfrac{b+3\alpha}{4(a+b)} \to \sin^2\alpha \ = \dfrac{a+3b}{4(a+b)}$.

Нататък продължаваме като при втория вариант.

Този втори начин е приложение на тригонометрията в планиметрията и в частност на синусова теорема. Нейното приложение за различни триъгълници води до различни тригонометрични уравнения. Много е писано за подходящ избор на неизвестните величини и подходящи допълнителни построения при решаването на задачи. Да видим как всичко това се прилага в следващия начин.

Трети начин: Нека $KL \cap CA = M$. Построяваме $CE \| LK$ и $CE \cap AB = E$ и още $CD \| AB$, като $CD \cap KM = D$. Означаваме $KE = CD = CM = y$. Триъгълник CMD

е равнобедрен! (защо?). От свойството на ъглополовящата AL имаме $\dfrac{a+b+y}{a} = \dfrac{CL}{LB}$, а от подобието на триъгълниците CDL и BKL следва $\dfrac{y}{b} = \dfrac{CL}{LB}$ или след като приравним десните страни $\dfrac{a+b+y}{a} = \dfrac{y}{b}$. Оттук определяме $y = \dfrac{b(a+b)}{a-b}$. По условие $a > b$! Тогава $AC = a+b+y = \dfrac{a(a+b)}{a-b}$. Прилагаме Питагорова теорема за триъгълника AHC и пресмятаме



$CH = \sqrt{AC^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{a^2(a+b)^2}{(a-b)^2} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2(a-b)}\sqrt{(a+3b)(3a+b)}$. Тогава търсеното лице е $S = \dfrac{AB.CH}{2} = \dfrac{a^2}{4(a-b)}\sqrt{(a+3b)(3a+b)}$.

Четвърти начин: На чертежа построяваме $MN \| AB$, $N \in BC$. Щом AL е ъглополовяща в равнобедрения триъгълник AKM, то тя разполовява основата му KM, т.е. $ML = LK$. Разглеждаме еднаквите триъгълници MNL и BKL ($ML = LK$, $\sphericalangle NML = \sphericalangle BLK$, като връхни и $\sphericalangle NML = \sphericalangle BKL$, като вътрешни кръстни ъгли). От това следва, че $MN = BK = b$. От подобието на триъгълниците MNC и ABC имаме $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CM}{MN}$, т.е. $\dfrac{AC}{a} = \dfrac{AC-a-b}{b}$ и оттук директно определяме $AC = \dfrac{a\,(a+b)}{a-b}$. Нататък лицето изчисляваме като в предходния начин.

Пети начин: Нека O е средата на хипотенузата на правоъгълния триъгълник AKL. Тогава медианата $OL = \dfrac{a+b}{2}$. В триъгълник AOL, $AO = OL$ (свойство на медианата към хипотенузата) и оттук $\sphericalangle ALO = \sphericalangle OAL$. Тъй като AL е ъглополовяща, $\sphericalangle OAL = \sphericalangle LAC$. Следователно $\sphericalangle ALO = \sphericalangle LAC$ т.е. $OL \| AC$. Оттук следва подобие на триъгълниците ABC и OBL или $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{OL}{OB} \to AC = \dfrac{a\,(a+b)}{a-b}$, тъй като $OB = OK - BK = \dfrac{a+b}{2} - b = \dfrac{a-b}{2}$. По-нататък лицето се намира, като в третия начин.

Задача 1 (1994г.). Да се реши уравнението: $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + 1 - 2\sin^2 2x = 0$.

Решение на задача 1. *Първи начин:* Допустима е всяка стойност на неизвестното. С помощта на формулите $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ и $1 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ преработваме даденото уравнение до вида: $1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 4x\right) + \cos 4x = 0 \to 1 + \sin 4x + \cos 4x = 0$ или

$$\sin 4x + \cos 4x = -1. \tag{1}$$

Умножаваме двете страни с $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и получаваме:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin 4x+\sin\frac{\pi}{4}\cos 4x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}\right),\qquad \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}\right).$$

Оттук следва $4x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, където k е произволно цяло число, т.е. $k\in\mathbb{Z}$.

Тогава: 1-во: $4x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}=\frac{\pi}{8}(-1+4k)$

2-ро: $4x=-\pi+2k\pi$, т.е. $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(-1+2k)$.

Втори начин: Уравнение (2) преработваме така:

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos 4x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 4x=\cos\ \left(\pm\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\cos\ \left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\ \left(\pm\frac{3\pi}{4}\right)\to 4x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi,$$

където $k\in\mathbb{Z}$. Оттук отново:

1-во: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$,

2-ро: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$.

Трети начин: Уравнение (1) преработваме така: $2\sin 2x\cos 2x+2\cos^2 2x=0$, разлагаме на множители до вида: $2\cos 2x\,(\sin 2x+\cos 2x)=0$. Оттук отново следват двата случая:

1-ви: $cos 2x=0\to 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\to x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$,

2-ри: $\cos 2x+\sin 2x=0\to \operatorname{tg}2x=-1$.

Явно $\cos 2x\neq 0$ и $2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\to x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$.

Четвърти начин: С формулите $\sin 4x=\dfrac{2\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}$, $\cos 4x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}$ заместваме в уравнението (1), т.е.

$$1+\frac{2\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}+\frac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}=0,$$

$$1+\overset{2}{\operatorname{tg}}2x+2\operatorname{tg}2x+1-\overset{2}{\operatorname{tg}}2x=0\to\operatorname{tg}2x=-1\ \to\ 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\to x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}.$$

Проверяваме още дали $x=\frac{\pi}{4}$ е решение на даденото уравнение: $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{\pi}{2}=0$, $2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1-2\sin^2\frac{\pi}{2}=0$ или $2.\frac{1}{2}+1-2.1=0$. Следователно: да, решение е и $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$.

Това бяха най-често срещаните начини за решаване на това тригонометрично уравнение сред кандидаткурсантските работи. Какви грешки най-често допускаха някои кандидати? Объркваха дименсиите градуси и радиани, разделяха двете страни на уравнението с $\cos 2x$, което както е известно води до загуба на решения. Ще коментираме специално следния

Пети начин: Повдигаме двете страни на уравнението (1) в квадрат и получаваме $\sin 8x=0$, т.е. $x=\frac{k\pi}{8}$; $k\in Z$. Обаче това са стойностите на x, които са решения на следните две уравнения:

$$\sin 4x + \cos 4x = 1 \qquad \text{и} \qquad \sin 4x + \cos 4x = -1.$$

Нататък се оказа, че не е по силите на кандидатите да отделят истинските корени от чуждите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Н. Найденов. Приемните изпити по математика във ВВМУ „Н.Й. Вапцаров“ 1991-1995г. – идеи, методи, резултати, Варна, 1995

Милен Найденов Найденов
ул. „Сан Стефано“ 2, вх. Б
9000 Варна

THREE PROBLEMS WITH FIVE SOLUTIONS EACH

Milen N. Naydenov

This paper contains various solutions of three problems put on the entrance examinations in mathematics at the Naval Academy "'N.J. Vaptsarov"' in Varna. Thus we share our experience accumulated during many years of entrance examinations. Some of the proposed solutions can be offered for out-of-class exercises in mathematics at the secondary school.