МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

РАЗГЛЕЖДАНЕ НА ТЕМАТА „СХОДИМОСТ НА СИМВОЛИ В КОИТО УЧАСТВАТ БЕЗБРОЙ МНОГО ОПЕРАЦИИ“ В ИЗВЪНКЛАСНИТЕ ФОРМИ НА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА

Симеон Станев Първулов

В настоящата работа е показан един подход за разглеждане на темата „Сходимост на символи в които участват безброй много операции“ в извънкласните форми на работа по математика.

Една от основните задачи на обучението по математика в средното училище е не само усвояване от учениците на определен кръг от знания, но и възпитаване у тях на подходи, както за творческото приложение на тези знания в различни ситуации, така и за усвояване на нови знания. В изследванията на много психолози и педагози се посочва, че един от начините за успешно решаване на тази задача е осъществяването на подходяща взаимовръзка между класните и извънкласните форми на работа по математика. Съществен принос в разработката на теорията за осъществяване на взаимна връзка между посочените форми на работа имат педагозите Ю. К. Бабански, И. Я. Лернер, М. Н. Скатин, Б. П. Есипов, В. Э. Тамарин, И. Кадыров и др. В [1] И. Кадыров посочва, някои от изискванията към осъществяването на подходяща взаимна връзка.

В настоящата работа е показан един подход за осъществяване на взаимна връзка между класните и извънкласните форми на работа по схемата урок – извънкласни форми на работа, след изучаване на темата „Сума на безкрайно малка геометрична прогресия.“

В извънкласните форми на работа, след актуализиране на знанията получени в клас може да се стигне до следните определения.

Определение 1. Ако $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ е безкрайна числова редица, то символът от вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \tag{1}$$

се нарича безкрайна сума.

Определение 2. Редицата

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \dots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{2}$$

се нарича n-та частична сума на (1).

Определение 3. Ако редицата (2) е сходяща, то символът (1) се нарича сходящ.

В този случай числото $l = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ се нарича стойност на (1). Ако редицата (2) е разходяща то (1) се нарича разходящ.

Затвърждаването на това определение може да се осъществи със задачи от вида:

Задача 1. *Да се изследват за сходимост посочените безкрайни суми и да се намерят стойностите на онези от тях, които са сходящи:*

а) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n.(n+1)} + \cdots$

б) $\dfrac{3}{1^2.2^2} + \dfrac{5}{2^2.3^2} + \dfrac{7}{3^2.4^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2.(n+1)^2} + \cdots,$

в) $\ln\dfrac{2}{1} + \ln\dfrac{3}{2} + \ln\dfrac{4}{3} + \cdots + \ln\dfrac{n+1}{n} + \cdots,$

г) $\dfrac{1^2}{2} + \dfrac{2^2}{4} + \dfrac{3^2}{8} + \cdots + \dfrac{n^2}{2^n} + \cdots$

Решение: а) От това, че за всяко естествено k е вярно тъждеството $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, следва, че $s_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, от където следва, че безкрайната сума е сходяща и нейната стойност е равна на 1.

б) От това, че за всяко естествено n е в сила $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ получаваме, че $s_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$, откъдето следва, че сумата е сходяща и нейната стойност е равна на 1.

в) $s_n = \ln\dfrac{2}{1} + \ln\dfrac{3}{2} + \ln\dfrac{4}{3} + \cdots + \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1)$ и понеже $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, то безкрайната сума е разходяща.

След това може да се постави на учениците задачата да изкажат определения аналогични на определенията (1), (2) и (3), като заменят операцията събиране с операцията умножение. По този начин се стига до следните определения.

Определение 4. Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е безкрайна числова редица, всички членове на която са различни от нула, то символът

$$a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \tag{3}$$

се нарича безкрайно произведение.

Определение 5. Редицата

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_1a_2,\ \ldots, b_n = a_1a_2\ldots a_n, \ldots \tag{4}$$

се нарича n-то частично произведение на (4).

Определение 6. Ако редицата (4) е сходяща и границата ѝ е различна от нула, то безкрайното произведение се нарича сходящо.

В този случай числото $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ се нарича стойност на безкрайното произведение (3).

Безкрайното произведение (3) е разходящо, когато не е сходящо, т.е. когато редицата (4) е разходяща или е сходяща с граница нула.

Действието на тези определения може да се осъществи с примери от вида:

Задача 2. *Да се изследват за сходимост посочените безкрайни произведения и да се намерят стойностите на онези от тях, които са сходящи:*

а) $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dots$;

б) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\dots$;

в) $\left(1-\dfrac{2}{2.3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3.4}\right)\dots\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right)\dots$;

Решение: а) $b_n=\dfrac{3.4.4.\dots(n+1)}{2.3.4.\dots n)}=\dfrac{n+1}{2}$. Понеже $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, то безкрайното произведение е разходящо.

б) $b_n=\dfrac{2.3^2.4^2\dots(n+1)^2.n.(n+1)}{2^2.3^2.4^2\dots(n-1)^2n^2}=\dfrac{n+1}{2n}$, от където следва, че безкрайното произведение е сходящо и неговата стойност е равна на $\dfrac{1}{2}$.

в) Понеже за всяко естествено $k>1$ е в сила равенството $1-\dfrac{2}{k(k+1)}=\dfrac{(k-2)(k+1)}{k(k+1)}$, то $b_n=\dfrac{1.4.2.5.3.6.\dots(n-2)(n+1)(n-1)(n+2)}{2.3.3.4.4.5\dots(n-1)n^2(n+1)}=\dfrac{n+2}{3n}$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{3}$, от където следва, че безкрайното произведение е сходящо и неговата стойност е равна на $\dfrac{1}{3}$.

Ако в символът (1) се замени операцията събиране с операцията коренуване и редицата $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ има неотрицателни членове, то се получава символът

$$\sqrt{a_1+\sqrt[3]{a_2+\sqrt[4]{a_3+\dots+\sqrt[n]{a_{n-1}+\cdots}}}} \tag{5}$$

Тогава от определение (3) получаваме аналогичното

Определение 7. Ако редицата

$$b_1=\sqrt{a_1},\ b_1=\sqrt{a_1+\sqrt[3]{a_2}},\dots,\ b_n=\sqrt{a_1+\sqrt[3]{a_2+\dots+\sqrt[n]{a_{n-1}+\cdots}}} \tag{6}$$

е сходяща, то символът (5) се нарича сходящ и границата на тази редица се нарича стойност на символа (5).

Ако редицата (6) е разходяща, то символът (5) е разходящ.

Затвърждаването на това определение може да се осъществи със задачи от вида:

Задача 3. *Да се изследват за сходимост символите:*

а) $\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots\sqrt[n]{n+\cdots}}}}$;

б) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\sqrt{x+\cdots}}}}$;

Решение: а) Понеже за всяко естествено $n>1$ е в сила неравенството $\sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{n+\sqrt[n+1]{n+1}}$, то $b_n<b_{n+1}$, следователно редицата с общ член $\{b_n\}$) е растяща. Остава да докажем, че тя е ограничена. Понеже неравенството $\sqrt[k]{k+2}<2$ е еквивалентно на неравенството $2^k > k+2$ при $k > 2$, което се доказва лесно с метода на математическата индукция, получаваме, че $b_n < \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[n-2]{n-2+\sqrt[n-1]{n-1+2}}}} < \cdots < \sqrt{2+\sqrt[3]{5}}$. Следователно за всяко $n > 2$, $0 < b_n < \sqrt{2+\sqrt[3]{5}}$, от теоремата на Вайерщрас следва, че редицата е сходяща. Тогава от определение (7) следва, че символът е сходящ.

б) Понеже за всяко $x > 0$ са в сила неравенствата $\sqrt{x} < \sqrt{x+\sqrt{x}} < \cdots < \sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}$, то редицата е растяща. От $b_n = \sqrt{x+b_{n-1}}$ получаваме, че за всяко n е в сила $b_n^2 - b_n - x < 0 \iff 0 < b_n < \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Следователно редицата с общ член b_n е сходяща за всяко $x > 0$, т.е. даденият символ е сходящ.

Задача 4. *Да се пресметне стойността на символа*

$$\sqrt{4+\sqrt{4^2+\sqrt{4^4+\cdots\sqrt{4^{2^{n-1}\cdots}}}}}.$$

Решение: От задача 3 б следва, че символът $\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\cdots}}}$ е сходящ и неговата стойност е равна на границата на редицата определена от рекурентното уравнение $c_n = \sqrt{1+c_{n-1}}$. След граничен преход в това уравнение получаваме, че границата на тази редица е равна на $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тогава от равенството $b_n = 2c_n$ получаваме, че даденият символ е сходящ и неговата стойност е $+\sqrt{5}$.

Задача 5. *Да се реши уравнението* $\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x+\cdots}}} = 5$*,* $x > 0$.

Решение: Както в задача 4 получаваме, че символът от лявата страна на уравнението е сходящ за всяко положително x и неговата стойност е $\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Следователно даденото уравнение е еквивалентно на $\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2} = 5 \iff x = 20$.

Задача 6. *Да се сравнят стойностите на символите* $\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots\sqrt[n]{n\ldots}}}}$ *и* $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\cdots}}}$.

Решение: От задача 5 следва, че вторият символ е сходящ и неговата стойност е 2. От решението на задача 3 а следва, че първият символ е сходящ и неговата стойност е $\leq \sqrt{2+\sqrt[5]{5}} < 2$. Следователно $\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4}+\cdots+\sqrt[n]{n\ldots}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\cdots}}}$.

За самостоятелна работа могат да се дадат задачи от вида:

Задача 7. *Да се сравнят символите*

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\cdots}}} \quad \text{и} \quad \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots\sqrt{n+\cdots}}}}.$$

Задача 8. *Да се изследват за сходимост посочените символи и да се намерят стойностите на онези от тях, които са сходящи:*

а) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x\ldots}}}}$;

б) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}}$.

Задача 9. *Да се реши уравнението* $\ln(x+(\ln x+\cdots(\ln x+\cdots)))=2$, $x>2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Кадыров. Взаимосвязь внеклассных и факультативных занятый по математике. М., 1983.

Симеон Станев Първулов
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
Факултет по математика, информатика и икономика
9712 Шумен

THE THEME "CONVERGENCE OF SYMBOLS WITH UNLIMITED NUMBER OF OPERATIONS" IN THE OUT-OF-SCHOOL FORMS OF EDUCATION IN MATHEMATICS

Simeon Stanev Parvulov

In ths paper we demonstrate an approach for studied the theme "Convergence of symbols with unlimited number of operations" in the out-of-school forms of education in mathematics.