МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

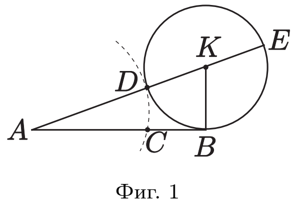
ЕДНО ИНТЕРЕСНО ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЗАДАЧАТА ЗА „ЗЛАТНОТО СЕЧЕНИЕ“

Василиос Салтас

През древногръцкия период на математиката вниманието се насочва към задачите за построение. Тези задачи и теоремите се разглеждат почти като равностойни. През този период задачите имат обучаващ характер. Според Платон „... науката се изучава изцяло заради познанието...“ . От това мнение обаче се отклоняват някои математици. Те използват резултатите от няколко задачи за практически цели. Една такава задача е задачата за „златното сечение“. Общоизвестно е, че едно понятие може да се разбере по-добре след като се мине през етапите, които древните са минали, избягвайки техните грешки. По този начин историята може да помогне на съвременното обучение по математика. Поради тази причина почти всеки път е необходимо да се обръща внимание и върху историята на математиката.

1. Поява на задачата за „златното сечение“ в древна Гърция. Една от задачите във втората книга на „Елементи“ на Евклид (3 в. пр.н.е.) е тази за деление на отсечка в дадено отношение и в частност т. нар. задача за „златно сечение“ [4]. Един от първите математици, които са се занимавали с тази задача, е Евдокс (5–4 в. пр.н.е.). Задачата е: *Да се раздели дадена отсечка на две неравни части така, че дължината на цялата отсечка да се отнася към дължината на по-голямата ѝ част така, както дължината на по-голямата част се отнася към дължината на по-малката част* [1].

Тази задача фактически е една построителна задача, която има пряка връзка с естетиката и е използвана от древните гърци в архитектурата. Достатъчно е да се каже, че емблемата на питагоровата школа („пет алфа“) е построена чрез тази задача.



Фиг. 1

Нека да видим решението, което предлага Евклид в „Елементи“ [5]. За опростяване на изложението ще използваме съвременната символика (фиг. 1): „Нека е дадена отсечката AB. През B прекарваме перпендикулярна на AB отсечка BK, чиято дължина е равна на половината от дължината на AB. С център K и радиус KB построяваме окръжност k, която пресича AK в точката D и вземаме $AC = AD$. Тогава AB се разделя от C на две неравни части. Нека E е другата пресечна точка на окръжността k с правата AK. От двете страни на равенството $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{AD}$ изваждаме 1 и получаваме $\dfrac{AE - AB}{AB} = \dfrac{AB - AD}{AD}$. При $AB = DE$ и $AD = AC$ намираме $\dfrac{AE - DE}{AB} = \dfrac{AB - AC}{AC}$ или $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AC}$. Като вземем реципрочните на тези частни, получаваме $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$, което трябваше да се докаже.“

Ако положим $AB = a$, то $\dfrac{DE}{2} = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$ и $AC = AD = AK - KD$. Тогава $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ и освен това $KD = \dfrac{a}{2}$. Получаваме, че $AC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Отношението $\Phi = \dfrac{2}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$, когато се прилага в изкуството, създава чувството за красота. Буквата „Ф“ идва от името на древногръцкия скулптор Фидий (4-3 в. пр.н.е.), който е използвал това отношение в своите работи.

2. Използване на задачата за „златното сечение“ в Древна Гърция. Ще продължим с една хипотеза за разположението на някои археологически паметници в Гърция и по-точно тези от областта Атико-Виотия.

Според Платон [6] след катастрофите на Дефлалиона (около 9 500 г. пр.н.е.) гърците, които били на о-в Атлантис и оцелели, слезли от планините в равнините и започнали отново да почитат боговете. Започнали да строят градове и храмове по законите на геометрията. До днес не са намерени преки аргументи, подкрепящи това твърдение, но хипотезата е твърде вероятна.

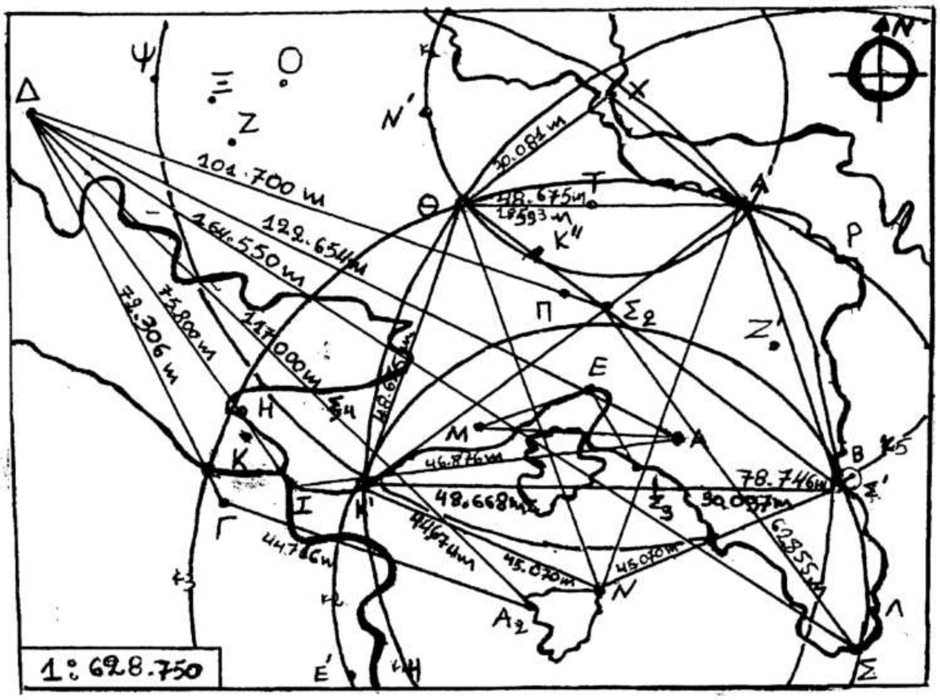
Нека отсечката AB има дължина 1. Да означим по-голямата ѝ част AC с M, а с m, по-малката ѝ част CB (фиг. 1). Тогава получаваме

$$\frac{1}{M} = \frac{M}{m} \iff \frac{M}{m} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \iff \frac{M}{m} \approx 1{,}618.$$

Счита се, че с частното 1,618 и със „златното сечение“ са свързани разстоянията между много храмове, градове и паметници в древна Гърция. На картата на фиг. 2 е показано точно това. С различни гръцки букви са означени градовете и съществуващите археологически паметници.

На картата се забелязва следното:

а) Храмовете и градовете Θ, X, A', Σ', N, K се намират във върховете на шестоъгълника $\Theta\mathrm{XA}'\Sigma'\mathrm{NK}$.



Фиг. 2

б) Храмовете X, A′, Θ се намират във върховете на равнобедрен триъгълник, който е част от ΘXA′Σ′NK. Основата на този триъгълник е $\Theta\mathrm{A}' = M + m$ и $\Theta\mathrm{T} = m$, $\mathrm{TA}' = \Theta\mathrm{X} = \mathrm{XA}' = M$.

в) Същото важи и за равнобедрения триъгълник KNΣ′.

г) Четириъгълникът ΘA′Σ′K е равнобедрен трапец и е част от правилния петоъгълник ΘA′Σ′NK (или от KΘXA′Σ′). Неговите диагонали ΘΣ′ и $\mathrm{A}'K$ се пресичат в точка, която ги дели според „златното сечение“. По-точно $\mathrm{K}\Sigma_2 = M$ и $\Sigma_2\mathrm{A}' = m$ (или $\Sigma'\Sigma_2 = M$, $\Sigma_2\Theta = m$).

д) На картата са начертани няколко окръжности:

- k_1 с център X и радиус XΘ (или XA′)
- k_2 с център N и радиус NK′ (или NΣ′)
- k_3 с център N и радиус NΘ (или NA′)
- k_4 с център Σ′ и радиус Σ′Θ (или Σ′K′)
- k_5 с център X и радиус XΣ′ (или XK′)

е) На картата са нанесени разстоянията между градовете и храмовете според съвременните измервания. Като се използват тези разстояния и имайки предвид „златното сечение“, достигаме до извода, че древните са познавали методи за намиране на тези разстояния, които ние все още не познаваме. По-точно забелязваме, че:

1) $\dfrac{\mathrm{K}\Sigma'}{\Theta\mathrm{A}'} = \dfrac{78{,}746}{48{,}675} = 1{,}617$ т. е. $\dfrac{78,746}{48{,}675} = \dfrac{48,675}{78,746 - 48,675} \iff \dfrac{78,746}{48{,}675} = \dfrac{48,675}{30,071}$.

Но $\dfrac{\Theta\mathrm{A}'}{\Theta\mathrm{X}} = \dfrac{48,675}{30,081} = 1{,}618$ и тогава $\dfrac{\mathrm{K}\Sigma'}{\Theta\mathrm{A}'} \approx \dfrac{\Theta\mathrm{A}'}{\Theta\mathrm{X}}$.

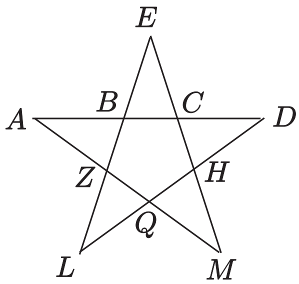
Аналогично получаваме и останалите приблизителни равенства:

2) $\dfrac{\Theta\mathrm{A}'}{\Theta\mathrm{X}} \approx \dfrac{\Theta\mathrm{X}}{\Theta\mathrm{T}}$; 3) $\dfrac{\mathrm{K}\Sigma'}{\mathrm{K}\Theta} \approx \dfrac{\mathrm{K}\Theta}{\mathrm{KX}}$; 4) $\dfrac{\Delta\mathrm{A}_2}{\Delta\Gamma} \approx \dfrac{\Delta\Gamma}{\Gamma\mathrm{A}_2}$; 5) $\dfrac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{I}} \approx \dfrac{\Delta\mathrm{I}}{\mathrm{IA}}$;

6) $\dfrac{\Delta\Sigma}{\Delta\Sigma_2} \approx \dfrac{\Delta\Sigma_2}{\Sigma\Sigma_2}$; 7) $\dfrac{\Delta\mathrm{A}_2}{\Delta\Sigma_4} \approx \dfrac{\Delta\Sigma_4}{\Sigma_4\mathrm{A}_2}$; 8) $\dfrac{\mathrm{K}\Sigma'}{\mathrm{K}\Sigma_3} \approx \dfrac{\mathrm{K}\Sigma_3}{\Sigma_3\Sigma'}$.

Трябва де се каже, че в местата Σ_2, Σ_3 и Σ_4 все още не се знае дали има археологически паметници, на се очаква такива да бъдат намерени. От картата се вижда още, че измерванията имат за начало град Делфи (Δ), нещо, което се основава на мнението на древните гърци, че този град е център на Космоса (познат по онова време).

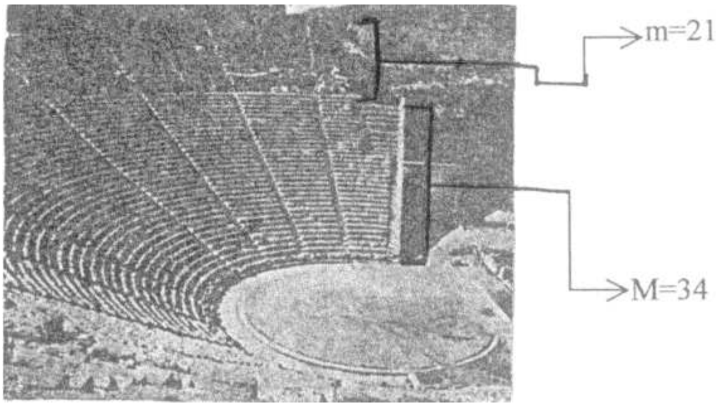
Освен това отношението $\dfrac{M}{m}$ е пряко свързано и с тайния символ на питагоровата школа, т. нар. „пет алфа“ (фиг. 3), където $\dfrac{AD}{AC} = 1{,}618$, $\dfrac{AC}{AB} = 1{,}618$ и т. н.



Фиг. 3

Накрая ще отбележим, че „златното сечение“ е било използвано и при построяване на древногръцките театри. Например в театъра Епидавър (строен през 4 в. пр.н.е.) редовете са разделени на две групи (фиг. 4) съответно с 34 и 21 реда, а $\dfrac{34}{21} \approx 1{,}618$.

3. Върху ролята на задачата за „златното сечение“ в съвременното обучение по математика. Като имаме предвид, че задачата за „златното сечение“ е една задача за построение, тя трябва да се решава като се следва схемата, създадена още в Древна Гърция, а именно: анализ, построение (синтез), доказателство-изследване.



Фиг. 4

Като математическа задача задачата за „златното сечение“ изпълнява същите функции в училищния курс по геометрия както и другите задачи. Към тях може да се добави още и следното:

а) Новото при тези задачи са дейностите анализ, синтез и доказателство-изследване и по-точно, че учениците се упражняват с още една дейност — чертането. При решаване на тези задачи се провеждат разсъждения, а чертожната дейност се извършва само на базата на тези разсъждения. Това означава, че при решаването им има дедуктивни разсъждения не само в анализа и доказателството-изследването, а и в синтеза.

б) При решаването на тази задача се използват свойства на геометричните обекти, а това осигурява тяхното осмисляне (например използва се теоремата за степен на точка относно окръжност).

в) Чрез решението на тази задача се построяват общи точки на фигури (например точката B), а когато се прави това се упражнява един основен евристичен метод. Затова Рене Декарт пише: „За да намерим един обект, най-напред намираме едно множество, на което той принадлежи, и след това намираме друго множество, на което принадлежи същият обект, а накрая — сечението на двете множества“.

г) В тази задача се използват и знания от алгебрата, нещо, което освен че интегрира знания от алгебра със знания от геометрия, осигурява възможност за изграждане на алгебрична техника в нови ситуации.

Чрез избиране на подходящи задачи, отговарящи на дидактическите принципи за научност, познавателност и системност, учениците развиват полезни качества. За целта обаче задачите трябва да се решават там, където им е мястото, съобразени с текущия материал, т. е. след съответната теория.

Имайки предвид това, след теоремите, свързани със степен на точка относно окръжност, се предлагат за решаване задачи, пряко свързани с новата теория, а след това няколко построителни задачи като следната:

Задача 1. *Да се построят две отсечки x и y такива, че:*

$$\text{а)}\left|\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ xy=\beta^2 \end{array}\right., \qquad \text{б)}\left|\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ xy=\beta^2 \end{array}\right.,$$

където α и β са дадени отсечки.

Фактически с тези задачи се иска да се решат геометрично някакви системи уравнения. След тях е целесъобразно да се реши задачата за „златното сечение“, а след това е добре да се изложат горепосочените исторически факти, свързвайки по този начин математиката с една съвсем различна наука — историята. Практиката показва, че по този начин интересът на учениците за решаване на математически задачи се увеличава.

След задачата за „златното сечение“ е добре да се решат и задачи като следните:

Задача 2. *Да се построят корените на уравнението:*
а) $x^2-\alpha x+\beta^2$,
б) $x^2+\alpha x-\beta^2$,
в) $x^2-\alpha x-\beta^2$,
където α и β са дадени отсечки.

Задача 3. *Да се построят отсечките x и y, ако $\dfrac{x}{y}=\dfrac{m}{n}$ и $xy=\alpha^2$, където m, n и α са дадени отсечки.*

Задача 4. *Да се реши геометрично биквадратното уравнение $x^4+m^2x^2-n^4=0$, където m и n са дадени отсечки.*

4. Заключение. От направените проучвания могат да се направят някои важни изводи за мястото, ролята и значението на задачата за „златното сечение“ в обучението по математика.

В училищните курсове по геометрия тази задача не е само носител на математическа информация. Чрез нея знанията за фигурите и техните свойства придобиват „материален израз“.

Чрез нея се осъществява връзката както между теми в геометрията, така и между геометрията и алгебрата.

С тази задача учениците могат да преоткриват нови (за тях) геометрични знания, което е особено полезно за обучението.

Чрез решаването ѝ се развива логическото мислене и особено умението да се прави анализ, след като пред ученика ясно са представени общото и различното в анализа и синтеза.

Най-сетне, чрез решаването на задачата за „златното сечение“ може да бъдат затвърдявани нови знания в урока по начин, различен от обикновения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ив. Ганчев, За математическите задачи, София, 1967.
[2] В. Салтас, *Геометричните построения и задачите за построение в древна Гърция*, Доклади на 27-мата пролетна конференция на СМБ, Плевен, 1998.
[3] В. Салтас, Задачите за построение в древногръцката математика и в обучението по математика в съвременното гръцко училище, Дипломна работа, София, 1995.
[4] *Σταμάτης*, Ε. Ε*υκλείδου* Γ*εωμετρία*, *Στοιχεία*, Β*ιβλία* 1, 2, 3, 4, Α*θήνα*, 1967.
[5] *Σταμάτης*, Ε. Ε*υκλείδου* Γ*εωμετρία*, Α*θήνα*, 1975.
[6] *Σταμάτης*, Ε. Ε*λληνικά* Μ*αθηματικά*, Α*θήνα*, 1976.

Vasileios Saltas
Kaviron 2, Piri
32200 Thiva, Greece
E-mail: `saltasvs@compulink.gr`

AN ANOTHER RENDERING OF THE "GOLDEN MEAN"

Vasileios Saltas

It is generally accepted that following the stages that the ancients went through in order to comprehend a concept one can both avoid making the same mistakes and also understand better that concept. For this reason, when studying a mathematical concept it is better that one traces back its historical evolution, explanation, proof etc. Exercises of construction constituted subject of great interest during the ancient period in Greece. Both the exercises and theorems are equivalent. According to Plato, science is studied in order to broaden our knowledge. However, some mathematicians of the same period differentiated from this view. In particular, they use exercises and their results for practical purpose. A typical example of such exercises is the "golden mean" exercise.