МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

НЯКОЛКО ОБОБЩЕНИЯ НА ЕДНА ПЛАНИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА

Анна Вълкова Томова, Милен Найденов Найденов

Направени са обобщения на една планиметрична задача от писмения конкурсен изпит по математика за кандидат-курсанти във ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“ на 03.08.1998 г. както в равнината, така и в пространството. Описаното в условието на задачата геометрично построение се повтаря неограничен брой пъти, като в равнината са построени множества от криви с безкрайна дължина, които заграждат площи с крайни лица, за които са получени различни формули. В пространството се разглежда аналог на зададената планиметрична задача, посочена е разликата във формулите в сравнение с равнинния случай и отново геометричното построение се повтаря неограничен брой пъти. Построени са неограничен брой сфери, които ограждат множество с краен обем и безкрайно лице на повърхнината му.

1. Въведение.

На писмения конкурсен изпит по математика за кандидатите за курсанти във ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“ на 03.08.1998 г. бе зададена следната планиметрична задача (фиг. 1):

З а д а ч а 1. В триъгълника ABC е вписана окръжност с радиус r и са построени трите ѝ допирателни, успоредни на страните на дадения триъгълник. Тези допирателни отсичат от дадения триъгълник три по-малки триъгълника, във всеки от които е вписана окръжност.

а) Пресметнете сумата от дължините на четирите окръжности.

б) Нека R е радиусът на описаната около триъгълника ABC окръжност, p е полупериметърът му, а S^* е лицето на шестоъгълника, описан около окръжността с радиус r и получен след отсичането на трите по-малки триъгълника. Докажете формулата:

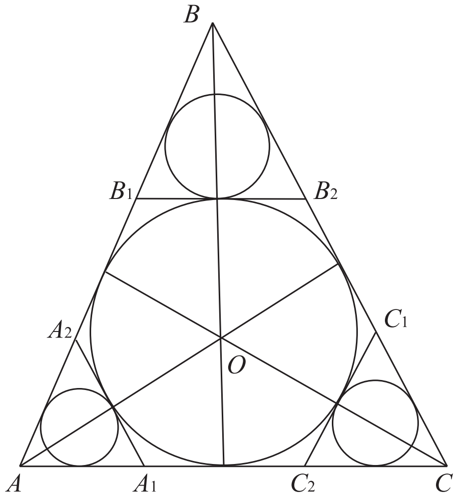
$$S^* = \frac{2r^2}{p}(r+4R).$$

Отговорът на подточка а) е $4\pi r$, като в хода на доказателството се получава формулата:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r \tag{1}$$

където $r_i, \quad i = 1, 2, 3$ са радиусите на вписаните окръжности в по-малките триъгълници (фиг. 1).

На VI международна математическа олимпиада през 1964 г. в Москва бе зададена предложената от Югославия планиметрична за дача със същото условие, но се иска от състезателите да се намери сумата от лицата на всичките четири кръга [3, стр. 30].



фиг. 1

Отговорът на тази задача е [3, стр. 96]:

(2) $$S + S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\pi(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}$$

където a, b, c са страните на триъгълника ABC, S е лицето му, а S_i са лицата на по-малките кръгове, $i = 1, 2, 3$. Преди да пристъпим към обобщението на тази задача в равнината, ще изведем няколко формули, с чиято помощ ще получим друг вид на формула (2). Очевидно триъгълник AA_1A_2 е подобен на триъгълник ABC с коефициент на подобие $k_1 = 1 - \dfrac{a}{p} = \dfrac{r_1}{r}$; триъгълник BB_1B_2 е подобен на триъгълник ABC с коефициент на подобие $k_2 = 1 - \dfrac{b}{p} = \dfrac{r_2}{r}$; триъгълник CC_1C_2 е подобен на триъгълник ABC с с коефициент на подобие $k_3 = 1 - \dfrac{c}{p} = \dfrac{r_3}{r}$. Тогава:

(3) $$k_1 + k_2 + k_3 = 1,$$

откъдето непосредствено следва формула (1). Намираме: $\dfrac{a}{p} = \dfrac{2}{1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}}$. От синусовата теорема за триъгълника ABC следва: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, където с α, β, γ са означени ъглите на триъгълника ABC. Така получаваме следните формули за коефициентите на подобие k_1, k_2, k_3:

$$k_1 = \frac{\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$$

$$k_2 = \frac{\sin\gamma + \sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$$

$$k_3 = \frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$$

Въвеждаме означението: $D(\alpha,\beta,\gamma) = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Тогава:

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{r}\right)^2 = \frac{(r_1+r_2+r_3)^2 - 2(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)}{r^2}$$

Като вземем предвид формула (1), получаваме:

$$0 < D(\alpha,\beta,\gamma) < 1, \quad \alpha+\beta+\gamma = \pi \tag{4}$$

Така получаваме следната формула за сумата от лицата на 4 кръга:

$$S + S_1 + S_2 + S_3 = \pi r^2\big(1 + D(\alpha,\beta,\gamma)\big) \tag{5}$$

която е по-удобна от гледна точка на обобщаване на задачата в сравнение с формула (2).

2. Обобщение на задача 1 в равнината.

В триъгълниците AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 вписваме нови девет окръжности по същия начин, както това е направено за триъгълника ABC. С r_1', r_2' и r_3' означаваме радиусите на вписаните в триъгълника AA_1A_2 три окръжности, с r_1'', r_2'' и r_3'' – радиусите на вписаните в триъгълника BB_1B_2 три окръжности, с r_1''', r_2''' и r_3''' – радиусите на вписаните в триъгълника CC_1C_2 три окръжности. По описания по-горе начин получаваме формулите:

$$\begin{aligned}
&r_1' + r_2' + r_3' = r_1,\\
&r_1'' + r_2'' + r_3'' = r_2,\\
&r_1''' + r_2''' + r_3''' = r_3,\\
&(r_1')^2 + (r_2')^2 + (r_3')^2 = r_1^2 D(\alpha,\beta,\gamma),\\
&(r_1'')^2 + (r_2'')^2 + (r_3'')^2 = r_2^2 D(\alpha,\beta,\gamma),\\
&(r_1''')^2 + (r_2''')^2 + (r_3''')^2 = r_3^2 D(\alpha,\beta,\gamma).
\end{aligned} \tag{6}$$

тъй като коефициентите на подобие са същите, което следва от геометричното построение или може да се докаже непосредствено. Сумата от лицата на получените по този начин общо 13 кръга ще бъде

$$\pi r^2 \left(1 + D(\alpha,\beta,\gamma) + \big(D(\alpha,\beta,\gamma)\big)^2\right).$$

След n-кратно повторение на процеса сумата от лицата на всичките $\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ кръга ще бъде

$$\pi r^2 \sum_{k=0}^{n} \big(D(\alpha,\beta,\gamma)\big)^k.$$

Когато $n \to \infty$, т. е. процесът продължи неограничено, от формули (4), (5) и (6) следва формулата:

$$S + \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi r^2}{1 - D(\alpha,\beta,\gamma)}$$

Абсолютно аналогично получаваме формула за сумата от лицата на всички отсечени по посочения начин подобни триъгълници при $n \to \infty$ и тя е $\dfrac{S_{ABC}}{1 - D(\alpha, \beta, \gamma)}$. Сумата от лицата на всички описани около посочените по-горе отсечени триъгълници кръгове при $n \to \infty$ ще бъде $\dfrac{\pi R^2}{1 - D(\alpha, \beta, \gamma)}$ където R е радиусът на описаната около триъгълника ABC окръжност. Сумата от лицата на всички подобни на посочения в условието на задача 1 шестоъгълник при $n \to \infty$ ще бъде $\dfrac{S^*}{1 - D(\alpha, \beta, \gamma)}$. Да намерим сумата от дължините на всички окръжности при n-кратно повторение на геометричното построение. С помощта на метода на пълната математическа индукция не е трудно да се докаже, че тя е $2\pi r(1 + n)$. Следователно при $n \to \infty$ получаваме фигура с безкрайна дължина, която загражда крайно лице. Аналогичен резултат се получава за сумата от периметрите на всички отсечени по посочения начин триъгълници. Въпреки това можем да посочим фигура, образувана от неограничен брой окръжности, която ще има крайна дължина. Това е фигурата, представена от всички окръжности, чиито центрове се намират само върху ъглополовящите OA, OB, OC, където O е центърът на вписаната в триъгълника ABC окръжност. Тя има дължина

$$2\pi r \left(1 + \frac{k_1}{1 - k_1} + \frac{k_2}{1 - k_2} + \frac{k_3}{1 - k_3}\right)$$

или

$$2\pi r \left(\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{p}{c} - 2\right).$$

Подобна фигура с крайна дължина се образува от неограничения брой отсечени триъгълници с върхове точките A, B, C.

З а б е л е ж к а. В случая на равностранен триъгълник ABC когато множеството от вписаните окръжности е свързано, можем да направим сравнение с т. н. Аполониево запълване с кръгове [1, стр. 144-147], но това надхвърля целите, които се преследват с написването на тази статия.

3. Обобщение на задача 1 в пространството.

З а д а ч а 2. В тетраедъра $ABCD$ е вписана сфера с център O и са прекарани четирите ѝ допирателни равнини, успоредни на стените на тетраедъра. Тези равнини отсичат от дадения тетраедър $ABCD$ четири по-малки тетраедъра, във всеки от които е вписана сфера. Пресметнете сумата от радиусите на всичките пет сфери.

Р е ш е н и е н а з а д а ч а 2.

С r означаваме радиуса на вписаната в тетраедъра сфера, с $H_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ – височините на тетраедъра съответно през върховете му A, B, C, D. С $k_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ означаваме коефициентите на подобие между отсечените тетраедри съответно при върховете A, B, C, D и тетраедъра $ABCD$. Очевидно $k_i = 1 - \dfrac{2r}{H_i},\ i = 1, 2, 3, 4$. Като се вземе предвид формула (1) [2, стр. 94] и задача 10 [2, стр. 95], се получава резултатът:

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2 \tag{7}$$

От формула (7) веднага следва, че сумата от радиусите на всичките пет сфери е $3r$.

4. Обобщение на задача 2 в пространството.

Продължаваме описаното в условието на задача 2 геометрично построение неограничен брой пъти, като в първоначално отсечени те тетраедри прекарваме допирателни равнини към вписаните сфери, успоредни на стените на тетраедрите и отново вписваме сфери в новополучените отсечени тетраедри и т. н. Ако с $V_i,\ i=1,2,3,4$ означим обемите на отсечените според условието на задача 4 тетраедри, то очевидно $k_i^3=\dfrac{V_i}{V},\ i=1,2,3,4$, където V е обемът на тетраедъра ABCD. Тогава обемът на полученото множество от неограничен брой вписани по описания начин сфери ще бъде

$$\frac{4}{3}\pi r^3\frac{V}{V-(V_1+V_2+V_3+V_4)}.$$

Да разгледаме сумата от повърхнините на всички вписани по посочения начин сфери. Не е трудно да се покаже, че тя е равна на безкрайната сума

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2\right)^n 4\pi r^2.$$

Сега разглеждаме сумата $k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2$. Като използуваме (7) и резултата от [2, стр. 95]

$$\frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}+\frac{1}{H_2}+\frac{1}{H_4}=\frac{1}{r},$$

получаваме:

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2=4r^2\left(\frac{1}{H_1^2}+\frac{1}{H_2^2}+\frac{1}{H_3^2}+\frac{1}{H_4^2}\right)$$

Добре известен е резултатът [2, стр. 62]:

$$\frac{1}{H_1^2}+\frac{1}{H_2^2}+\frac{1}{H_3^2}+\frac{1}{H_4^2}=\frac{s_1^2+s_2^2+s_3^2+s_4^2}{9^2V^2}$$

където с $s_i,\ i=1,2,3,4$ са означени лицата съответно на четите стени на тетраедъра. От друга страна $V=\dfrac{(s_1+s_2+s_3+s_4)r}{3}$.

Следователно получаваме формулата:

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2=4\frac{s_1^2+s_2^2+s_3^2+s_4^2}{(s_1+s_2+s_3+s_4)^2} \tag{8}$$

От (8) следва неравенството, което се проверява непосредствено:

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2\geq 1 \tag{9}$$

Не е трудно да се докаже твърдението, че в (9) се достига равенство тогава и само тогава, когато тетраедърът е правилен (т. е. $k_1=k_2=k_3=k_4=0.5$). Формула (9) доказва, че фигурата, образувана от всички по-горе разгледани сфери има безкрайна повърхнина, но загражда краен обем. Все пак можем да посочим безброй много сфери, вписани в отсечените тетраедри, чиято сума от повърхнините е крайно число. Така например сумата от лицата на всички сфери с центрове върху отсечките OA, OB, OC, OD е равна на

$$4\pi r^2\left(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{k_i}{1-k_i}\right).$$

По подобен начин може да се разгледа въпросът за сумата от обемите на всички отсечени тетраедри, който ще бъде

$$\frac{V^2}{V-(V_1+V_2+V_3+V_4)},$$

а сумата от пълните им повърхнини е неограничена. Сумата от пълните повърхнини на отсечените подобни тетраедри при върховете A, B, C и D е крайно число:

$$S\left(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{k_i^2}{1-k_i^2}\right),$$

където с S е означена пълната повърхнина на тетраедъра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Манделброт Б. , Фракталните обекти. Форма, случайност и размерност, София, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, 1996.

[2] Паскалев Г. , Чобанов И. , Забележителни точки в тетраедъра, Държавно издателство „Народна просвета“, София, 1988.

[3] Морозова Е. А. , Петраков И. С. , Скворцов В. А. , Международные математические олимпиады, Москва, „Просвещение“, 1976.

доц. д-р Анна Вълкова Томова,
кат. „Математика и физика“,
ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, гр. Варна
9000, бул. „Сливница“ 8,
дом. тел. 22-98-70,

гл. ас. Милен Найденов Найденов,
кат. „Математика и физика“,
ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, гр. Варна
9000, ул. „Сан Стефано“ 2, вх. „Б“,
дом. тел. 63-31-03.

GENERALIZATION OF A PLANIMETRIC PROBLEM

Anna Valkova Tomova, Milen Naydenov Naydenov

This paper deals with a generalization of a planimetric problem put on the entrance examination in mathematics at the Naval Academy “N. J. Vaptzarov” in Varna wich took plase on August 3, 1998. A similar stereometrical problem is studied too.