*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999*
*MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999*
*Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of*
*the Union of Bulgarian Mathematicians*
*Montana, April 5–8, 1999*

# ЕДИН ОПИТ ЗА ТЕСТОВА ПОДГОТОВКА И ТЕСТОВО ИЗПИТВАНЕ

**Иван Трендафилов**

В статията е описан един експеримент за тестова подготовка и тестови проверки по линейна алгебра и аналитична геометрия със студенти от Техническия университет — София.

Ще разгледаме един експеримент, проведен със студентите от 2 произволно избрани (административни) групи от поток от първокурсници от Техническия университет – София. Останалите групи от същия поток (повече от 2) се подготвят и изпитват по стандартния начин.

Всеки от студентите, с които се провежда експеримента, получава 20 учебни теста, предназначени за самостоятелна работа — по 4 теста от всяка от темите:

I. Комплексни числа и полиноми.

II. Матрици, детерминанти, системи линейни уравнения.

III. Вектори. Уравнения на права в равнината. Криви линии от втора степен.

IV. Векторно и смесено произведение. Прави и равнини в пространството. Повърхнини от втора степен.

V. Линейни пространства и линейни оператори. Евклидови пространства. Квадратични форми.

Четирите теста от всяка от темите са с нарастващо ниво на сложност.

Най-лекото ниво A проверява доколко читателят е успял да се запознае с основните дефиниции и теореми от учебния материал и дали е фамилиярен с основните задачи.

Второто ниво B проверява дали студентът е навлязъл в проблемите от дадената тема. Част от задачите тук са от типа и нивото на трудност на контролните работи, които се провеждат с останалите студенти, а другите задачи са по-леки.

Третото ниво C проверява в каква степен студентът е вникнал в дълбочината на темата. Тук не се срещат леки задачи, а известна част от задачите има изпитен характер.

Последното ниво D проверява доколко цялостно е усвоена дадената тема. Част от задачите тук са изпитни, а друга част — такива, които кореспондират с проблеми от други теми.

Всеки тест съдържа по 7 задачи, като в теста задачите по принцип *не са подредени* по нарастваща трудност. Задачите в теста са структурирани по естествената поява на отделните моменти (подтеми) на лекциите и може да се случи най-лесната, за повечето студенти задача, да е последната.

Препоръчителното време за решаване на тест от ниво A е 30 минути, на тест от ниво B — 45 мин, от ниво C — 60 мин и от ниво D — 75 мин.

В тестовете няма задачи, чието решение изисква дълги пресмятания. Срещат се обаче задачи (в тестовете от ниво D), в които, ако не се избере правилен път на решение, се губи значителна част от времето.

Тестовете не съдържат задачи, които проверяват досетливост или някаква осос-бена интуиция — целта е задълбочено вникване в учебния материал.

След всяка задача (или въпрос) от тестовете има по 4 отговора: а), б), в) и г). Предполага се, че студентът, който не е допуснал някоя от типичните (за задачите от този тип) грешки, лесно ще отхвърли трите грешни отговора.

За всяка задача от теста се получават 0, 1, 2, 3, 4 или 5 точки в зависимост от това доколко посоченият отговор е „близо до истината". Сумата от точките за задачите от теста представлява количествен израз на степента на усвояване на учебния материал по дадената тема (виж прпоръките в края на статията).

Студентите от групите, с които се експериментира, получават периодично (5 пъти в семестъра) по 4 учебни теста (по един от всяко ниво) с които работят самостоя-телно. Заедно с тях те получават кратки решения на задачите от тестовете и начина за оценяване.

Следва материала от първата тема от учебни тестове.

## КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА И ПОЛИНОМИ

### **ТЕСТ A** (Времетраене 30 мин.)

1. Да се пресметне $\dfrac{(1+i)(1+2i)(1+3i)}{(1-i)(1-i/2)(1-i/3)}$.

а) $-6$; б) $6$; в) $-6i$; г) $6i$.

2. Да се пресметне $(\sqrt{3}-i)^{12}$.

а) $4096$; б) $-4096i$; в) $64$; г) $-64$.

3. Кое от следните числа е измежду стойностите на $\sqrt[3]{1}$ ?

а) $-1$; б) $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Сумата от коефициентите на полинома

$$P(x)=(x^3-x^2+x+3)(x^3+x^2+x-3)$$

е равна на:

а) $0$; б) $1$; в) $2$; г) $3$.

5. На кой от следните полиноми $P(x)=(x+1)^{10}-x^{10}-2x-1$ се дели без остатък?

а) $x^2-1$; б) $x^3-3x^2+2x$; в) $x^3+3x^2+2x$; г) $2x^3+3x^2+x$.

6. Рационалните нули на полинома $P(x)=6x^4+x^3+20x^2-19x+4$ са:

а) $x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-3$; б) $x_1=2, x_2=-2, x_3=4, x_4=-\dfrac{1}{2}$;

в) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{6}$; г) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

7. Кой от изразите представлява разлагането на рационалната функция $\dfrac{1}{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}$, където $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha \neq \beta$, на сума от елементарни дроби с реални коефициенти?

а) $\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{\alpha}{x-\alpha}-\dfrac{\beta}{x-\beta}\right)$; б) $\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{x-\alpha}-\dfrac{1}{x-\beta}\right)$;
в) $\dfrac{1}{\beta-\alpha}\left(\dfrac{1}{x-\alpha}-\dfrac{1}{x-\beta}\right)$; г) $\dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{\alpha}{x-\alpha}-\dfrac{\beta}{x-\beta}\right)$.

## **ТЕСТ В** (Времетраене 45 мин.)

1. Модулът на комплексното число $1+i$ е равен на:

а) 0; б) 1; в) $\sqrt{2}$; г) $\pm\sqrt{2}$.

2. За кои естествени числа $n$ е в сила равенството $i^n = \dfrac{1}{i^n}$ ?

а) Когато $n$ е четно число; б) Когато $n$ е нечетно число; в) Когато $n$ се дели без остатък на 4; г) Когато $n = 4k+2$, където $k$ е естествено число.

3. Дадено е комплексното число $z = a + ib$. Определяме модула $r$ на $z$ от равенството $r = \sqrt{a^2+b^2}$ и аргумента $\varphi$ на $z$ от равенството $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$. Тогава числото, записано в тригонометричен вид е $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Посочете верният отговор:

а) По описаният начин може да се намери тригонометричния вид на всяко комплексно число;

б) По описаният начин може да се намери тригонометричния вид само на комплексните числа $z = a+ib$, чиято реална част $a$ е различна от нула;

в) Описаният начин не определя еднозначно тригонометричния вид на $z$, тъй като от $a^2+b^2 = r^2$ следва $r = \pm\sqrt{a^2+b^2}$ и модулът на $z$ не е точно определен;

г) Описаният начин не определя еднозначно тригонометричния вид на $z$, тъй като от $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$ не може да се определи кой е аргументът на $z$.

4. Полиномът с реални коефициенти от възможно най-ниска степен, на който числата $-1, -i$ и $1+i$ са нули е:

а) $x^3+x^2+x+1$; б) $x^4+2x^3+x^2-2x$; в) $x^5-x^4+x^3+x^2+2$; г) $x^5-x^4-x^3-x^2+2$.

5. Остатъкът от делението на полинома $P(x) = x^{25}+x^6+2x^5+3x^4+x^2+x+1$ с полинома $Q(x) = x^2+1$ е равен на:

а) 0; б) $4x+2$; в) $2x+1$; г) $x^2-1$.

6. В коя от следните групи от числа няма такива, които не могат да бъдат нули на полинома $P(x) = x^5+5x^4+4x^3+20x^2+3x+15$ поради вида на неговите коефициенти?

а) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5$; б) $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$ ; в) $-1, -3, -5, -15$ ; г) $1, 3, 5, 15$.

7. Като се има предвид разлагането на рационалната функция $\dfrac{1}{x^2-1}$ като сума

от елементарни дроби следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}\right)$ е равна на:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{11}{24}$; г) $\frac{21}{40}$.

**ТЕСТ С** (Времетраене 60 мин.)

1. За кои комплексни числа $z$ е в сила равенството $|z|^2 = z^2$ ?

а) За $z = 0$; б) За $z = 1$; в) За всяко реално $z$; г) За всяко комплексно $z$.

2. Нека $n > 1$ е фиксирано естествено число, $z_1$ и $z_2$ са комплексни числа. Кога между $n$ – те числа $\sqrt[n]{z_1}$ и $n$ – те числа $\sqrt[n]{z_2}$ има точно едно общо?

а) Никога; б) Когато $z_1 = z_2$ ; в) Когато $|z_1| = |z_2|$ и $n$ нечетно число; г) Когато $|z_1| = |z_2|$ и $n$ четно число.

3. Съществува ли полином $P(x)$ от трета степен, за който $P(1) = P(2) = P(3) = 0$?

а) Не съществува; б) $P(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$; в) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; г) Съществуват безбройно много полиноми, които удовлетворяват условието.

4. В коя от следните групи от числа няма такива, които не могат да бъдат нули на полинома $P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 15x - 18$ поради вида на неговите коефициенти?

а) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{18}$; б) $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{1}{18}$;

в) $\pm18, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{9}{2}$; г) $1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\frac{1}{9}$.

5. За кои стойности на параметрите $a$ и $b$ числото 2 е двукратна нула на полинома $2x^5 - 12x^4 + 25x^3 - 22x^2 + ax + b$?

а) За никои стойности на $a$ и $b$; б) За всички реални $a$ и $b$; в) За $a = 12$; г) За $a = 12$ и $b = -8$.

6. Кое от твърденията за полиномите $P(x) = x^6 + \alpha x^5 + \beta$ и $Q(x) = x^7 - \alpha x^6 + \beta$, където $\alpha$ и $\beta$ са произволни числа, е вярно?

а) Сумата от нулите на $P(x)$ е равна на сумата от нулите на $Q(x)$;

б) Сумата от квадратите на нулите на $P(x)$ е равна на сумата от квадратите на нулите на $Q(x)$;

в) За всяка стойност на $\alpha$ уравненията $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$ имат общ корен;

г) Произведението от нулите на $P(x)$ е равно на произведението от нулите на $Q(x)$.

7. За $P(x) = a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$, където $a \neq b \neq c \neq a$, да се провери $P(x)$ на кой от следните полиноми е равен:

а) $x^2 - (x-a)(x-b)(x-c)$; б) $x^2 + (x-a)(x-b)(x-c)$; в) $x^2$;

г) $x^2\left[\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\right]$.

## ТЕСТ D (Времетраене 75 мин.)

1. Колко корена има уравнението $|z| = |z-1|$?

а) Един и той е $z = \frac{1}{2}$; б) Два; в) Три; г) Безбройно много.

2. Записваме веригата от равенства

$$-1 = i.i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

От тях верни равенства са:

а) Първото; б) Първото и второто; в) Първото и петото; г) Първото, второто, четвъртото и петото.

3. За корените на уравнението $x^4 - x^2 + 6x - 2 = 0$ може да се твърди, че:

а) Всичките са реални числа; б) Всичките са комплексни числа, които не са реални; в) Само два от тях са реални и те са $x_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{2}$; г) Само два от тях са реални и те са $x_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3}-1}}{2}$.

4. Да се намери полином $P(x) = ax^{n-1} + bx^n + 1$, за който числото 1 е $n$ - кратна нула.

а) $P(x) = x^2 - 2x + 1$ ; б) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ; в) Съществуват безбройно много полиноми с това свойство, за които $a = n$ и $b = -n-1$; г) Не съществува полином $P(x) = ax^{n-1} + bx^n + 1$ с това свойство.

5. Нека $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ и $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ са полиноми с реални коефициенти всичките нули на които са цели числа. Кое от следните твърдения е вярно:

а) $a_n = a_0$; б) $P(x)$ е симетричен полином, т.е. $a_{n-i} = a_i$ за $i = 0, 1, \cdots, n$; в) $P(x) = Q(x)$; г) $P^2(x) = Q^2(x)$;

6. Като се използва разлагането над $\mathbf{C}$ на рационалната функция $F(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ като сума от елементарни дроби да се пресметне стойността на $F^{(100)}(x)$ (стотната производна на функцията $F(x)$).

а) 0; б) 100!; в) 101!; г) $-(101!)$;

7. Да се пресметне $\dfrac{1}{1-\alpha_1} + \cdots + \dfrac{1}{1-\alpha_6}$, където $\alpha_1, \cdots, \alpha_6$ са нулите на полинома $P(x) = x^7 - 1$, които са различни от 1.

а) $\frac{1}{7}$; б) 3; в) $\frac{3}{7}$; г) $\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}$;

## КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ТЕСТОВЕТЕ И ОЦЕНКИ

### ТЕСТ A

1. Тъй като за всяко реално $a$ е в сила $\dfrac{1+ia}{1-i/a} = ai$, то изразът е равен на $i.2i.3i = -6i$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 5 | 1 |

2. От $|\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$ и $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin\varphi = -\dfrac{1}{2}$ следва $\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ и $(\sqrt{3}-i)^{12} = 2^{12}\left(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right) = 4096$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 2 | 1 | 0 |

3. Представяме числото 1 в тригонометричен вид: $1 = \cos 0 + i\sin 0$. Тогава $\sqrt[3]{1} = \cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$, където $k = 0, 1, 2$. Следователно стойностите на $\sqrt[3]{1}$ са комплексните числа $z_1 = 1, z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $z_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 5 |

4. За всеки полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ сумата от коефициентите му е равна на $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = P(1)$. В дадения случай $P(1) = 4.0 = 0$

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 0 | 0 | 0 |

5. Даден полином дели без остатък $P(x)$ точно тогава, когато нулите му са нули и на $P(x)$. Нулите на полинома $2x^3 + 3x^2 + x$ са $x_1 = 0, x_2 = -1$ и $x_3 = -\dfrac{1}{2}$. Понеже $P(0) = P(-1) = P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ следва, че $P(x)$ се дели без остатък на $2x^3 + 3x^2 + x$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 2 | 5 |

6. Понеже $6x^4+x^3+20x^2-19x+4 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)(6x^2+6x+24)$, а полиномът $6x^2 + 6x + 24$ няма реални нули, следва че рационалните нули на $P(x)$ са $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_1 = \dfrac{1}{3}$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 5 |

7. От разлагането $\dfrac{1}{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}=\dfrac{A}{x-\alpha}+\dfrac{B}{x-\beta}$ след сравняване на коефициентите намираме $A=-B=\dfrac{1}{\alpha-\beta}$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 1 | 0 |

## ТЕСТ В

1. В сила е $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 1 |

2. Даденото равенство е еквивалентно на $i^{2n}=1$ или $(-1)^n=1$, откъдето следва, че $n$ е четно число.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 2 | 2 |

3. Тъй като периодът на функцията тангенс е $\pi$, формулата $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$ не определя еднозначно аргумента $\varphi$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 5 |

4. Тук се използва, че ако едно комплексно число е нула на полином с реални коефициенти, то и спрегнатото му е нула на същия полином. Така търсеният полином е $(x+1)(x+i)(x-i)(x-1-i)(x-1+i)=x^5-x^4+x^3+x^2-2$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 2 |

5. От $P(x)=(x^2+1).T(x)+ax+b$ следва $4i+2=P(i)=ai+b$, откъдето $a=4,\ b=2$, т.е. остатъкът е $4x+2$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 0 |

6. Целите нули на полинома са измежду числата $\pm1$, $\pm3$, $\pm5$, $\pm15$. Понеже коефициентите на полинома са положителни, нулите му не могат да бъдат положителни числа.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 5 | 3 |

7. От разлагането $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$ следва $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$, откъдето границата е $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{3}{4}$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 3 | 0 | 0 |

## ТЕСТ C

1. Ако $z = a + ib$ следва, че

$$|z|^2 = z^2 \iff a^2+b^2 = a^2 + 2iab - b^2 \iff \begin{array}{l} a^2+b^2 = a^2-b^2 \\ 2ab = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} b=0 \\ a\in\mathbb{R}. \end{array}$$

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 5 | 1 |

2. Комплексните числа $\sqrt[n]{z_1}$ се изобразяват в комплексната равнина с точки, които са върхове на правилен $n$-ъгълник, вписан в окръжност с радиус $\sqrt[n]{|z_1|}$. Ако $|z_1| = |z_2|$, върховете на двата $n$-ъгълника лежат върху една и съща окръжност и ако те имат един общ връх, всичките им върхове ще са общи. Ако $|z_1| \neq |z_2|$, двата $n$ - ъгълника не могат да имат общ връх, защото върховете им лежат върху концентрични окръжности.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 0 | 1 | 1 |

3. Такива са полиномите $P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3),\ a\in\mathbb{R}$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 3 | 5 |

4. Числата $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{1}{6}, \pm\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{9}{2}, \pm\dfrac{2}{3}$ могат да бъдат нули на полинома $P(x)$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 5 | 1 |

5. Чрез таблицата на Хорнер се намира, че 2 е трикратна нула на $P(x)$ при $a = 12$ и $b = -8$. Ако $(a,b) \neq (12,-8)$, то 2 не е двукратна нула на $P(x)$.

| ОЦЕНКИ | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 0 | 1 | 3 |

6. Ако $\xi_1, \cdots, \xi_6$ са нулите на $P(x)$, а $\eta_1, \cdots, \eta_7$ — нулите на $Q(x)$, то $\sum_{i=1}^{6} \xi_i = -\alpha$, $\sum_{i=1}^{7} \eta_i = \alpha$, като само при $\alpha = 0$ двете суми са равни. Аналогично $\prod_{i=1}^{6} \xi_i = \beta$, $\prod_{i=1}^{7} \eta_i = -\beta$, като само при $\beta = 0$ двете произведения съвпадат. Ако $t$ е обща нула на двата полинома следва $t^7 - (\alpha+1)t^6 - \alpha t^5 = 0$ и понеже $t \neq 0$ получаваме $t^2 - (\alpha+1)t - \alpha = 0$. Тъй като дискриминантата на това квадратно уравнение за някои стойности на $\alpha$ е отрицателна, то следва, че съществува $\alpha$, за което $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$ нямат общ корен.

Тъй като $\sum_{i=1}^{6} \xi_i^2 = \left( \sum_{i=1}^{6} \xi_i \right)^2 - 2 \sum_{i,j=1, i>j}^{6} \xi_i \xi_j = (-\alpha)^2 - 0 \quad = \alpha^2$ и $\sum_{i=1}^{7} \eta_i^2 = \left( \sum_{i=1}^{7} \eta_i \right)^2 - 2 \sum_{i,j=1, i>j}^{7} \eta_i \eta_j = \alpha^2 - 0 = \alpha^2$ следва, че сумата от квадратите на нулите на $P(x)$ е равна на сумата от квадратите на нулите на $Q(x)$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 1 | 2 |

7. Полиномът $P(x)$ е интерполационният полином на Лагранж (от степен 2) на функцията $x^2$ и следователно съвпада с $x^2$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 2 |

## ТЕСТ D

1. Ако $z_0 \in \mathbf{C}$ и $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, комплексните числа $z$, за които $|z - z_0| = a$ се изобразяват в точките, за които разстоянието до точката, образ на $z_0$, е равно на $a$. Ето защо $|z| = |z - 1|$ се удовлетворява от комплексните числа, които са образи на точките от симетралата на отсечката с краища $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 5 |

2. Във веригата равенства

$$-1 = i.i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

първото равенство е вярно. Второто не е вярно, защото $\sqrt{-1} = \pm i$. Аналогично петото равенство не е вярно, защото $\sqrt{1} = \pm 1$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 1 | 0 |

3. Извършваме преобразуванията $x^4 - x^2 + 6x - 2 = x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2 + 6x - 3 = (x^2+1)^2 - 3(x-1)^2 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1 + \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3})$. Корените на квадратния тричлен в първата скоба са комплексни числа. Корените на квадратния тричлен от втората скоба са $x_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 1}}{2}$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 5 |

4. Пресмятаме $P'(x) = (n+1)ax^n + nbx^{n-1}$ и $P''(x) = n(n+1)ax^{n-1} + n(n-1)bx^{n-2}$. Тогава ако 1 е трикратна нула на $P(x)$ е в сила $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, откъдето $a + b + 1 = 0$, $(n+1)a + nb = 0$. Така намираме $a = n$ и $b = -n - 1$. Но тогава $P''(1) = n(n+1) \neq 0$. Следователно числото 1 не може да е $n$ - кратна нула, където $n \geq 3$, на $P(x)$. Ако 1 е двукратна нула на $P(x)$, следва $a = 2$ и $b = -3$. Тогава търсеният полином е $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 1 | 1 |

5. Тук $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^n}Q(x)$. Така, ако едно число е нула на $P(x)$, реципрочното му е нула на $Q(x)$. Тъй като всичките нули на $P(x)$ и $Q(x)$ са цели числа, то те са единствено $\pm 1$. Ако $P(x) = a_0(x-1)^k(x+1)^m$, следва че $Q(x) = (-1)^k a_0(x-1)^k(x+1)^m$, откъдето $P^2(x) = Q^2(x)$. Условието $P(x) = Q(x)$, а също и условието $a_n = a_0$ са в сила само ако $k$ е четно число. Полиномът $P(x)$ не винаги е симетричен, например $P(x) = x^2 - 1$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 5 |

6. От разлагането $\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{x+i}\right)$ следва $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(100)}$

$$= \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(100)} - \left(\frac{1}{x+i}\right)^{(100)}\right] = \frac{1}{2i}(-1)^{100}(100)!\left[\frac{1}{(x-i)^{101}} - \frac{1}{(x+i)^{101}}\right].$$

Тогава $F^{(100)}(x) = (100)!$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 1 |

7. Нека $f(x)$ е полином от степен $n$ и $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ са нулите му, които не са обезателно различни. Тогава за рационалната функция $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ е в сила разлагането $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x - \alpha_i}$. При това, ако числото $\alpha_i$ е $k$ - кратна нула на $f(x)$, тя участва $k$

на брой пъти в горната сума. За произволно число $z \in \mathbf{C}$ следва $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{z-\alpha_i}$.

Ще използваме този резултат за полинома $P(x) = x^6+x^5+\cdots+x+1 = \dfrac{x^7-1}{x-1}$ и числото $m=1$. Тогава, ако $\alpha_1, \cdots, \alpha_6$ са нулите на $P(x)$, следва $\dfrac{1}{1-\alpha_1} + \cdots + \dfrac{1}{1-\alpha_6} = \dfrac{P'(1)}{P(1)} = \dfrac{6+5+\cdots+1}{7} = 3$.

ОЦЕНКИ

| а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 0 |

## ЦЯЛОСТНА ОЦЕНКА И ПРЕПОРЪКИ КЪМ СТУДЕНТИТЕ

След като сте решили някой от тестовете, сумата от точките може да бъде:

а) до 20 точки включително;

б) между 21 и 29 точки включително;

в) между 30 и 35 точки.

Ако сумата от получените точки не е по-голяма от 20, *не се препоръчва* веднага да решавате следващия по трудност тест. Необходимо ще бъде да работите върху теорията, а също и да решите известен брой задачи по разглежданата тема и чак след като добиете нови знания и умения да пристъпите към следващия тест.

Ако сумата от точките е между 21 и 29, преди да започнете работа със следващия по трудност тест ще бъде полезно да решите задачи, подобни на онези 2-3 от теста, в които сте допуснали пропуски.

Ако имате сума над 29 точки без предварителна работа можете да започнете да решавате следващия тест.

Накрая ще разгледаме начина, по който се извършват тестовите проверки със студентите. Провеждат се 5 тестови проверки (средно през 2 седмици), в които се проверяват знанията на студентите по всяка от темите:„ Комплексни числа и полиноми“, „Матрици, детерминанти, системи линейни уравнения“, „Вектори. Уравнения на права в равнината. Криви линии от втора степен“, „Векторно и смесено произведение. Прави и равнини в пространството. Повърхнини от втора степен“, „Линейни пространства и линейни оператори. Евклидови пространства. Квадратични форми“.

На всяка от проверките студентите получават по един тест от ниво на трудност между C и D. Времетраенето на всеки тест е 60 минути. Студентите са разделени на групи така, че подсказването на верен отговор да е затруднено.

## ИЗВОДИ ОТ ТЕСТОВАТА ПРОВЕРКА

1. Максималният брой точки, които може да получи студент за работата си през семестъра е 20 точки (по 10 точки от всяко контролно за студентите, с които не се експериментира, или по 4 точки от всеки от петте теста). Студентите, с които не се провежда експеримент получават средно 12 точки за семестъра, а онези, с които се провеждат тестове — 14 точки. Двете точки разлика могат да се отнесат например

към това, че слабите студенти имат по-голям шанс да уцелят верен отговор в теста, отколкото при традиционното контролно.

2. *За всички студенти изпитът по дисциплината е един и същ: две задачи и два теоретични въпроса*, т.е. окончателната оценка не се получава чрез тестово изпитване. Студентите, с които не е провеждан експеримент, получават средно 37 точки, което съответства на оценка между 3,50 и 4,50. Студентите, с които е провеждано тестово изпитване през семестъра, получават средно 48 точки, което съответства на оценка с единица по-висока от останалите. Този по-добър резултат може да се обясни по следният начин:

— студентите от екпериментални групи имат 5 (а не 2) проверки през семестъра и това ги кара системно да усвояват учебния материал;

— задачите, от които са изградени тестовете, не са „изчислителни“, т.е. такива, каквито студентите предимно решават, когато се подготвят за контролно или изпит. Някои от тези задачи имат теоретичен характер и това несъмнено подготвя по-добре студента за изпита;

— студентът - първокурсник добива навици правилно да разпредели времето си на проверката и да изрази не толкова обемът (количеството) от знания, които притежава, а по-скоро задълбочеността (качеството) на знанията и възможностите си.

Иван Димитров Трендафилов,
Институт по приложна математика и информатика
ТУ - София
София 1000

## AN ATEMPT FOR TEST PREPARATION AND TEST EXAMINATION

**Ivan Trendafilov**

In this paper an experiment is described for test preparation and test cheks in linear algebra and analytic geometry with students from Technical University of Sofia.