МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1999
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1999
Proceedings of Twenty Eighth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Montana, April 5–8, 1999

ЕДИН НАЧИН ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА КОМБИНАТОРНИ ТЪЖДЕСТВА

Слави Цветанов Хараламписв

В работата е разгледан един начин за получаване на някои комбинаторни тъждества. Идеята се състои в това, че елементите на някакво множество се изброяват по няколко различни начина с помощта на различни модели за броене на елементите на множеството, в резултат на което се получават някои комбинаторни тъждества.

Повод за написването на настоящата статия е задача 11 на страница 93 в учебника по алгебра за 10 клас – „Народна Просвета" 1990г.

Задача 1. В шкаф се намират n различни чифта обувки. По случаен начин са изlвадени $2r$ обувки ($2r < n$). В един от случаите измежду извадените обувки има: а) поне един чифт; б) точно един чифт; в) точно два чифта.

Решение: а) Първи начин. Броят на всички възможни начини при които $2n$ на брой обувки се изваждат $2r$ на брой обувки е $\binom{2n}{2r}$. Ако означим чифтовете обувки с $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то броят на начините при които измежду извадените $2r$ на брой обувки няма нито един чифт е $2^{2r}\binom{n}{2r}$, тъй като всяка от тези $2r$ на брой обувки може да бъде извадена от чифтовете $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по два различни начина (лява или дясна), т.е. по 2^{2r} начина, а броят на начините, по които могат да се изберат $2r$ на брой обувки от чифтовете $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (по една от чифт) е $\binom{n}{2r}$. Следователно броят на случаите, при които измежду извадените обувки има поне един чифт е $\binom{2n}{2r} - 2^{2r}\binom{n}{2r}$.

Същият брой можем да пресметнем и така: Втори начин. Нека $d_1, d_2, \ldots, d_n$ е редицата от десните обувки в чифтовете, а $l_1, l_2, \ldots, l_n$ е редицата от съответните им леви обувки, т.е. (d_i, l_i) при $i = 1, 2, \ldots, n$, образуват чифт. От редицата на десните обувки изваждаме k на брой ($k = 0, 1, 2, \ldots, 2r$) десни обувки по $\binom{n}{k}$ начина, а от редицата на левите обувки изваждаме $2r - k$ на брой леви обувки (такива, че нито една от тях да не образува чифт с извадените вече k на брой десни обувки) по $\binom{n-k}{2r-k}$ начина. Следователно броят на начините, при които измежду извадените обувки няма нито един чифт е $\sum_{k=0}^{2r}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-k}$, тогава броят на начините, при които измежду изваденете обувки има поне един чифт е $\binom{2n}{2r}-\sum_{k=0}^{2r}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-k}$.

От тези два различни модела за решаване на задачата получихме формулите

$$\binom{2n}{2r}-\sum_{k=0}^{2r}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-k}=\binom{2n}{2r}-2^{2r}\binom{n}{2r} \text{ или } \sum_{k=0}^{2r}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-k}=2^{2r}\binom{n}{2r}.$$

Да получим формула за броя на начините, при които измежду изваденете $2r$ на брой обувки има точно k на брой чифта $k=1,2,\dots,r$, като използваме първия модел, по който решихме подусловие а). Тъй като k чифта обувки могат да се изберат от n чифта $A_1,A_2,\dots,A_n$ по $\binom{n}{k}$ начина, а оставащите $2r-2k$ обувки се избират по една от $n-k$ на брой чифта A_i по $\binom{n-k}{2r-2k}$ начина, като всяка една от тези $2r-2k$ обувки се избира по два различни начина (лява или дясна) т.е. по 2^{2r-2k} начина. Следователно броят на начините, при които измежду изваденете $2r$ на брой обувки има точно k на брой чифта е

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-2k}2^{2r-2k}.$$

При $k=1$ и $k=2$ получаваме решенията на б) и в). Последният резултат показва, че броят на начините, при които измежду изваденете обувки има поне един чифт е $\sum_{k=1}^{r}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-2k}2^{2r-2k}$, т.е. е сума от изважданията с точно един, два, ..., r чифта обувки. Следователно получихме следните комбинаторни тъждества

$$\binom{2n}{2r}-\sum_{k=0}^{2r}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-k}=\binom{2n}{2r}-2^{2r}\binom{n}{2r}=\sum_{k=1}^{r}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-2k}2^{2r-2k}$$

Да използваме подобна идея при решаването на следните задачи.

Задача 2. Дадени са множествата $A=\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$ и $B=\{b_1,b_2,\dots,b_s\}$. Да се намери броят на начините, по които от елементите на тези множества могат да се изберат общо k елемента.

От редицата $a_1,a_2,\dots,a_r,b_1,b_2,\dots,b_s$ могат да се изберат k-членни ненаредени редици по $\binom{r+s}{k}$ начина. От редицата $a_1,a_2,\dots,a_r$ избираме i члена $i=0,1,\dots,k$ по $\binom{r}{i}$ начина, а от редица $b_1,b_2,\dots,b_s$ избираме $k-i$ члена по $\binom{s}{k-i}$ начина. Така че броят на ненаредените k-членни редици е равен на $\sum_{i=0}^{k}\binom{r}{i}\binom{s}{k-i}$.

Следователно $\sum_{i=0}^{k}\binom{r}{i}\binom{s}{k-i}=\binom{r+s}{k}$. От получената формула при $r=s=k=n$ получаваме комбинаторните тъждества

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{r}.$$

Задача 3. Дадени са буквите $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Да се намери броят на всички думи, съставени от m различни букви от дадените, които съдържат буквата a_1 ($m \le n-1$).

Решение: Нека буквата a_1 стои на k-то място в дума съставена от m букви т.е. $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{k-1 \text{ букви}}\ a_1\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{m-k \text{ букви}}$. Тогава броят на всички такива думи е $\mathrm{V}_{n-1}^{k-1}\mathrm{V}_{n-k}^{m-k}$, тъй като V_{n-1}^{k-1} е броят на начините, по които могат да се изберат буквите предхождащи буквата a_1, а V_{n-k}^{m-k} е броят на начините, по които могат да се изберем буквите след буквата a_1. Броят на всяка дума, съдържащи буквата a_1 е $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\mathrm{V}_{n-1}^{k-1}\mathrm{V}_{n-k}^{m-k}$. От друга страна броят на думите с дължина m, които съдържат буквата a_1 е разлика от всички думи с дължина m (на които броят е V_n^m) и броят на думите с дължина m, които не съдържат буквата a_1 (на които броят е V_{n-1}^m) т.е. е равен на $\mathrm{V}_n^m - \mathrm{V}_{n-1}^m$ Следователно получихме формулата $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\mathrm{V}_{n-1}^{k-1}\mathrm{V}_{n-k}^{m-k} = \mathrm{V}_n^m - \mathrm{V}_{n-1}^m$.

Задача 4. Нека A е множество, съдържащо n елемента. Ако B е k-елементно подмножество на A, а C е m-елементно подмножество на B, да се намери броят на двойките от множества (B, C).

Решение: Очевидно са изпълнени неравенствата $m \le k \le n$.

Първи начин: Множеството C избираме по $\binom{n}{m}$ начина и тъй като $C \subset B$, то от елементите на k-елементното множество B са вече избрани. Тогава броят на начините, по които може да се избере множеството B е равен на броят на начините, по които могат да се изберат $k-m$ елемента измежду $n-m$ елемента при $k = m, m+1, \ldots, n$, т.е. по

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}=\binom{n-m}{0}+\binom{n-m}{1}+\cdots+\binom{n-m}{n-m}=2^{n-m}.$$

Следователно броят на двойките множества (B, C) е равен на $\binom{n}{m}2^{n-m}$.

Втори начин: Множеството B избираме по $\binom{n}{k}$ начина и тъй като $C \subset B$, то множеството C можем да изберем по $\binom{k}{m}$ начина при $k = m, m+1, \ldots, n$. Следователно броят на двойките множества(B, C) е равен на $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

Така че получихме комбинаторната формула $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}2^{n-m}$.

Задача 5. Да се намери броят на редиците $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$, които могат да се изберат от множеството $\{1, 2, \ldots, n)$.

Решение: Числата c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ могат да се изберат от множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ по $\binom{n}{k}$ начина. Броят на редиците можем да пресметнем и така: Нека $c_s = m$, $m = s, s+1, \ldots, n-s$, $s = 1, 2, \ldots, k$, тогава числата $c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}$ избираме от множеството $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ по $\binom{m-1}{s-1}$ начина, а числата $c_{s+1}, c_{s+2}, \ldots, c_k$ избираме от множеството $\{m+1, m+2, \ldots, n\}$ по $\binom{n-m}{k-s}$ начина, следователно броят на търсените редици е $\sum_{m=s}^{n-s} \binom{m-1}{s-1} \binom{n-m}{k-s}$, от където получихме, че $\sum_{m=s}^{n-s} \binom{m-1}{s-1} \binom{n-m}{k-s} = \binom{n}{k}$.

При $s = 1$ получаваме комбинаторната формула $\sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-m}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Задача 6. По колко различни начина от множествата $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $B = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ могат да се изберат $n+1$ елемента, така че точно два от избраните елементи от A да са равни, а останалите $n-1$ да са различни.

Решение: Елементът от A, който се повтаря, може да бъде избран по n начина. Тогава оставащите $n+1-2 = n-1$ елемента избираме от $2n-1$ елемента по $\binom{2n-1}{n-1}$ начина. Тогава търсеният брой в задачата е $n\binom{2n-1}{n-1}$. Търсеният брой пресмятаме и така: От множеството A избираме k елементи $k = 1, 2, \ldots, n$ по $\binom{n}{k}$ начина, като елементът от A, който се повтаря избираме по k начина. Оставащите $n+1-(k+1) = n-k$ елементи избираме от множеството B по $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ начина. Следователно търсеният брой в задачата е равен още на $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2$, откъдето получаваме тъждеството $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$.

Накрая читателят сигурно се досеща и за други комбинаторни формули, доказващи се с вече използваната идея.

ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Запрянов, В. Вакарелов, Б. Димитров. Алгебра, учебник за 10 клас, Просвета, София, 1990.

[2] Д. Риордан. Комбинаторные тождества, Наука, Москва, 1982.

Слави Цветанов Хараламлиев
Враца

A WAY OF GETTING COMBINATORIAL IDENTITIES

Slavi Tsvetanov Charalampiev

A way of getting combinatorial identities kas been considered. The idea consists in the enumerating of the elements of some set in some different ways with the help of different models for counting the elements of the set, as a result of whih some combinatorial identities kave been received.