МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ: ОТ ДРЕВНОСТТА ДО НАШИ ДНИ

Франк Лемпио

Още Евдокс и Архимед използват крайни елементи в т. нар. метод на изчерпването за пресмятане на лица на повърхнини и обеми на тела. Крайните елементи представляват елементарни геометрични обекти, които могат да се опишат напълно чрез краен брой данни.
Във времето между древността и Ренесанса в Европа тези знания са почти забравени. Единствено благодарение на персийско-арабски и италиански математици, както и на влиянието на манастирски училища и църковни настоятелства са запазени и доразвити някои умения за смятане. През Ренесанса изненадващо се появяват художествени произведения, изградени от съставни крайни елементи. Във връзка със своите проекти за напоителни системи, Леонардо да Винчи рисува турболентни течения. Едва четири века по-късно ще се окаже, че такива течения могат да се пресмятат с метода на крайните елементи.
Леонард Ойлер е първият, който използва оптимизация на съставни крайни елементи при решаване на вариационни задачи, а също и на гранични задачи за диференциални уравнения. Повече от два века неговите резултати не се възприемат като изчислителни методи, а като подход за теоретични изследвания и за намиране на явни решения в някои частни случаи.
Едва след появата на електронноизчислителните машини методът на крайните елементи е преоткрит първоначално от инженери, а по-късно доразвит съвместно с математици, за да стане най-продуктивният метод за решаване на частни диференциални уравнения от различни приложни области на естествените и техническите науки.
Настоящата работа е превод от немски език на статията [12].

1. Увод. Този доклад е опит да се проследи идеята за възникване на метода на крайните елементи, смятането с крайни елементи и тяхното приложение през повече от двехилядолетната му научна история.

Изложението следва хронологията на приносите на отделни учени към метода на крайните елементи. В същото време тази хронология ни разкрива и присъщата за всяко развитие закономерност, при която научният прогрес е последван от дълги периоди на застой.

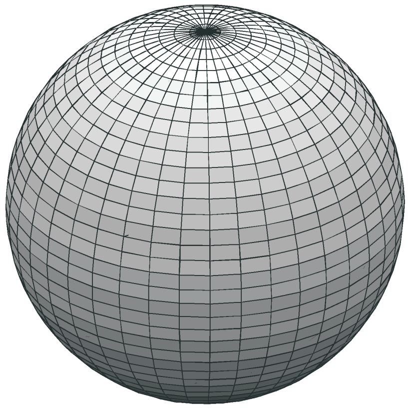
Използваните понятия не са прецизирани математически, а са въведени интуитивно и достъпно с помощта на примери и графики. Този начин на представяне, който не винаги се харесва на един математик, е най-подходящ за кръг от читатели, състоящ се от неспециалисти и нематематици.

Авторът се надява, че по този начин ще бъде пробуден интерес към метода на крайните елементи, ще се разкрие присъщата му математическа елегантност, а чрез приведените примери ще се изясни и огромното му значение за приложенията.

2. Евдокс и Архимед. **Евдокс** е роден през 408 г. пр. н. е. в Книд и умира през 355 г. пр. н. е. в Атина. Той е математик, естественик и философ. Известен е със създаденото от него учение за пропорциите и с метода на изчерпването. Последният означава, че пресмятането на дължини, лица и обеми се извършва чрез покриването на геометричното тяло с краен брой по-прости геометрични форми, чиито мерки са известни.

Като **пример** да разгледаме компютърнографична визуализация на повърхнина на кълбо с помощта на програмния пакет MATLAB (Фигура 1). “Гладкото” изображение на Фигура 1 е получено чрез подходящо оцветяване на клетките на мрежа върху повърхнината (Фигура 2).

Фиг. 1. Кълбо



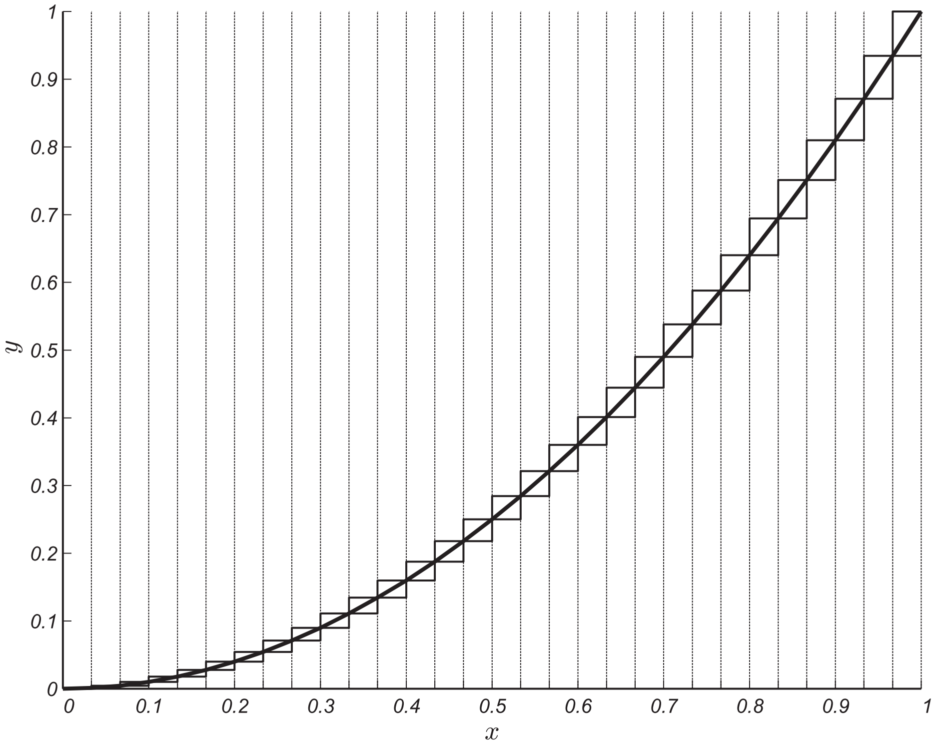
Фиг. 2. Мрежа върху кълбо

Тази мрежа представя дискретна апроксимация на повърхнината на кълбото, а частите от повърхнината, заградени между линиите на мрежата, в модерната днес терминология можем да наречем

крайни елементи.

Архимед, роден през 285 г. пр. н. е. и починал през 212 г. пр. н. е. в Сиракуза, е най-значимият гръцки математик на древността. Той прилага систематично метода на изчерпването за пресмятане на повърхнини и обеми без да познава диференциалното и интегрално смятане в днешния му вид. Убит е от един римски войник при повторното завладяване на Сиракуза по време на Втората пуническа война.

Като **пример** да разгледаме намирането на лицето F на фигурата, заградена от абсцисната ос Ox и частта от графиката на **параболата** $y = x^2$ в интервала $[0, 1]$ (Фигура 3).



Фиг. 3. Отрез от парабола

Като долно и горно приближение на параболата да изберем стъпаловидни криви, както това днес се прави при въвеждане на Римановия интеграл. За своите пресмятания Архимед използва още по-сложни вътрешни и външни "изчерпвания".

Да разделим интервала $[0,1]$ на N на брой подинтервали; тогава

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{2}{N}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \\ \leq \quad & F \\ \leq \quad & \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{2}{N}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{N}{N}\right)^2 \ , \end{aligned}$$

откъдето получаваме

$$\frac{1}{3}\left[1 - \frac{3}{2N} + \frac{2}{N^2}\right] \leq F \leq \frac{1}{3}\left[1 + \frac{3}{2N} + \frac{2}{N^2}\right] \ .$$

Съгласно **Аксиомата на Архимед**, която води началото си още от **Евдокс**, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува естествено число $m \in \mathbb{N}$ така, че

$$\frac{1}{m} < \varepsilon \, .$$

Следователно лицето на фигурата под параболата е

$$F = \frac{1}{3}.$$

Използваните за приближение стъпаловидни криви днес наричаме

(съставни) функции от крайни елементи.

Това са функции, чиято дефиниционна област е съставена от крайни елементи и върху всеки отделен елемент функцията приема краен брой стойности. В нашия пример дефиниционната област се състои от едномерните подинтервали върху оста Ox, а стъпаловидната крива е определена напълно от стойността си в един от краищата на всеки подинтервал.

3. От древността към Ренесанса. Ренесансът (от френски: Възраждане) е бил възможен поради факта, че е имало личности, които са съхранили и предали на идните поколения идеи, знания и техники. Ние ще споменем само някои от тях, тези, които имат особени заслуги за запазването и по-нататъшното развитие на изчислителните методи.

Ал Хорезми, Абу Джафар Мохамед бен Муса, роден в Хорезм около 780 г., починал в Багдад след 846 г., персийско-арабски математик, от чието име произлиза думата **"алгоритъм"**. През 825 г. написва забележителната си "Кратка книга върху смятането чрез допълване и изравняване" ("Al-kitāb al-muqtasav fi hisāb al-ğabr wa al-muqābala"). От арабската дума "алджебр" ("al-ğabr"), което буквално означава наместване (на счупени части) и под това се е разбирало пренасяне на членове със смяна на знака им от едната в другата страна на уравнение, произлиза думата **"алгебра"**.

Херберт от Орилак, папа Силвестър II, роден в Оверн ок. 940/950 г., починал в Рим на 12 май 1003 г., папа от 2 април 993 г., подкрепян от своя ученик – кайзера Ото III; заедно с Ото III той се застъпва за възобновяването на Римската империя в духа на християнската теокрация (Renovatio imperii) и организира църквите в Полша и Унгария (основаване на архиепископиите в Гнезно и Гран). За времето си Херберт е смятан за един от най-значимите западноевропейски учени, но заради математическите и природонаучните си познания (отчасти от арабски източници, въвеждане на нов вид сметало (абак) в Европа) си спечелва **славата на магьосник**.

Фибоначи, Леонардо (от Пиза), роден ок. 1170 и починал след 1240 г. в Пиза, е италиански математик; по време на престоя си в Сицилия (при кайзер Фридрих II), както и при пътуванията си в Африка, Византия и Сирия, се запознава с индийските и арабските аритметични методи, които развива по-нататък. Неговата "Книга за абака" ("**Liber abaci**", 1202 г., забранена през 1228 г.) представлява обширна сметанка (аритметика), която включва и смятане с обикновени дроби. Той въвежда **в Европа десетичната бройна система**, която за пръв път се появява в един китайски надпис от 13 в. пр. н. е., а в Западна Европа – в един испански ръкопис от 976 г.

Региомонтан, в действителност Йохан Мюлер, роден на 6 юни 1436 г. в Кьонигсберг, Бавария, починал през юли 1476 г. в Рим, е немски астроном и математик, чието учение за триъгълника става основа за развитие на съвременната тригонометрия. С помощта на неговите **ефемериди** (астрономически таблици) се определяло местонахождението на обекти в моретата и се улеснявали тогавашните изследователските пътешествия.

Ризе, Адам, роден през 1492 г. в Щафелщайн, починал на 30 март 1559 г. в Анаберг, е немски математик, съставил множество учебници по практическо смятане.

Щифел, Михаел, роден в Еслинген на Некар през 1487 г., починал в Йена на 19 април 1567 г., е немски математик, който изчислява, че **краят на света** ще настъпи на

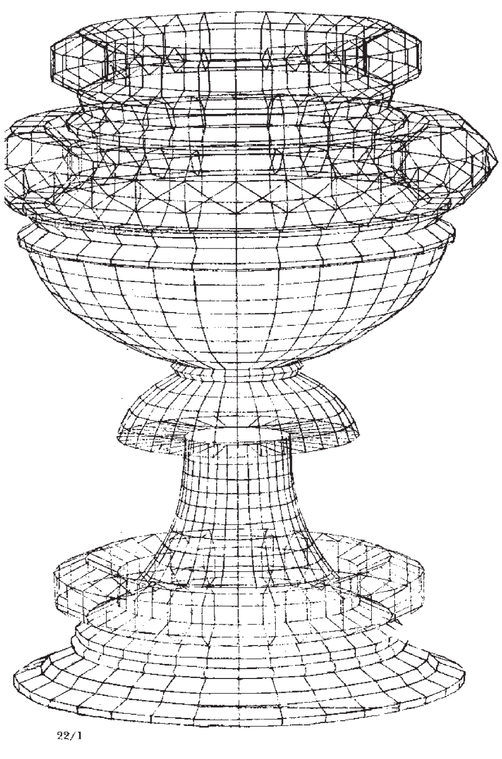
18 октомври 1533 г. в 8 часá,

а живее още 34 години след това. През 1544 г. публикува своята "Аритметика интегра" (основни начини за смятане, квадратни и кубични уравнения) и става един от най-видните представители на **"косистите"** (от итал. "**cosa**", което означава "нещо" и се използва за означаване на **неизвестното в уравнението**).

Без приносите на тези учени изкуството на смятането би потънало в забрава и със сигурност днес не бихме имали модерния метод на крайните елементи.

По време на Възраждането все още има едно интуитивно разбиране на крайните елементи, както показва Фигура 4 с изображението на покал (купа) чрез тримерна мрежа. Тази скица се приписва на **Паоло Уцело**, роден в Пратовекио ок. 1397 г., починал на 10 декември 1475 г. във Флоренция, или на **Пиеро дела Франческа**, роден в Сансеполкро на Арезо между 1410 и 1420 г., починал през 1492 г. на същото място. Днес същата се намира в Уфици, Флоренция.

Съвременник на последните двама известни италиански художници е художникът, скулпторът, строителят и универсалният учен **Леонардо да Винчи**, роден във Винчи близо до Флоренция на 15 април 1452 г., починал в замъка Клу при Амбоаз на 2 май 1519 г. Той конструира сифони, помпи под налягане, стругове, макари и бормашини, летателни апарати, водолазни звънци, кранове, центрофуги, а вероятно и велосипеда, изследва принципа на работа на стен-



Фиг. 4. Покал (купа)

ния часовник с махало и се опитва да вникне в законите на природата чрез **визуализирането** им – виж Фигура 5, на която е изобразен водовъртеж в напоителна система. Тази скица днес се намира в кралската колекция от рисунки в замъка Уиндзор.

Фиг. 5. Водовъртеж

Интересно е да се отбележи, че подобни проблеми на хидродинамиката днес, половин хилядолетие след създаването на тази скица, се решават числено с

метода на крайните елементи.

4. Основната идея на Ойлер за метода на крайните елементи. Основната идея на метода на крайните елементи се среща до известна степен скрито в трудовете на швейцарския математик **Леонард Ойлер**.

Ойлер е роден на 15 април 1707 г. в Базел и умира на 18 септември 1783 г. в Петербург. През лятото на 1738 г. загубва зрението на дясното си око, а от 1740 г. се уврежда и лявото, при това под нормата за социална слепота (зрението му не е достатъчно силно, за да упражнява каквато и да е професия). От 1766 г. нататък настъпват усложнения в кръвообръщението, в следствие на което лявото му око остава с не повече от 1/10 от силата на нормалното зрение. Направената през 1771 г. операция на окото не дава траен резултат и оттук нататък Ойлер си служи с плоча за писане с много едър шрифт, съпътстван от верен помощник. В една своя медицинско-историческа работа от 1983 г. Рене Бернули си задава въпроса **"дали нещастието да си полусляп не е допринесло да се прояви геният и Леонард Ойлер да стане един от най-великите математици на всички времена"**. Ойлер оставя след себе си над 900 работи от областта на чистата и приложна математика, астрономия и физика, развива вариационното смятане, използвайки незавършени работи на Ферма (1601–1665), Якоб Бернули (1655–1705) и Йохан Бернули (1667–1748), открива на 15 април 1743 г. **принципа на безкрайно малките** и публикува през 1744 г. основния си труд "Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu

Фиг. 6. Леонард Ойлер (1753 г., пастел от Емануел Хандман)

Accepti" ("Метод за намиране на гладки криви, които имат определени екстремални свойства ..."). В този труд се разглежда най-простата

задача на вариационното смятане:

Да се минимизира

$$\int_a^b L(t, y(t), \dot{y}(t))\, dt$$

върху всички непрекъснато диференцируеми функции $y(\cdot)$, *такива че*

$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b.$$

За решаването ѝ Ойлер разглежда следната

приближена задача:

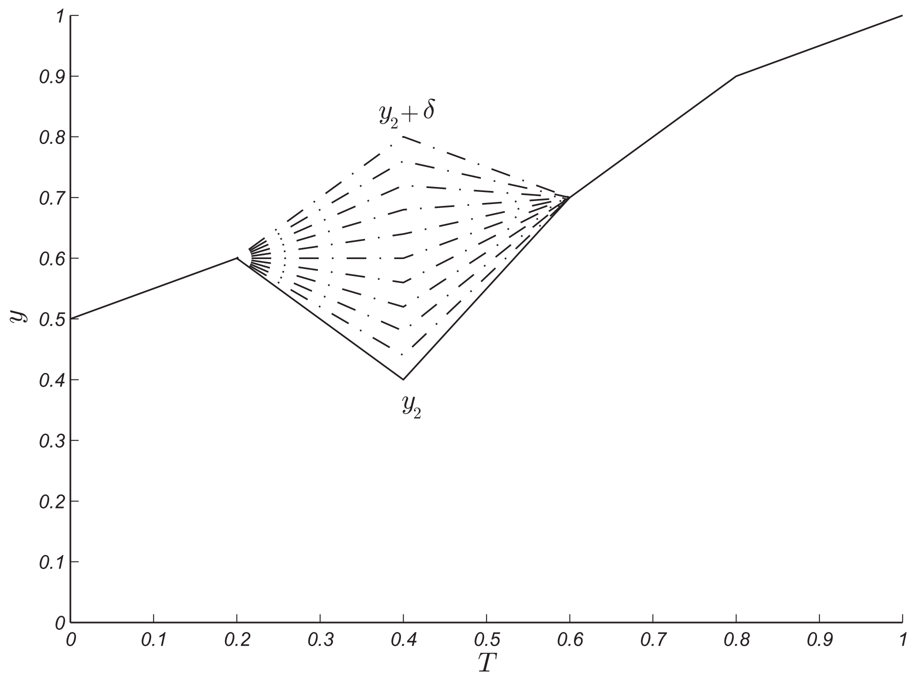
Да се минимизира

$$\sum_{j=0}^{N-1} hL\left(t_j, y(t_j),\ \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h}\right)$$

върху всички частично линейни непрекъснати функции от крайни елементи, такива че

$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b.$$

Дискретизационният параметър h представлява точно дължината на подинтервалите, т. е. на едномерните крайни елементи, на които е разложен дефиниционният интервал $[a, b]$; например на Фигура 7 за $[a, b] = [0, 1]$, $y_a = 0.5$, $y_b = 1$, $h = 0.2$ са изобразени някои типични функции от крайни елементи с вариращи стойности от y_2 до $y_2 + \delta$ в точката от мрежата $t_2 = a + 2h$. Разбира се Ойлер все още не използва понятието функция от крайни елементи, но основната му идея се състои в това, изходната задача да бъде апроксимирана чрез редица от оптимизационни задачи върху пространства от крайни елементи и точно в това е същността на модерните методи на крайните елементи, разглеждани като комбинации от интерполационни техники и вариационни методи.



Фиг. 7. Идеята на Ойлер за метода на крайните елементи от 1744 г.

Ойлер не разполага с компютри и алгоритми, с които да реши директно приближената задача. За целта той прилага аналитичен метод, като диференцира по δ във вътрешна точка от мрежата t_j и съгласно Теоремата на Ферма, полага производната равна на 0:

$$\frac{d}{d\delta} \sum_{i=0}^{j-2} hL\left(t_i, y(t_i),\ \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}\right)\Big|_{\delta=0}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{d}{d\delta} hL\left(t_{j-1}, y(t_{j-1}),\ \frac{y(t_j)+\delta-y(t_{j-1})}{h}\right)\Big|_{\delta=0} \\
&+ \quad \frac{d}{d\delta} hL\left(t_j, y(t_j)+\delta,\ \frac{y(t_{j+1})-y(t_j)-\delta}{h}\right)\Big|_{\delta=0} \\
&+ \quad \frac{d}{d\delta} \sum_{i=j+1}^{N-1} hL\left(t_i, y(t_i),\ \frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{h}\right)\Big|_{\delta=0} \\
&= \quad 0\ .
\end{aligned}
$$

Ако използваме общоприетите във вариационното смятане означения на втората координата на L с x, а на последната координата на L с $\dot{x}$, получаваме

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} L\left(t_j, y(t_j), \frac{y(t_{j+1})-y(t_j)}{h}\right) \\
= \quad &\frac{1}{h}\Bigg[\quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\left(t_j, y(t_j), \frac{y(t_{j+1})-y(t_j)}{h}\right) \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\left(t_{j-1}, y(t_{j-1}), \frac{y(t_j)-y(t_{j-1})}{h}\right)\Bigg]\ .
\end{aligned}
$$

Извършвайки граничен преход $h \to 0$, който изобщо не е тривиален и в който е скрита същинската и най-трудна работа, получаваме **Ойлеровото диференциално уравнение**

$$
\frac{\partial}{\partial x} L\left(t, y(t), \dot{y}(t)\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, y(t), \dot{y}(t)) \qquad (a \le t \le b)
$$

с **гранични условия**

$$
y(a) = y_a,\ y(b) = y_b\ .
$$

Следователно всяко оптимално решение на вариационната задача е решение на граничната задача на Ойлеровото диференциално уравнение. При някои допълнителни предположения е вярно и обратното – решението на тази гранична задача е оптимално решение и на вариационната.

Този аналитичен подход се оказва толкова успешен, че методът на крайните елементи бива забравен в своя първоначален вид.

5. Преоткриване и приложение на метода на крайните елементи. В трудовете на Шелбах (1851) и Курант (1943) методът на крайните елементи вече се използва по същество. Доказаният през 1904 г. от Давид Хилберт (роден в Кьонигсберг, Прусия, на 23 януари 1862 г., починал в Гьотинген на 14 февруари 1943 г., немски математик, широко известен с аксиоматичното изграждане на геометрията) **Принцип на Дирихле**, съгласно който решението на граничната задача на Дирихле (в подходящи функционални пространства) минимизира интеграла на Дирихле (и обратно), също е тясно свързан с метода на крайните елементи.

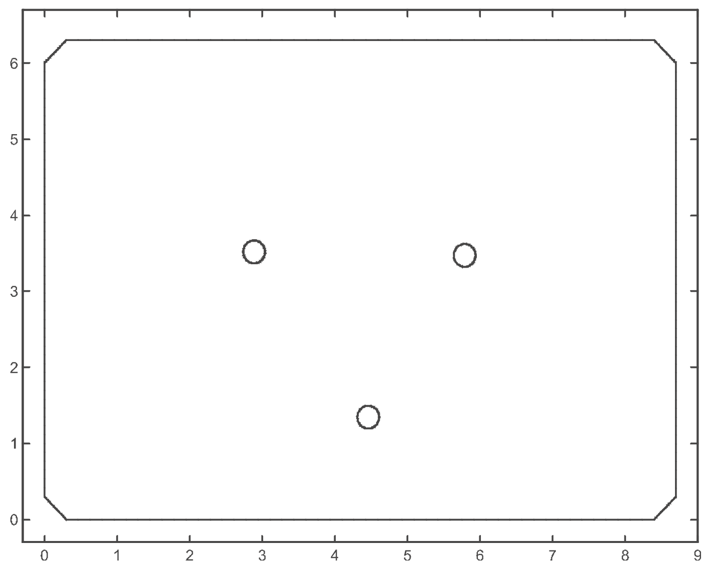
Истинското откриване на метода на крайните елементи се извършва с въвеждането на компютрите след Втората световна война първо от инженерите, а по-късно доразвит съвместно с математиците, както това се вижда от следния списък с някои по-важни публикации:

Turner/Clough/Martin/Topp (1956)

Argyris (1957)
Babuška/Aziz (1972)
Strang/Fix (1973)
Ciarlet (1978)
Ciarlet/J.L. Lions (1990)

Днес не можем да си представим развитието на редица природонаучни и инженерни области като строителна статика, теория на еластичността, хидродинамика и аеродинамика без метода на крайните елементи. За демонстрация ще разгледаме два примера от две приложни области: конструиране на **шатровиден покрив** и **хипертермална терапия**.

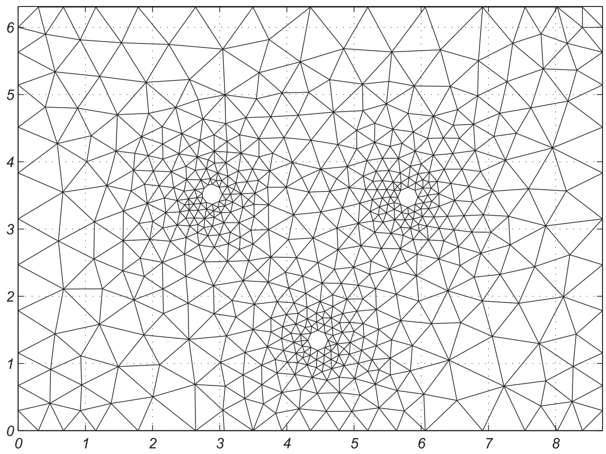
Планът на конструкцията на шатровиден покрив е показан на Фигура 8.



Фиг. 8. План на конструкцията на шатровиден покрив

Шатровидният покрив се опъва на дадена височина в четирите скосени края и на три вътрешни стълба на различна височина. Това са тъй наречените гранични условия от I род за тази част на областта; за останалата част се използват гранични условия от II род. Действителната форма на покрива се получава чрез решаване на нехомогенната задача на Дирихле при тези гранични условия.

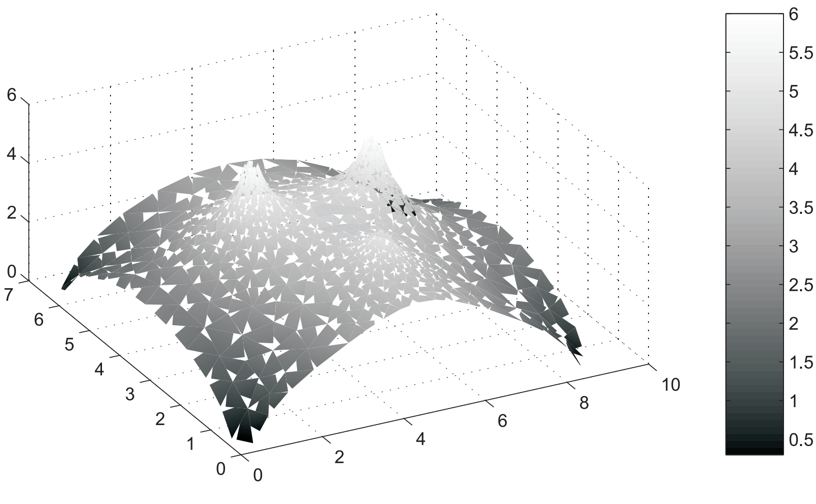
Тук няма да навлизаме в подробности при прецизната математическа формулировка на граничната задача за частно диференциално уравнение от II ред. Числено решение, което по-рано би изисквало използване на големи изчислителни машини, днес може да се намери с помощта на персонален компютър и например с програмния пакет MATLAB. За целта равнинната проекция на покрива се разбива на двумерни крайни елементи, т. е. прави се тъй наречената триангулация на областта (виж Фигура 9), върху която се решава частното диференциално уравнение.



Фиг. 9. Триангулация на равнинната проекция на шатровиден покрив

По-нататък, точно както в първоначалната формулировка на Ойлер, чрез минимизиране на подходящо избран интегрален функционал върху пространството от съответни функции от крайни елементи се пресмята числена апроксимация на шатровидния покрив (Фигура 10).

Шатровидният покрив се апроксимира чрез функции от крайни елементи, чиято дефиниционна област се състои от двумерни крайни елементи. За компютърното им визуализиране се изисква обаче тримерно представяне. При него различното оцветяване подобрява изображението, а може да се използва и като източник на допълнителна информация. Например различните нюанси от черно до светло сиво на Фигура 10 дават мярка за височината на покрива.



Фиг. 10. Шатровиден покрив

При **хипертермалната терапия** чрез целево пренагряване на отделни области от тялото на пациента се разрушават болните клетки, например ракови, без да се увреждат здравите. За тази цел чрез компютърна томография се извършва тримерна триангулация на тялото на пациента. След това пациентът се подлага на електромагнитно облъчване с помощта на система от антени. Облъчването се управлява така, че да се пренагреят само туморните клетки, а в здравите телесни области да не се достигнат вредни температурни максимуми. В крайна сметка се стига до решаването на сложна задача за оптимално управление с частни диференциални уравнения на Максуел, като областта, в която се търси решението, представлява тялото на пациента. За решаването на тази задача с успех се прилага методът на крайните елементи.

Визуализацията на решението изисква най-малко петмерно представяне, а именно три измерения за човешкото тяло, едно измерение за времето и поне още едно измерение за локалното изменение на температурата в тялото на пациента. Естествено такова петмерно изображение не може да бъде показано в настоящата работа. Ще препоръчаме на читателя видеофилма "Бързи алгоритми – бързи компютри" [11], заснет в Конрад–Цузе–Центрум по информационна техника в Берлин.

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. H. Argyris. Die Matrizentheorie der Statik. *Ingenieur-Archiv*, **XXV** (1957), 174–194.

[2] I. Babuška, A. K. Aziz. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. In: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, (Ed. A. K. Aziz), New York–London, 1972. Academic Press, 1972.

[3] R. Bernoulli. Leonhard Eulers Augenkrankheiten. In: Leonhard Euler—Beiträge zu Leben und Werk, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[4] D. Braess. Finite Elemente—Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie, 2., verb. Auflage. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1997.

[5] P. G. Ciarlet, J. L. Lions (eds.). Handbook of Numerical Analysis II: Finite Element Methods (Part 1). North-Holland, Amsterdam, 1991.

[6] P. G. Ciarlet, J. L. Lions (eds.). Handbook of Numerical Analysis IV: Finite Elements Methods (Part 2). Numerical Methods for Solids (Part 2). North-Holland, Amsterdam, 1996.

[7] Ph. Ciarlet. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[8] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 1–23.

[9] H. H. Goldstine. A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century. Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1980.

[10] Kanton Basel-Stadt (ed.) Leonhard Euler—Beiträge zu Leben und Werk, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[11] Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin. Videofilm: Schnelle Algorithmen — Schnelle Rechner. ZIB, Berlin, 1994.

[12] F. Lempio. Über zwei Jahrtausende Finite Elemente — von Eudoxos bis zur Hyperthermietherapie. *Bayreuther Mathematische Schriften*, **56** (1999), 59–78.

[13] Lexikonredaktion des Bibliographischen Instituts. Meyers großes Universallexikon in 15 Bänden. Bibliographisches Institut—Meyers Lexikonverlag, Mannheim–Wien–Zürich, 1981–1986.

[14] D. Olivastro. Das chinesische Dreieck. Zweitausendeins, Frankfurt, 1995.

[15] L. Reti. *Leonardo—Forscher, Künstler, Magier.* Parkland Verlag, Köln, 1996.
[16] Schellbach. Probleme der Variationsrechnung. *J. reine und angew. Math.*, **41** (1851), 293–363.
[17] G. Strang, G. J. Fix. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (New Jersey), 1973.
[18] MATLAB—Reference Guide. The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1992.
[19] MATLAB—User's Guide. The MathWorks, Inc., Natick, Mass., 1992.
[20] M. J. Turner, R. M. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeron. Sci.*, **23** (1956), 805–823.

Lehrstuhl für Angewandte Mathematik
Universität Bayreuth
D-95440 Bayreuth
e-mail: frank.lempio@uni-bayreuth.de

Превод от немски: Нели Димитрова

FINITE ELEMENT METHODS – FROM ANCIENT TO MODERN TIMES

Frank Lempio

In the so-called exhaustion method for the approximation of areas and volumes, Eudoxos and Archimedes used already finite elements, namely geometric objects composed from elementary geometric objects, which can be described completely by finitely many data.
In Europe, this knowledge got nearly entirely lost during the time period between antiquity and Renaissance. Only due to the influence of Persian-Arabic and Italian mathematicians, ecclesiastical advisers and monastery schools, some computing skills were preserved and further developed. Surprisingly enough, in the 15$^{\text{th}}$ century, artist's triangulations of three-dimensional shapes appeared, and Leonardo da Vinci drew turbulent flows. Only four centuries later, it will become apparent that such flows can be calculated using finite elements.
Leonhard Euler was the first who optimized finite element functions in order to solve variational problems resp. boundary value problems for differential equations. For more than two centuries, his method was not being taken as a numerical technique, but as a conceptual method for qualitative investigations and for the calculation of exact solutions in special cases.
Only after the development of electronic computers, the finite element method was rediscovered by engineers and, in cooperation with mathematicians, further developed to one of the most efficient methods for the numerical solution of partial differential equations.
This article is a translation of [12] from German into Bulgarian language. The author is gratefully indebted to the translator Mrs. Neli Dimitrova.