МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

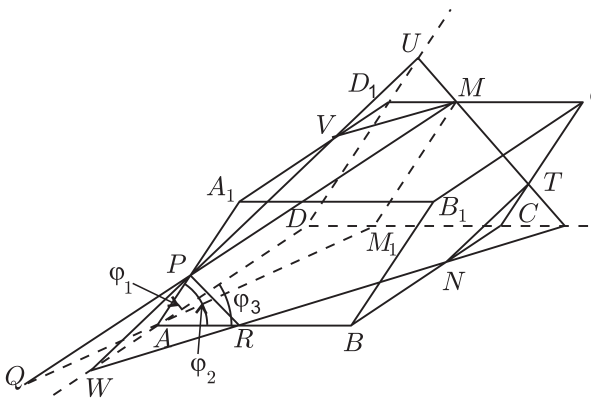
ДВУСТЕННИ ЪГЛИ И ОТНОШЕНИЕ НА ПОВЪРХНИНИ ПРИ СЕЧЕНИЕ НА ПАРАЛЕЛЕПИПЕД С РАВНИНА

Климент Василев Василев

На базата на задачата, разгледана в [1] и [2], се извежда формула за двустенните ъгли, които равнината на сечението сключва със страните на паралелепипеда. Изведена е също така формула за отношение на повърхнините, които се получават от това сечение със стените на паралелепипеда. Формулите се извеждат с помощта на материала по математика, изучаван в средното училище.

В [1] и [2] беше разгледана следната основна задача.

Даден е паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с дължини на ръбовете $AB = a$, $BC = b$, $AA_1 = c$ и ъгли $\sphericalangle A_1AD = \varphi_1$, $\sphericalangle A_1AB = \varphi_2$, $\sphericalangle DAB = \varphi_3$, където φ_1, φ_2 и φ_3 са остри ъгли. Нека M, N и P са такива точки, че $\overrightarrow{D_1M} = \alpha.\overrightarrow{D_1C_1}$ $(0 < \alpha < 1)$, $\overrightarrow{BN} = \beta.\overrightarrow{BC}$ $(0 < \beta < 1)$, $\overrightarrow{AD} = \gamma.\overrightarrow{AA_1}$ $(0 < \gamma < 1)$. Да се построи сечението на равнината, определена от точките M, N и P с паралелепипеда, а също така да се намери лицето му. В [1] беше разгледана задачата за правоъгълен паралелепипед, а в [2] – за произволен паралелепипед (черт. 1).



Черт. 1

Нека $\overrightarrow{AR} = p.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1V} = q.\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AW} = r.\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CT} = s.\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{SN} = k_1.\overrightarrow{SW}$, $\overrightarrow{WR} = k_2.\overrightarrow{WS}$, $\overrightarrow{UV} = k_3.\overrightarrow{UW}$. В [1] и [2] за p, q, r, s, k_1, k_2 и k_3 получихме:

(1) $p = \dfrac{\gamma(1-\alpha\beta)}{\beta+\gamma-\beta\gamma}$, $q = \dfrac{(1-\gamma)(1-\alpha\beta)}{1-\gamma+\alpha\gamma}$, $r = \dfrac{\gamma(1-\alpha\beta)}{1-\gamma+\alpha\gamma}$, $s = \dfrac{(1-\beta)(1-\gamma+\alpha\gamma)}{1-\alpha\beta}$,

(2) $$k_1 = \frac{(1-\beta)(1-\gamma+\alpha\gamma)}{1+\alpha\gamma-\alpha\beta\gamma}, \quad k_2 = \frac{\gamma(1-\alpha\beta)}{1+\alpha\gamma-\alpha\beta\gamma}, \quad k_3 = \frac{\alpha(\beta+\gamma-\beta\gamma)}{1+\alpha\gamma-\alpha\beta\gamma},$$

(3) $$S_{PRNTMV} = \frac{1}{1-\alpha\beta}\left(1 - \frac{1-\gamma+\alpha\gamma}{2(\beta+\gamma-\beta\gamma}.\beta^2 - \frac{\beta+\gamma-\beta\gamma}{2(1-\gamma+\alpha\gamma}.a^2\right)\sqrt{Q},$$

където

(4) $$Q = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2S_1S_2\cos\delta_1 - 2S_1S_3\cos\delta_2 + 2S_2S_3\cos\delta_3,$$

(5) $S_1 = (1-\alpha\beta)S_{ABCD}, \quad S_2 = (1-\gamma+\alpha\gamma)S_{ABB_1A_1}, \quad S_3 = (\beta+\gamma-\beta\gamma)S_{ADD_1A_1},$

а δ_1, δ_2 и δ_3 са двустенните ъгли между стените $ABCD$ и ABA_1B_1, $ABCD$ и ADD_1A_1, ADD_1A_1 и ABB_1A_1.

Двустенните ъгли, които сечението сключва със стените $ABCD$, ABB_1A_1 и ADD_1A_1. Означаваме ги съответно със ψ_1, ψ_2, ψ_3. Разглеждаме пирамидата $APWR$. Означаваме $\sphericalangle PWA = \theta_1$, $\sphericalangle PWR = \theta_2$, $\sphericalangle AWR = \theta_3$, $\sphericalangle ARW = \theta_4$, $\sphericalangle ARP = \theta_5$, $\sphericalangle WRP = \theta_6$.

Като използваме лема 2 от [2] за двустенните ъгли, получаваме:

(6) $$\cos\psi_1 = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2.\cos\theta_3}{\sin\theta_2.\sin\theta_3}, \quad \cos\psi_2 = \frac{\cos\theta_4 - \cos\theta_5.\cos\theta_6}{\sin\theta_5.\sin\theta_6},$$

$$\cos\psi_3 = \frac{\cos\theta_3 - \cos\theta_2.\cos\theta_1}{\sin\theta_1.\sin\theta_6}.$$

Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle PAW$, $\triangle PAR$, $\triangle WAR$. Получаваме:

(7) $$PW = \sqrt{\gamma^2c^2 + r^2b^2 + 2\gamma rbc.\cos\varphi_1},$$

(8) $$WR = \sqrt{p^2a^2 + r^2b^2 + 2prab.\cos\varphi_3},$$

(9) $$PW = \sqrt{p^2a^2 + \gamma^2c^2 + 2p\gamma ac.\cos\varphi_2}.$$

Пресмятаме $\cos\theta_1$ от $\triangle PAW$:

(10) $$\cos\theta_1 = \frac{AW^2 + PW^2 - AP^2}{2AW.PW}.$$

Понеже $AW = r.b$, получаваме:

(11) $$\cos\theta_1 = \frac{rb + \gamma c.\cos\varphi_1}{\sqrt{\gamma^2c^2 + r^2b^2 + 2\gamma rbc.\cos\varphi_1}}.$$

От $\triangle PWR$, като използваме (7), (8) и (9), получаваме:

(12) $$\cos\theta_2 = \frac{r^2b^2 + \gamma rbc.\cos\varphi_1 + prab.\cos\varphi_3 + p\gamma ac.\cos\varphi_2}{\sqrt{\gamma^2c^2 + r^2b^2 + 2\gamma rbc.\cos\varphi_1}.\sqrt{p^2a^2 + r^2b^2 + 2prab.\cos\varphi_3}}.$$

От $\triangle AWR$ за $\cos\theta_3$ получаваме:

(13) $$\cos\theta_3 = \frac{AW^2 + WR^2 - AR^2}{2AW.WR},$$

(14) $$\cos\theta_3 = \frac{rb + pa.\cos\varphi_3}{\sqrt{r^2b^2 + p^2a^2 + 2prab.\cos\varphi_3}}.$$

Остана да пресметнем $\sin\theta_2$ и $\sin\theta_3$, като използваме, че $\sin\theta_2 = \dfrac{2S_{PWR}}{PW.WR}$. Но $S_{PWR} = k_1^2 S_{AWS}$. Като използваме, че $S_{PRNTUV} = \left(1 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2\right)S_{WSU}$ и разделим почленно (вж. [2]) и заместим в израза за $\sin\theta_2$, получаваме

$$\sin\theta_2 = \frac{2k_1^2}{1-k_1^2-k_2^2-k_3^2}.S_{PRNTMV}. \tag{15}$$

За $\sin\theta_3$ получаваме:

$$\frac{AW.WR}{2}\sin\theta_3 = S_{AWR},$$

$$\sin\theta_3 = \frac{pr.S_{ABCD}}{AW.WR}. \tag{16}$$

Като заместим (1), (2), (3), (7), (8), (9) в (11), (12), (14) и (16), а след това в (6), получаваме:

$$\cos\psi_1 = \frac{S_1+S_2.\cos\delta_1-S_3.\cos\delta_2}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2+2S_1S_2.\cos\delta_1-2S_1S_3.\cos\delta_2+2S_2S_3.\cos\delta_3}}. \tag{17}$$

Аналогично като пресметнем $\cos\theta_4$, $\cos\theta_5$, $\cos\theta_6$, $\sin\theta_1$, $\sin\theta_5$ и $\sin\theta_6$, ще получим:

$$\cos\psi_2 = \frac{S_2+S_1.\cos\delta_1+S_3.\cos\delta_3}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2+2S_1S_2.\cos\delta_1-2S_1S_3.\cos\delta_2+2S_2S_3.\cos\delta_3}}. \tag{18}$$

$$\cos\psi_3 = \frac{S_3+S_2.\cos\delta_3-S_1.\cos\delta_2}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2+2S_1S_2.\cos\delta_1-2S_1S_3.\cos\delta_2+2S_2S_3.\cos\delta_3}}. \tag{19}$$

Повърхнината на паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (лицето на пълната повърхнина) е:

$$\sigma = 2S_{ABCD}+2S_{ABB_1A_1}+2S_{ADD_1A_1}. \tag{20}$$

Полагаме:

$$S' = S_{RBN}+S_{PRB_1A_1}+S_{BNTC_1B_1}+S_{MTC_1}+S_{A_1B_1C_1MV}+S_{PVA_1}. \tag{21}$$

Използваме, че:

$$S_{RBN} = \frac{(1-p)\beta}{2}S_{ABCD}, \tag{22}$$

$$S_{PRBB_1A_1} = \left(1-\frac{p\gamma}{2}\right)S_{ABB_1A_1}, \tag{23}$$

$$S_{BNTC_1B_1} = \left(1-\frac{(1-\beta)S}{2}\right)S_{ADD_1A_1}, \tag{24}$$

$$S_{MTC_1} = \frac{(1-\alpha)(1-s)}{2}S_{ABB_1A_1}, \tag{25}$$

$$S_{A_1B_1C_1MV} = \left(1-\frac{(1-q)\alpha}{2}\right)S_{ABCD}, \tag{26}$$

$$S_{PVA_1} = \frac{(1-\gamma)q}{2}S_{ADD_1A_1}. \tag{27}$$

Заместваме (22), (23), (24), (25), (26) и (27) в (21). Получаваме:

(28)
$$\begin{aligned} S' &= \left(1+\frac{(1-q)\beta}{2}-\frac{(1-q)\alpha}{2}\right)S_{ABCD}+\left(1-\frac{p\gamma}{2}+\frac{(1-\alpha)(1-s)}{2}\right)S_{ABB_1A_1}+ \\ &+ \left(1-\frac{(1-\beta)S}{2}-\frac{(1-\gamma)q}{2}\right)S_{ADD_1A_1}. \end{aligned}$$

Тогава

(29)
$$S'' = \sigma - S'.$$

Като използваме (20) и (28) и заместим в (29), получаваме:

(30)
$$\begin{aligned} S'' &= \left(1-\frac{(1-p)\beta}{2}+\frac{(1-q)\alpha}{2}\right)S_{ABCD}+\left(1+\frac{p\gamma}{2}-\frac{(1-\gamma)q}{2}\right)S_{ABB_1A_1}+ \\ &+ \left(1+\frac{(1-\beta)s}{2}-\frac{(1-\gamma)q}{2}\right)S_{ADD_1A_1}. \end{aligned}$$

Разделяме почленно (28) на (30), използваме (1) и (5), и получаваме:

(31)
$$\frac{S'}{S''}=\frac{P_1S_1+Q_1S_2+R_1S_3}{P_2S_1+Q_2S_2+R_2S_3},$$

където сме положили за краткост

$$\begin{aligned} &P_1 = 2\beta_1\gamma_1+\beta^2\gamma_1+\alpha^2\beta_1 && Q_1 = 2\alpha_1\beta_1+(1-\alpha)^2\beta_1^2-\gamma_2\alpha_1^2 \\ &R_1 = 2\alpha_1\gamma_1+(1-\gamma)^2\alpha_1^2-(1-\beta)^2\gamma_1^2 && P_2 = 2\beta_1\gamma_1-\beta^2\gamma_1^2+\alpha^2\beta_1^2 \\ &Q_2 = 2\alpha_1\beta_1-(1-\alpha)^2\beta_1^2+\gamma^2\alpha_1^2 && R_2 = 2\alpha_1\gamma_1-(1-\gamma)\alpha_1^2+(1-\beta)^2\gamma_1^2, \end{aligned}$$

като

$$1-\alpha\beta=\alpha_1,\qquad 1+\beta-\beta\gamma=\beta_1,\qquad 1-\gamma+\alpha\gamma=\gamma_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Василев, Д. Пашкулева. Една задача за сечение на правоъгълен паралелепипед с равнина, Математика и математическо образование (1996). Доклади на Юбилейната Двадесет и пета конференция на СМБ, 267-272.

[2] К. Василев, Д. Пашкулева. Една задача за сечение на паралелепипед с равнина, Математика и математическо образование (1997). Доклади на Двадесет и шеста конференция на СМБ, 300-303.

Климент Василев Василев
бул. "Ал. Стамболийски" 114, ап. 14
1303 – София

DIHEDRAL ANGLES AND THE RATIO BETWEEN THE SURFACES OF THE PLANES AT AN INTERSECTION OF A PARALLELEPIPED BY A PLANE

Kliment Vasilev Vasilev

On the basis of a problem considered in [1] and [2], formulae are devised for the dihedral angles formed by an intersection plane with the faces of the parellelepiped. There is also proposed a formula for the ratio of the surfaces of the planes, which this intersection forms with the faces of the parallelepiped. These formulae are devised by using the mathematical material studied in the secondary school only.