МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

ТЕОРЕМИТЕ КАТО „ИНСТРУМЕНТ“ ЗА ИЗВЪРШВАНЕ НА РАЗЛИЧНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ДЕЙНОСТИ

Иван Ганчев

В доклада се разкрива една особеност на определенията на понятията и на теоремите, ползвани като средства за извършване на математически дейности. Аргументират се и се демонстрират евристичните възможности, които могат да се реализират от учителите и авторите на учебници по математика при осъзнатото й използване.

Теоремите подсказват,
без да ги наказват.

Когато в учебниците по методика на обучението по математика се говори за понятията и теоремите обикновено се набляга само на някои техни особености и то такива, които малко са свързани с използването им в математически дейности. Например за понятията се подчертава, че се дават различни видове дефиниции, които трябва да отговарят на определени условия, че се използват едни или други подходи за разглеждането им в училище в зависимост от възрастта и подготовката на учениците. За теоремите се казва, че са верни твърдения, истинността на които се установява чрез разсъждения, че има различни видове теореми, че чрез тях се добавят нови свойства или признаци за обектите от обемите на понятията, които не са посочени в определенията. Изтъква се също така, че се използват различни начини за доказването на теоремите. Част от тези особености на дефинициите на понятията, а също и на теоремите и техните доказателства бяха обект на разглеждане и в една лекция на известния специалист по математическа логика проф. В. Успенски от Московския университет, изнесена през 1987г. във ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“. Когато разглеждаше тези особености в исторически план, лекторът ясно и недвусмислено ги третираше като човешки дейности. В неговата лекция дефинициите и теоремите обаче бяха разглеждани само като обект на създаване в исторически план и изучаване, а не като обект на използване. Въобще изследванията, които направих ме доведоха до следния извод: Много рядко се показва в явен вид, че в дефинициите и в теоремите са зафиксирани определени способи на действие, благодарение на които те могат да бъдат използвани като средства (инструменти) за извършване на математически дейности. А не е трудно да се забележи, че по принцип едни са конкретните средства и дейности, чрез които се създават продуктите на труда, а други са дейностите, в които тези продукти се използват като средства. Например едни са дейностите и средствата, чрез които се създава трактор, а съвсем други са дейностите, в които той се използва за създаване на нови продукти. Аналогично едни са теоремите и определенията, чрез които се доказва дадена теорема, а съвсем други са задачите, които се решават и теоремите, които се доказват чрез нейното използване. Конкретно при едно от доказателствата на теоремата за ортоцентъра на триъгълника се използват построяване на права, успоредна на права, определението за успоредник, транзитивността на равенството на отсечките и теоремата за пресечната точка на симетралите на страните на триъгълник. Самата теорема обаче може да се използва за доказване перпендикулярност на прави, за построяване само с линийка на права през точка, перпендикулярна на права, за доказване, че три прави минават през една точка, а също и че три точки лежат на една права. Това са дейности, които са различни от дейностите, чрез които се доказва теоремата. По тази причина познаването на доказателството на теоремата за ортоцентъра в триъгълника почти не помага на учениците да се досещат да я прилагат. А наблюденията на уроците по геометрия и изследването на задачите от използваните и в момента, и в миналото, наши учебници и сборници показват, че почти не се поставят на вниманието на учениците в явен вид различните възможности, които предоставя теоремата за ортоцентъра на триъгълника. Нещо повече, задачите, които се дават в учебниците, а от там и в уроците за упражняване на теоремата, са такива, че при решаването им се използва в най-добрия случай само възможността да се доказва, че три прави минават през една точка. Подобна бележка важи за болшинството от изучаваните в училище теореми. Изключение в това отношение правят теоремите от геометрията, които се изразяват с формули. Там много често след извеждането на формулата не малка част от учителите първо правят изводи за основните задачи, които могат да се решават чрез използване на тази формула, а след това илюстрират направения извод чрез решаването на подходящи задачи. Но и в тези изключения не винаги това което се прави е достатъчно. Например след доказването на синусовата теорема се посочва, че чрез нея могат да се решават само следните основни задачи.

1. По дадени страна и два ъгъла на триъгълник да се намерят другите две страни и третия ъгъл на този триъгълник.

2. По дадени две страни и ъгъл срещу едната от тях в триъгълник да се намерят другите два ъгъла и третата страна на триъгълника.

С тази теорема обаче може да се решават и други задачи. Такива са:

3. По дадени страна и ъгъл срещу нея в един триъгълник, да се намери радиуса на описаната около този триъгълник окръжност.

4. По дадени два ъгъла в триъгълник, да се намери отношението на страните срещу тези ъгли.

Те обаче много често нито се посочват, нито се решават. А както показва в своите изследвания известният скандинавски психолог Л.Секей, когато вниманието на хората се съсредоточава само на едно определено свойство на някакъв обект, то това свойство става „доминиращо (силно)“ и прави другите свойства на обекта „слаби (рецесивни)“ за тях. По тази причина те (хората) не се досещат да ги използват даже и тогава, когато с тяхното използване могат лесно да се решават стоящи пред тях проблеми. Този извод естествено важи и за възможностите, които предоставя всяка теорема. Положението се утежнява още повече от обстоятелството, когато в учебниците не само няма задачи, чрез чието решаване се създават умения за използване на различните възможности, които предоставят теоремите, но не се и посочват по някакъв начин тези възможности.

От изложеното до тук не е трудно да се досетим как може посоченият недостатък, свързан с определенията на понятията и теоремите, значително да се намали. За целта е достатъчно да се направи следното: След запознаването на учениците с определението на всяко понятие и след доказването на всяка теорема първо ясно да се посочват основните математически дейности, които могат да се извършват чрез тяхното използване, а след това казаното да се илюстрира чрез решаването на задачи с несложни решения. По този начин различните възможности, които предоставят всяко определение и всяка теорема стават еднакво "силни" средства, по думите на Л.Секей, за учениците при решаване на задачи. С други думи, така осъзнато и целенасочено се развива досетливостта на учениците, т.е. развиват се техните евристични способности. Можем да кажем още, че така се създават условия, при които „теоремите подсказват, без да ги наказват".

По-горе вече посочих основните дейности, които могат да се извършват чрез използването на теоремата за ортоцентъра на триъгълника. Затова тук само ще предложа една примерна система от задачи, които е целесъобразно да се решават с учениците, за да се формират у тях умения за многостранно използване на тази теорема.

Задачи, свързани с теоремата за ортоцентъра на триъгълника

1. Точката Q е среда на страната DC на ромба $ABCD$ с остър ъгъл BAD, а M е такава точка от страната BC, че $MQ = \dfrac{1}{2}CD$.

а) Ако K е пресечната точка на правите AC и DM, да се докаже, че правата BK е перпендикулярна на страната DC на ромба $ABCD$;

б*) Ако точката N от DC е петата на перпендикуляра, спуснат от върха B на ромба към DC, O е пресечната точка на диагоналите AC и BD, а P е пресечната точка на правите NO и AB, да се докаже, че правата DP и перпендикулярът от точката B към правата AD се пресичат в точка от диагонала AC.

2. Точката Q е среда на страната AB на ромба $ABCD$ с остър ъгъл BAD, а M е такава точка от страната AD, че $MQ = \dfrac{1}{2}AB$. Само с линийка през точката D да се построи перпендикуляр към AB.

3. В остроъгълния $\triangle ABC$ точката O е среда на страната AB, а точките A_1 от страната BC и B_1 от страната AC са такива, че $A_1O = OB_1 = \dfrac{1}{2}AB$.

а) Ако H е пресечната точка на AA_1 и BB_1, а C_1 е пресечната точка на AB с перпендикуляра спуснат от върха C към страната AB, да се докаже, че точките C, H и C_1 лежат на една права.

б) През точката C само с линийка да се построи права, перпендикулярна на AB.

3. Дадени са окръжност k с диаметър AB и точка M, вътрешна за k. През M да се построи само с линийка права, перпендикулярна на AB.

Последната от тези задачи акад. Л. Чакалов дава през 1950 г. на експериментално проведената математическа олимпиада в София преди първата национална математическа олимпиада, проведена през 1951 г.

Поради аналогията между теоремата за ортоцентъра и теоремите за медицентъра на триъгълника, за пресечната точка на вътрешните му ъглополовящи, а също и на симетралите на страните му, не е трудно да се съобрази, че аналогични са и математическите дейности, които могат да се извършват с тях. Затова тук ще си позволя да предложа само по една примерна система от задачи, чрез които може да се съдейства за развиване на умения за многостранно използване на тези теореми.

Задачи, свързани с теоремата за медицентъра на триъгълника

1. Точките M и Q са среди съответно на страните BC и DC на успоредника $ABCD$, а K е пресечната точка на диагонала AC и отсечката DM.

а) Да се докаже, че точките Q, K и B лежат на една права;

б*) Ако O е пресечната точка на диагоналите AC и BD, S е пресечната точка на правите AB и QO, а P е средата на страната AD, да се докаже, че трите прави BP, DS и AO се пресичат в една точка.

2. Дадени са успоредник $ABCD$ и средата M на страната BC. Да се построи само с линийка:

а) средата на страната DC;

б) средата на страната AB;

в*) точката X от диагонала AC, такава че $AX{:}XC = 1{:}2$.

Задачи, свързани с пресечната точка на вътрешните ъглополовящи на триъгълника

1. Върху страната BC на ромба $ABCD$ с остър ъгъл е отбелязана точка L_1, която е на равни разстояния от страната DC и диагонала BD, а K е пресечната точка на диагонала AC и отсечката DL_1.

а) Да се докаже, че правата BK е ъглополовяща на $\sphericalangle CBD$.

б) Да се докаже, че правата BK пресича страната DC в точката L_2, която е на равни разстояния от страната BC и диагонала BD;

в*) Ако O е пресечната точка на диагоналите AC и BD, S е пресечната точка на AB и L_2O, а P е точка от страната AD, която е равноотдалечена от правите BA и BD, да се докаже, че трите прави BP, DS и AO се пресичат в една точка.

2. Дадени са ромб $ABCD$ с остър ъгъл A и точка L_1 от страната му BC, която е на равни разстояния от страната CD и диагонала BD. Да се построи само с линийка:

а) ъглополовящата на ъгъл DBC;

б) точка L_2 от страната CD, която е равноотдалечена от страната BC и диагонала BD;

в*) точка S от страната AB, която да е равноотдалечена от страната AD и диагонала BD;

г*) центърът на вписаната в $\triangle ABD$ окръжност.

Задачи, свързани с пресечната точка на симетралите на страните на триъгълник

1. Правата S_1 е симетрала на страната BC на ромба $ABCD$ с остър ъгъл BAC и пресечна точка на диагоналите O.

а) Ако S_2 е симетралата на страната CD, да се докаже, че пресечната точка на правите S_1 и S_2 лежи на диагонала AC;

б*) Ако Q е средата на CD, P е пресечната точка на правите AB и QO, а правата S_3 минава през P, перпендикулярна е на AB и пресича AC в точката M, да се докаже, че перпендикулярът към AD, минаващ през M, разполовява страната AD.

2. Дадени са окръжност k, вписан в нея $\triangle ABC$, средата M на страната AB, средата N на страната BC и средите P, Q и S съответно на дъгите AB, BC и AC (дъгите AB, BC и AC са в различни полуравнини с $\triangle ABC$ съответно относно правите AB, BC и AC). Да се построи само с линийка:

а) центърът на окръжността k;

б) перпендикуляр от точката S към страната AC;

в) средата на страната AC.

За да не се остане с впечатление, че развитата тук идея се отнася само за използването на теоремите от четирите теми, между които има голяма аналогия, ще напомня, че по-горе посочих пример за „неравностойно“ използване и на възможностите, които предоставя синусовата теорема. Надявам се, че на базата на тези примери читателите сами ще могат да открият и много други подобни на тях и при желание ще осигуряват разностранно използване на съответните теореми. За да изтъкна още по-убедително значимостта на изложената тук идея, ще цитирам и две други задачи с по-сложни решения, на които посочените по-горе задачи 3 и 4 (във връзка с използването на синусовата теорема), са съответно задачи-компоненти. Тези задачи са:

1. Основата на права призма е четириъгълник, на който два противоположни ъгъла са прави. Диагоналът на основата, който съединява върховете на неправите ъгли има дължина l и дели един от тези ъгли на части α и β. Лицето на сечението на призмата с равнина, минаваща през другия диагонал и околен ръб на призмата, е S. Да се намери обема на призмата.

2. В правилна четириъгълна пирамида двустенният ъгъл при основата е α, а дължината на основния ръб е a. През основния ръб на пирамидата е прекарана равнина, която сключва с равнината на основата ъгъл β. Да се определи вида на сечението и да се намери лицето му.

Първата от тези задачи е от тема за зрелостен изпит през 1958 г., а втората – от тема за кандидат-студентски изпит през 1971 г. Тези задачи съм поставял на различни ученици и всички те обикновено се насочват да ги решават по едни и същи начини, но се затрудняват в едни и същи пунктове при решаването им. За първата това е пунктът, в който за определен триъгълник се налага да се прилага равенството $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$, а за втората пунктът, в който също за някакъв триъгълник се прилага равенството $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, за да се замести частното $\dfrac{a}{b}$ с частното $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. В подкрепа на тезата, изложена в доклада, могат да се посочат още много примери. За нас обаче като педагози е важно да потърсим обяснение на факта съответно на досещането или недосещането в случая и в особеностите и същността на самите теореми, като основно средство за фиксиране и предоставяне на информация за използване. По-горе предложих накратко едно обяснение за съответните затруднения от психологическа гледна точка. Това обяснение вече до някъде ни подсказва какво методическо решение можем да дадем на съществуващия проблем. Интересен е обаче отговорът на въпроса: Защо при решаването на този проблем в крайна сметка достигаме до теоремите?

Може би този въпрос има различни отговори. Един от тях според мен трябва да потърсим в историята на математиката, като установим кои са основните подбуди на древногръцките математици за създаването на теоремите и какво са постигали те чрез тяхното създаване и използване? А на последните два въпроса специалистите по история на математиката вече имат убедителни отговори. Една от подбудите за създаване на теоремите в Древна Гърция (а през XVI и XVII век и на буквената символика от европейските математици) е стремежът да се решават наведнъж много конкретни задачи, чиито решения се състоят от едни и същи стъпки и полученият общ резултат след това да се използва наготово за различни конкретни случаи. Така се постига един от идеалите за човешките дейности – икономичността. След като обаче една от целите, които се постигат чрез създаването на теоремите е да се осигури средство за по-икономично решаване на различни конкретни задачи, естествено е рано или късно в обучението да се почувства възможността и целесъобразността след всяка теорема да се показват основните задачи, които могат да се решават чрез нея. Както посочих по-горе за теоремите от геометрията, които се изразяват чрез формули, тази възможност и целесъобразност отдавна вече е осъзната и се реализира от много учители. Целта на настоящия доклад е да се съдейства реализацията на разкриването и упражняването на всички основни възможности за математически дейности, които осигурява дадена теорема, да се превърне в напълно осъзната дейност и да съпътства всяка теорема в обучението по математика. Изследванията показват, че тази идея съществено повишава ефективността на идеята за систематизиране на теоремите в дидактически системи от признаци по отношение развитието на евристичните способности на учениците. Това ми дава основание да очаквам в близките години синтезът на тези две идеи да бъде овладян, обогатен и усъвършенстван и от други, особено по-млади колеги. Така съществено ще се повиши ефективността на обучението по математика.

В заключение ще отбележа, че примерите, които разгледах се отнасят за теореми само от геометрията и тригонометрията. Причината за това е главно ограничената възможност във времето на доклад като настоящия, а не някаква специфична особеност на съдържанието на училищния курс по алгебра. Нещо повече, даже само теоремите за равносилност на уравнения и неравенства предоставят твърде интересни възможности за осъзнато и с разбиране извършване на много математически дейности, които и до сега се извършват, но обикновено механично и без разбиране или въобще не се извършват правилно. Конкретизацията в алгебрата на този общ проблем, свързан с теоремите, като средство за извършване на математически дейности, а също и конкретизацията на проблема за многостранното използване на определенията оставяме за разработване в други доклади и евентуално от други докладчици.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ив. Ганчев. За математическите задачи. София 1971.

[2] Ив. Ганчев, М. Върбанова. История на математиката (курс лекции). София 1999.

[3] Ив. Ганчев и др. Методика на обучението по математика в VIII-XI клас, част I. София, 1996.

[4] Ив. Ганчев. Опит за задълбочаване на някои идеи на Д. Пойа за "евристичните методи" при решаването на задачи. – Математика и математическо образование – сборник доклади на СМБ – София 1999.
[5] Н. В. Метельский. Дидактика математики. Москва, 1982.
[6] П. Иванов. Методика на обучението по математика. София, 1965
[7] Д. Пойа. Как да се решават задачи? София, 1973.
[8] В. Н. Пушкин. Эвристика – наука о творческом мышлении. Москва, 1967.

Иван Ганчев
ул. „Хан Крум" 32
1000 София

THEOREMS AS TOOLS FOR PERFORMING VARIETIES OT MATHEMATICS ACTIVITIES

Ivan Ganchev

The report reveals a special feature of definitions of concepts and theorems. Due to it, they may be used as tools for performing different mathmatics activities. There are proved and demonstrated the heuristic capabilities of the feature and the way, which textbook authors and teachers can use it.