МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

МОДУЛИ В ИЗБИРАЕМАТА ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКА И ТЯХНАТА РЕАЛИЗАЦИЯ

Кохар Крикорян, Димчо Станков

В настоящата статия се предлага една идея за модулен подход в избираемата подготовка по математика. Представена е реализация на един конкретен модул.

1. Модули в избираемата подготовка. В учебните помагала за избираема и факултативна подготовка по математика се предлагат теми и задачи върху тях, които задълбочават и разширяват изучаван материал в задължителния курс. Авторите им си поставят за цел да запознаят читателите с разнообразни методи за решаване на различни типове задачи [1], да подпомогнат учениците организирано да се подготвят за кандидатстване и успешно следване във ВУЗ [2] или чрез разработване на теми от допълнителния учебен материал да достигнат до нестандартни задачи, които изискват досетливост и нестандартно мислене [3]. При всички случаи задълбочаване на математическата подготовка в избираемите и извънкласни форми по всички теми от задължителния училищен курс е невъзможно. Другият проблем е балансът между теоретичен материал и задачите. Тези въпроси, както и реализацията на някои основни цели на обучението по математика, като развитие на мисленето и изграждане на математическа култура, овладяване на умения за активна познавателна дейност, способност за решаване на нешаблонни задачи, е поводът да предложим една идея за модулен подход в избираемата подготовка по математика. Той може да бъде прилаган и в извънкласните форми.

Под модул ще разбираме част от учебното съдържание на избираемата подготовка, която се състои от разширения на стари знания, нови знания, упражнения и задачи за самостоятелна работа и се характеризира със следното:

а) разкрива съществени връзки между изучавани понятия в задължителния курс;

б) целенасоченост и логическа завършеност;

в) относителна независимост.

Определянето на темите (модулите) в избираемата подготовка и тяхното съдържание е много повече от подбор на понятия, теореми и задачи. Чрез всеки модул трябва да се постига по-висок синтез на знанията от задължителния курс. Тук принципът на системност и последователност като подход при подбиране и подреждане на учебното съдържание се проявява най-вече в показване на важни връзки между математическите понятия и теореми. В модула, който разглеждаме по-долу, това са: реални числа; граница на редица, непрекъснатост на функция.

Целенасоченост означава, че съдържанието на модула се определя и преподава с точно определена цел – задълбочаване и разширяване на знанията върху избрано понятие или тема от задължителния курс. Отделните теоретични етапи от изграждането на модула са подчинени на основната цел. Логическа завършеност означава, че реализацията на модула дава на учениците достатъчно нови знания за същността на изучавани понятия и обекти, които те могат активно да прилагат при решаване на нешаблонни задачи.

Реализирането или не на кой да е модул не бива да влияе съществено на реализирането на друг модул. С други думи учителят трябва да разполага с достатъчен брой модули, съдържанието на които зависи от научните му интереси, неговото разбиране за това по кои теми от задължителния курс трябва да се надстройва, профила на училището или паралелката и други. Кои модули ще бъдат реализирани зависи от броя часове в учебния план, изявен интерес от учениците и преценката на учителя за сложността на даден модул от една страна и нивото на аудиторията от друга. Един модул може да има продължение и в извънкласните форми. Това разбираме под относителна независимост на модула.

2. Реализация на един модул. Задачите от задължителния курс по математика от темата „Непрекъснатост на функция“ са примери на функции с краен брой точки на прекъсване. Тук предлагаме конкретна реализация на един модул в избираемата подготовка, който може да бъде наречен например „Функции с безкрайни множества от точки на прекъсване“. Целта е по-задълбочено изучаване на понятието непрекъснатост на функция и достигане до нестандартни примери на прекъснати функции. В модула се разкриват съществени връзки между математически понятия. Посочването на функции с „много“ точки на прекъсване е свързано до голяма степен с гъстотата на множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните числа и на множеството $\mathbb{I}$ на ирационалните числа в множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа. Освен това проверката за прекъснатост в много случаи се извършва по-лесно с дефиницията на Хайне, като се използват и някои свойства на подредиците. Поради тези причини предлаганият модул се състои от три части. В първите две части се доказват твърдения, които са необходими за последната част и се предлагат задачи, някои от които се използват по-нататък. По-долу посочваме накратко съдържанието на трите части. Доказателствата на твърденията и решенията на задачите могат да бъдат намерени например в [4], [5], [6], [7], както и в повечето учебници по математически анализ.

А. Гъстота на $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ в $\mathbb{R}$. В литературата, предназначена за избираемата подготовка и извънкласните форми в училище, се считат за известни четирите аритметични действия с реални числа и техните свойства, сравняването им, както и изобразяването на реалните числа като точки от числовата ос. За по-нататъшното изучаване на тази теория се приема за аксиома принципът за непрекъснатост или еквивалентно на него твърдение. За целите, които си поставяме по-удачна е аксиомата за отделимостта. По този начин се избягва също и натрупването на нови термини.

Аксиома за отделимостта. Нека X и Y са непразни множества от реални числа, такива че за всяко $x \in X$ и за всяко $y \in Y$ е изпълнено $x \leq y$. Тогава съществува реално число c, за което $x \leq c \leq y$ за всяко $x \in X$ и за всяко $y \in Y$.

Теорема 1.1. *Нека $\{\triangle_n\}$ е редица от затворени интервали, за които $\triangle_n \supset \triangle_{n+1}$ за всяко n. Тогава съществува точка, която е обща за всички интервали от редицата.*

Принцип на Архимед. Множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа не е ограничено отгоре.

Целта на частта от разглеждания модул е гъстотата на рационалните и ирационалните числа в $\mathbb{R}$. Това може да се докаже едновременно и за двете множества. Но доказателството на гъстотата на рационалните числа може да се направи и по начин, по-достъпен за учениците. Още повече, че при него се обосновава и съществуването на функцията $[x]$ (скобка хикс). Преди всичко се дава дефиниция за ограничено отдолу (отгоре) и ограничено множество от реални числа. След това трябва да се докаже, че всяко непразно и ограничено отдолу (отгоре) множество от цели числа има най-малък (най-голям) елемент. От това следва, че за всяко реално число x съществува най-голямо цяло число, което не надминава x и се дефинира функцията $f(x) = [x]$. Чрез принципа на Архимед и свойствата на $[x]$ лесно се доказва, че между всеки две реални числа има рационално число. Разбира се това може да се докаже едновременно за множествата $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$.

Теорема 1.2. *Между всеки две различни реални числа има както ирационално, така и рационално число.*

Дефинира се понятието гъсто множество в $\mathbb{R}$. Теорема 1.2. показва, че множеството $\mathbb{Q}$ и множеството $\mathbb{I}$ са гъсти в $\mathbb{R}$.

Задачи за упражнение и самостоятелна работа.

1. Във всеки отворен интервал има безброй много рационални числа и безброй много ирационални числа.

2. За всяко реално число a съществува цяло число n такова, че $a + n \in [0,\ 1]$.

3. Нека $\triangle$ е интервал с дължина $d > 0$ и $0 < |x| < d$. Тогава съществува $m \in \mathbb{Z}$ такова, че $mx \in \triangle$.

4. Ако A е гъсто множество в $\mathbb{R}$ и p е реално число различно от нула, то множеството $\{p.x : x \in A\}$ е гъсто в $\mathbb{R}$.

5. Точките от един неизроден интервал не могат да се подредят в редица. Реалните числа не могат да се подредят в редица.

6. Рационалните числа могат да се подредят в редица.

7. Ирационалните числа не могат да се подредят в редица.

Б. Подредици – теорема на Болцано-Вайерщрас. Темата за числовите редици в задължителния училищен курс по математика е сравнително кратка по понятни причини – липса на необходимите знания за по-задълбочено изучаване. Въпреки това необходимите за нашите цели факти могат сравнително лесно да се надстроят. След като се припомнят дефинициите за сходяща редица и за редица клоняща към $+\infty(-\infty)$ могат да се докажат следните твърдения.

Лема 2.1. *Ако за редиците $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ е изпълнено $a_n \leq b_n \leq c_n$ за всяко n и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

Лема 2.2. *Ако за редиците* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *е изпълнено* $a_n \le b_n$ *за всяко* n *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \left(\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty\right)$, *то* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$.

Дефинира се понятието подредица на дадена редица.

Теорема 2.1. (Болцано-Вайерщрас) *Всяка ограничена редица притежава сходяща подредица.*

Теорема 2.2. *Всяка неограничена отгоре (отдолу) редица притежава подредица, която клони към* $+\infty(-\infty)$.

Задачи за упражнение и самостоятелна работа.

1. Намерете границата на редицата с общ член:

а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

б) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1} + \dfrac{2n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{2n}{n^2+n}$;

в) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3-2n+1} + \dfrac{n^2+2}{n^3-2n+2} + \ldots + \dfrac{n^2+n}{n^3-2n+n}$.

2. Докажете, че: а) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; б) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$.

3. За всяко реално число съществува редица от рационални (ирационални) числа, която има за граница това число.

4. Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

5. Ако редицата $\{a_n\}$ може да се разбие на две подредици, които клонят към a, то $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

6. Ако редицата $\{a_n\}$ е ограничена отдолу и не клони към $+\infty$, то $\{a_n\}$ има сходяща подредица.

7. Ако $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ са редици съответно от цели и естествени числа и $\lim_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = a \in \mathbb{I}$, то $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$.

В. Непрекъснатост на функция. Точки на прекъсване. В заключителната част на предлагания модул се разглеждат функции с по-интересни множества от точки на прекъсване и точки на непрекъсване. Въвежда се дефиницията на Хайне за непрекъснатост, която е по-удобна за повечето от задачите.

Теорема 3.1. *Нека функцията* f *е дефинирана в интервала* $(a,\ b)$ *и* $x_0 \in (a,\ b)$. *Следните условия са еквивалентни:*

а) f *е непрекъсната в* x_0; *б)* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;

в) лявата и дясната граница в x_0 *са равни на* $f(x_0)$.

Прави се класификация на точките на прекъсване.

Задачи за упражнение и самостоятелна работа.

1. Изследвайте за непрекъснатост и начертайте графиката на функцията:

а) $f(x) = x^2 + 1$, при $x < 0$ и $f(x) = 2 - x$, при $x \ge 0$;

б) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2}$, при $x \le 0$ и $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x > 0$; в) $f(x) = [x]$.

2. Да се докаже, че функцията на Дирихле $D(x) = 1$, при $x \in \mathbb{Q}$ и $D(x) = 0$, при $x \in \mathbb{I}$ е прекъсната във всяка точка.

3. Да се докаже, че функцията $f(x) = x$, при $x \in \mathbb{Q}$ и $f(x) = -x$, при $x \in \mathbb{I}$ е прекъсната във всяка точка с изключение на нулата.

4. Докажете, че функцията $f(x) = D(x). \sin \pi x$ е прекъсната навсякъде с изключение на целите числа.

5. Докажете, че функцията $f(x) = \dfrac{1}{q}$, при $x = \dfrac{p}{q}$, където $(p,\ q) = 1,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$ и $f(x) = 0$, при $x \in \mathbb{I}$ е прекъсната в рационалните точки и непрекъсната в ирационалните точки.

6. Изследвайте за непрекъснатост функцията $f(x) = 1$, при $x \in A = ((a,\ b) \cap Q) \cup \{a,\ b\}$b и $f(x) = 0$, при $x \notin a$, където $a < b$.

7. Нека множеството $E = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots\} \subset R$ е дадено. Изследвайте за непрекъснатост функцията $f(x) = \dfrac{1}{k}$, при $x = r_k,\ k = 1, 2, \dots$ и $f(x) = 0$, при $x \notin E$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Паскалев, Л. Давидов, П. Пенчев, М. Сотиров. Учебно пособие за факултативна подготовка по математика в 10 клас на ЕСПУ, София, 1986.

[2] З. Запрянов, И. Димовски, А. Лангов, М. Колчев. Математика за III курс на техникумите и СПТУ и за свободно избираема подготовка в XI клас (II степен) на ЕСПУ, София, 1983.

[3] Р. Русев, Св. Савчев. Сборник от задачи по алгебра за факултативна подготовка, София, „Просвета“, 1992.

[4] Л. Давидов, Ст. Додунеков. Елементарна алгебра и елементарни функции, София, „Народна просвета“, 1984.

[5] Т. Биринджиев, И. Проданов. Непрекъснати функции, София, „Народна просвета“, 1981.

[6] И. Проданов. Принцип на Дирихле, София, „Народна просвета“, 1988.

[7] Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрапримеры в анализе, Москва, 1967.

Кохар Оханес Крикорян
Факултет по математика
и информатика
Шуменски университет
„Епископ К. Преславски“
9700 Шумен
e-mail: kohar@icon-bg.net

Димчо Костов Станков
Факултет по математика
и информатика
Шуменски университет
„Епископ К. Преславски“
9700 Шумен
e-mail: d.stankov@shu-bg.net

MODULES IN ELECT PREPARATION IN MATHEMATICS AND THEIR REALIZATION

Kohar Ohanes Krikorian, Dimcho Kostov Stankov

In this paper is given an idea of module approach in elect preparation in mathematics. Here is presented realization at concrete module.