МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2000
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2000
Proceedings of Twenty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Lovetch, April 3–6, 2000

ВЪРХУ ТЕМАТА "ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ДВЕ И ПОВЕЧЕ ОКРЪЖНОСТИ"

Иван Димитров Трендафилов

В статията са обосновани преимуществата, поради които темата „Взаимни положения на две и повече окръжности“ трябва да присъства като самостоятелен урок в края на раздел „Окръжност“ от осмокласния материал по геометрия. Разгледани са както елементарни, така и по-съдържателни задачи, чрез които могат да се изучават конфигурациите от няколко окръжности.

Полезно е учителят, преподаващ темата за взаимно положение на няколко окръжности да знае отговора на следния въпрос:

Кой е онзи подходящ момент в преподаването на раздела „Окръжност“, в който да бъдат поднесени знанията от тази тема?

Причината за важността на мястото на тази тема е в това, че е от съществено значение дали конфигурациите с две и повече окръжности ще се „атакуват“ чрез знанията за периферни и вписани ъгли и за допирателни, или чрез част от тези знания, или изобщо без тях.

В някои от сега действащите учебници за осми клас урокът за взаимно положение на две окръжности е преди уроците за вписан и периферен ъгъл. Това веднага предопределя, че в този урок не могат да се дадат никакви съществени приложения на разгледаните конфигурации от две окръжности. Понеже тези конфигурации не могат да се упражнят, знанията от урока скоро се забравят. Считам, че ранното разглеждане на конфигурациите на две окръжности е предпоставка за отпадане от тази тема на някои интересни задачи.

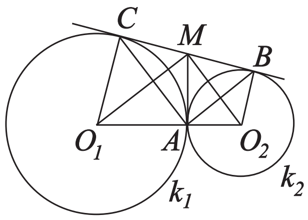
Има и още една важна причина знанията за взаимно положение на две и повече окръжности да бъдат поднесени в края на раздела. Това са естествените затруднения, които изпитват по-голямата част от учениците, когато се изправят пред задача, в която геометричната конфигурация е сложна. Логично е да запознаем учениците с такива твърдения и задачи, след като са натрупали известни знания и опит в работата си с окръжности, отколкото преди това. Като разсъждаваме по този начин достигаме до най-важният от методическа гледна точка въпрос, на който трябва да се отговори тук:

Как да бъдат поднесени конфигурациите с няколко окръжности така, че ученикът да ги възприеме лесно, да не се стресира и да не се уплаши от сложността им?

Естествено е, че отговорът на този въпрос не може да бъде с едно или с пет изречения. Ето защо ще опишем някои методически похвати, които позволяват на учителя да поднесе темата по естествен начин

Започваме със следната добре известна задача:

1. *Окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се допират външно в точката A. Една от общите им външни допирателни допира k_1 и k_2 съответно в точките C и B и пресича общата им вътрешна допирателна в точката M. Да се докаже, че триъгълниците ABC и O_1O_2M са правоъгълни.*



черт. 1

От равенствата $MA = MB$ и $MA = MC$ като отсечки от допирателните от точката M съответно към окръжностите k_1 и k_2 (черт. 1) следва, че медианата AM е равна на половината от срещулежащата страна BC, т.е. $\triangle ABC$ е правоъгълен.

От $\triangle O_1MA \cong \triangle O_1MC$ следва, че $\sphericalangle MO_1A = \dfrac{1}{2} \sphericalangle AO_1C$. Но също така е в сила $\sphericalangle ACM = \dfrac{1}{2} \sphericalangle AO_1C$, тъй като този ъгъл е периферен за k_1. Следователно $\sphericalangle MO_1A = \sphericalangle ACM$ и аналогично $\sphericalangle MO_2A = \sphericalangle ABM$. Тогава

$$\sphericalangle MO_1A + \sphericalangle MO_2A = \sphericalangle ACM + \sphericalangle ABM = 180^\circ - \sphericalangle BAC = 90^\circ.$$

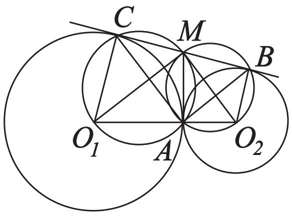
Тъй като A лежи на O_1O_2, следва, че $\sphericalangle O_1MO_2 = 90^\circ$, т.е. $\triangle O_1O_2M$ е правоъгълен.

Както вече споменахме тази задача е добре известна. Втората част от задачата се среща в общите задачи (стр.86) на раздела „Подобности“ от учебното пособие за девети клас [4].

Само че, колкото и подробно да изложим пред учениците горното кратко решение, пак няма да сме решили поставената методическа задача — да поднесем така идеите за взаимните положения на две и повече окръжности, че те да се възприемат лесно. Важни са коментарите, които правим към разгледаната конфигурация.

Коментар I. В процеса на решението на задачата установихме, че $\sphericalangle MO_1A = \sphericalangle ACM$. Така от точките O_1 и C отсечката AM се вижда под един и същ ъгъл. Следователно точките A, M, C и O_1 лежат на една окръжност, съдържаща геометричното място от точки, от които отсечката AM се вижда под ъгъл ACM.

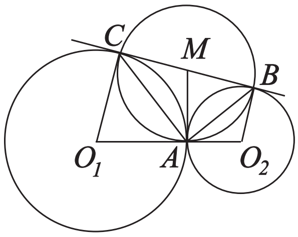
Така извършихме една полезна пропедевтика на понятието вписан четириъгълник, което предстои да бъде разгледано след няколко урока. Аналогично от $\sphericalangle MO_2A = \sphericalangle ABM$ следва, че точките A, M, B и O_2 също лежат на една окръжност. Така естествено, *от решението на задачата*, се появи тази конфигурация от четири окръжности, която показваме на учениците на черт. 2 .



черт. 2

Коментар II. Решавайки задачата, установихме също, че е в сила $MA = MB = MC$.

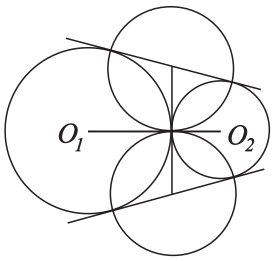
Това показва, че точката M е център на окръжност, която минава през точките A, B и C (черт. 3). Диаметър на тази окръжност е отсечката BC. Да забележим, че тъй като $MA \perp O_1O_2$, следва, че окръжността се допира до правата O_1O_2. Така естествено, *от решението на задачата*, се появи тази конфигурация от три окръжности.



черт. 3

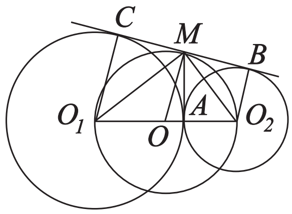
Коментар III. Една от важните задачи, която всички ние, които преподаваме математика, решаваме, е да възпитаме в учениците естетическо възприемане на математиката като цяло.

Ето защо учителят без притеснение може да говори за симетрия, разчитайки на интуитивното познаване на понятието. Когато коментираме тази задача може дори и да не споменаваме, че конфигурацията е симетрична спрямо централата на двете окръжности, защото това може да се установи чрез еднакви триъгълници. Полезно е обаче да се установи, че съществува още една окръжност, еднаква на току що построената, която се намира в другата полуравнина спрямо централата и също се допира в точката A до централата. Така естествено, *от съображения за симетрия*, се появи изобразената на черт. 4 конфигурация от четири окръжности.



черт. 4

Коментар IV. В процеса на решението на задачата установихме още, че е изпълнено $\sphericalangle O_1MO_2 = 90°$. Ако MO е медианата в правоъгълния триъгълник O_1O_2M, то в сила са равенствата $OO_1 = OO_2 = OM$.



черт. 5

Това показва, че точката O е център на окръжност, която минава през точките O_1, O_2 и M. Лесно се установява, че O_1O_2BC е правоъгълен трапец. Тъй като OM е средна отсечка в трапеца, следва че е в сила $OM \perp BC$. Следователно тази окръжност (както и окръжностите k_1 и k_2) се допира до правата BC. Така естествено, *от решението на задачата*, се появи последната конфигурация на черт. 5 от три окръжности.

С окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, които се допират външно, могат да се свържат още много окръжности, като например следните:

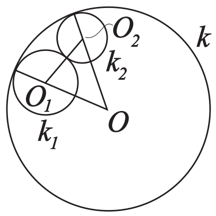
• окръжността с център симетричната на точката A спрямо O (вж. черт. 5) и радиус равен на $r_1 + r_2$. Окръжностите k_1 и k_2 се допират вътрешно до тази окръжност.

• окръжността с център пресечната точка на ъглополовящата на ъгъл O_1MO_2 с централата O_1O_2 и радиус, равен на разстоянието от тази точка до отсечките O_1M и O_2M. Разглеждането на тази окръжност дава възможност за естествена пропедевтика на понятието описан четириъгълник.

• окръжностите, които се допират външно до k_1 и k_2 и до допирателната им BC. Полезно е учениците сами да открият не само „малката“ от тези две окръжности, но също така и „голямата“ окръжност.

Сега ще разгледаме една съвсем елементарна задача, чрез която в учебника [3] (стр. 186) сме илюстрирали външно и вътрешно допиращи се окръжности:

2. *Окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ са външно допирателни. Всяка от тях е вътрешно допирателна с окръжността $k(O, r)$. Да се изрази периметърът на триъгълника O_1OO_2 чрез радиуса r.*



черт. 6

Тъй като отсечката O_1O_2 свързва центровете на външно допиращите се окръжности k_1 и k_2 следва, че $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (черт. 6). Аналогично отсечките OO_1 и OO_2 свързват центровете на вътрешно допиращите се окръжности k и k_1, и съответно k и k_2. Тогава $OO_1 = r - r_1$ и $OO_2 = r - r_2$. Като съберем почленно левите и десните страни на трите равенства, за търсения периметър получаваме

$$O_1O_2 + OO_1 + OO_2 = 2r.$$

Една задача, с която показваме на учениците как елементарно се комбинират знанията за средна отсечка с разглежданите конфигурации е следната, която даваме за самостоятелна работа:

3. *Да се докаже, че ако две окръжности се допират вътрешно, така че диаметърът на по-малката окръжност да е равен на радиуса на по-голямата, то всяка хорда от голямата окръжност, чийто край е допирната точка, се разполовява от малката окръжност.*

Излагайки тази тема, винаги когато разглеждаме допиращи се окръжности, опитваме се да накараме учениците да осмислят следното правило:

> *Стандартно допълнително построение в задачите, в които има две външно или вътрешно допиращи се окръжности, е построяването на тяхна обща допирателна.*

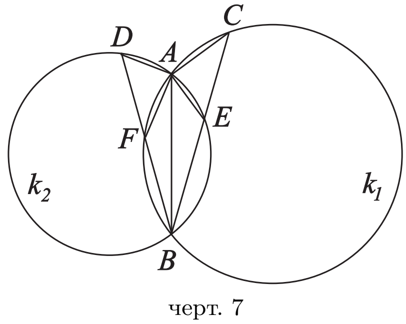
Следващите две задачи, които даваме за самостоятелна работа, подходящо илюстрират това правило.

4. *Окръжностите k_1 и k_2 се допират в точката M. През M са прекарани правите g, пресичаща k_1 и k_2 съответно в точките A и B, и l, пресичаща k_1 и k_2 съответно в точките C и D. Да се докаже, че правите AC и BD са успоредни.*

5. *Окръжностите k_1 и k_2 се допират вътрешно в точката M. Хордата AB в окръжността k_1 допира окръжността k_2 в точката L. Да се докаже, че ML е ъглополовяща в триъгълника AMB.*

Накрая разглеждаме три по-трудни задачи за пресичащи се окръжности. Целта ни е да покажем, че в подобни задачи с успех могат да се прилагат знанията за вписани и периферни ъгли.

6. *Окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките A и B. Точката C лежи на k_1 и хордата BC пресича k_2 в точката E. Точката D лежи на k_2 и хордата BD пресича k_1 в точката F. Да се докаже, че равенството $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$ е в сила тогава и само тогава, когато $CE = DF$.*



черт. 7

Нека е в сила равенството $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$ (черт. 7.). Тъй като на равните вписани ъгли съответстват равни хорди за всяка от двете окръжности, получаваме $AC = AF$ и $AD = AE$. От друга страна са в сила равенствата $\sphericalangle AEC = 180° - \sphericalangle AEB = \sphericalangle ADF$. Тогава $\triangle AEC \cong \triangle ADF$ и $CE = DF$.

Обратно, нека е в сила равенството $CE = DF$. Както установихме по-горе е изпълнено $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ADF$. Аналогично доказваме, че $\sphericalangle ACE = \sphericalangle AFD$. Следователно $\triangle AEC \cong \triangle ADF$ и оттук $AC = AF$. Тогава и вписаните ъгли, от които се виждат тези две равни хорди, са равни, т.е. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$.

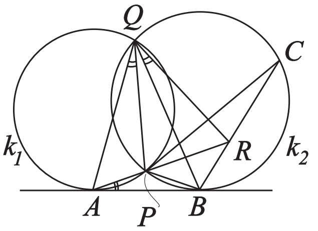
Един интересен резултат за конфигурация от три пресичащи се две по две окръжности представлява решената в [3] задача 1 на стр. 188:

7. *Окръжностите k_1, k_2 и k_3 имат равни радиуси и се пресичат две по две по следния начин: k_1 пресича k_2 в точките A и A_1, k_2 пресича k_3 в точките B и B_1 и накрая k_3 пресича k_1 в точките C и C_1. Точката A е външна за окръжността k_3, точката B е външна за k_1 и точката C — за k_2. Да се докаже, че $\widehat{AB_1} + \widehat{BC_1} + \widehat{CA_1} = 180°$.*

Следващата задача представлява едно ефектно приложение на следното твърдение:

> *Ако две прави имат общи точки A и B с окръжността k и сключват ъгли с хордата AB, всеки от които има големината на вписан ъгъл в k, под който се вижда хордата AB, то правите са допирателни към k.*

8. *Окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките P и Q. Общата им външна допирателна, която е по-близо до точката P, се допира до тях съответно в точките A и B. Допирателната през P към k_1 пресича k_2 в точката C, а R е пресечната точка на правите AP и BC. Да се докаже, че правите BP и BR се допират до окръжността, описана около триъгълника PQR.*



черт. 8

Като имаме предвид формулираното преди задачата твърдение, достатъчно е да докажем, че са в сила равенствата $\sphericalangle BPR = \sphericalangle BRP = \sphericalangle PQR$. Нека на черт. 8. използваме означенията $\sphericalangle BAP = \alpha$ и $\sphericalangle ABP = \beta$. Тогава от равенствата на периферни и вписани ъгли в k_1 и k_2 имаме $\sphericalangle AQP = \alpha$, $\sphericalangle BQP = \beta$. Освен това $\sphericalangle BPR = \alpha + \beta$ по теоремата за външния ъгъл (приложена за $\triangle ABP$). Следва основното наблюдение: *точките A, B, Q и R лежат на една окръжност.* Наистина, от окръжността k_1 следват равенствата

$$\sphericalangle QAR = \sphericalangle QAP = \sphericalangle QPC,$$

а от k_2 получаваме

$$\sphericalangle QPC = \sphericalangle QBC = \sphericalangle QBR,$$

така че $\sphericalangle QAR = \sphericalangle QBR$. Сега лесно се вижда, че

$$\sphericalangle BRP = \sphericalangle BRA = \sphericalangle BQA = \alpha + \beta, \quad \sphericalangle BQR = \sphericalangle BAR = \alpha + \beta,$$

което води до желаните равенства

$$\sphericalangle BPR = \sphericalangle BRP = \sphericalangle PQR = \alpha + \beta.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски. Математика за 8. клас. Анубис, С., 1997.
[2] З. Паскалева, Г. Паскалев. Математика за 8. клас. Летера, С., 1997.
[3] И. Тонов, И. Трендафилов, Р. Караджова. Математика за 8. клас. Булвест 2000, С., 1999.
[4] А. Лангов, В. Георгиев. Геометрия за 9. клас. ИК „Свят. Наука“, С., 1998.
[5] D. Vladeva, I. Trendafilov. Geometrical inequalities concerning a circle, 4-th Int. Conf. of Geometry and Appl., Varna, 1999.

Иван Димитров Трендафилов,
Институт по приложна математика и информатика,
Технически Университет — София,
1000 София

ABOUT THE THEME “MUTUAL POSITIONS OF TWO OR MORE CIRCLES”

Ivan Dimitrov Trendafilov

In this paper advantages are considered, for the theme "‘Mutual positions of two or more circles"’ should presented as an alone lesson at the end of the section "‘Circles"’ in 8-th grade geometry studing. Elementary and also more difficult problems are solved.