МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

ДА РАЗЧУПИМ ТРАДИЦИЯТА С МАЛКО *ХАОС*
(някои нестандартни за училището теми по информатика и математика, които са *без праг и без таван*)

Евгения Сендова

The art of asking the right questions in mathematics
is more important than the art of solving them.
Georg Cantor

В доклада се разглеждат въпроси, свързани с възможността да се модернизира учебното съдържание по информатика и математика и да се изгради у учениците и студентите изследователски дух. Особено подходящи за целта се оказват някои теми, свързани с *фрактали* и играта *Хаос*. Представени са методи за моделирането им с помощта на компютърни среди от изследователски тип. Споделени са впечатленията от въвеждането на такава тематика в обучението на ученици и студенти от различни възрасти в България и в други страни.

1. Образователни стратегии за изграждане на изследователски дух. Култивирането на изследователски дух в обучението по математика, природни и хуманитарни науки винаги е представлявало сериозно предизвикателство за специалистите в образователната сфера. Обучението в изследователски дух обхваща различни образователни стратегии и подходи, които се основават на следните принципи:

• учениците са в състояние да упражняват съществен контрол върху това, което научават;

• знанието е богато и има много измерения; не е необходимо да се следват тесни и строго предопределени пътища към познанието;

• обучаемите са индивиди със своя специфика, интереси и потенциал. Затова не е необходимо да отдаваме предпочитание на конкретен стил на обучение или на конкретен списък от умения, които трябва да се постигнат;

• в подходящо проектирана (физическа или културна) среда ученето може да става почти винаги по лесен и естествен начин (както се учи родният език).

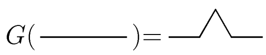
Постепенният строеж на нови знания въз основа на способността на обучаемия да интерпретира собствения си опит е особено важен в природните науки, а в последно време се препоръчва в редица световни стандарти по математика. Вторият важен фактор, способстващ за осъществяването на горните принципи, е навлизането на новите информационни и комуникационни технологии в учебнияпроцес. В резултат на това границите между математическата култура и културата в ежедневен смисъл се изместват и много дейности, традиционни за други природни науки, стават елемент от математическата култура. Ключовата роля на технологиите е да се помогне на учениците да изградят, да подложат на проверка и да усвършенстват идеите си. Вярно е, че те трябва да знаят как да стигнат до отговора на редица задачи, но *животът не се състои само от отговори* [1]. За учениците става все по-важно умението да формулират оригинални идеи, за да могат по-късно да отговорят на въпроси, които днес нито преподавателите им, нито те предполагат, че ще възникнат. И този изследователски дух може да се прилага с успех в най-различни области, стига да имаме компютърни среди от тип *редактор на идеи* [2]. В такива среди можем да моделираме дадено явление и да го *облечем в програма* на език, близък до езика на съответната област. В зависимост от резултатите на програмата идеите могат да се коригират, модифицират и доразвият. Такъв дух на учене и работа се пропагандира от създателите и последователите на Лого. В компютърните среди от типа на Лого може да се измени съотношението между "робуването на установеното учебно съдържание" и експериментирането на нови образователни стратегии. Идеята на Пепърт (един от създателите на Лого) е не да направи традиционната училищна математика *научваема,* а по-скоро да предложи *научваема* математика. За тази цел той заменя евклидовата геометрия с *костенурковата геометрия* [3]. Идеите, свързани с такъв тип обучение по геометрия, действително носят изследователския дух, но все още срещат известна съпротива и неразбиране в училищните среди, защото доста се различават от традицията в учебното съдържание по геометрия. Пепърт е далеч от мисълта да отрече важността на строгото доказателство на добре формулирани съждения – за хора, които имат такъв стил на мислене, това може да е естественият път за изграждане на геометричното знание. Но за останалите (а това са повечето жертви на училищната математика) не са необходими по-ясни или по-добри формални обяснения, а концептуализация на конкретното, като се даде на обектите централна роля в мисловния процес [1]. Когато експериментираме с дадена формализация, можем да получим по-нататъшно прозрение или по-задълбочено разбиране на дадено явление, която на свой ред да ни доведе до нова формализация. Експериментите ни позволяват да проверим хипотезите си, да преценим кое е съществено и кое може да бъде отхвърлено. Една конкретно-формулирана задача може да се разглежда в най-различни аспекти и да доведе до изследване и на нови идеи (които не са присъствали в първоначалната формулировка).

По-надолу ще дадем няколко примера на математически теми, които са много богати за изследване и вариации, и които с успех биха могли да обогатят часовете по математика и информатика с ученици и студенти.

2. Основни математически понятия във *фрактален* контекст. Понятието *фрактал* е дефинирано в речниците като *геометрична форма, която се повтаря многократно в умален вид, произвеждайки неправилни форми и повърхности, които не могат да се представят със средствата на класическата геометрия* [4]. Думата е *изкована* от Манделброт от латинското прилагателно *fractus*, означаващо *начупен.* Самият той определя фрактала като *множество, хаусдорфовата размерност на което е по-голяма от топологическата му размерност* [5]. Да си представи човек как изглеждат фракталите според тази дефиниция не е много лесно... Затова по-естествено е да се разгледат конкретни примери на фрактали и да се изследват свойствата им, а когато човек натрупа достатъчен опит, може да се върне към дефиницията на Манделброт. Макар че за баща на фракталната геометрия обикновено се приема той, много от фракталите се срещат в произведенията на такива класици на математиката като Кантор (1872), Пеано (1890), Хилберт (1891), Кох (1904), Шерпински (1916), Жулиа (1918) или Хаусдорф (1919). Вярно е, че кривите и конструкциите, описани от тези математици играят ключова роля в създадената от Манделброт теория. Но и те самите, и съвременниците им са възприемали въпросните конструкции по-скоро като изключителни обекти, нещо като *математически чудовища,* а не като крайъгълни камъни на нова геометрия, описваща природата. Разбира се много от най-ранните фрактали са свързани с опити по-пълно да се изследват фундаментални математически понятия и някои от тях (като например множеството на Кантор и триъгълника на Шерпински) изиграват съществена роля в развитието на топологията [6]. Визуализацията на фракталите става възможна благодарение на компютрите и затова и областта от математиката, която се занимава с тях, се оформя като самостоятелна сравнително скоро – в края на 60-те и началото на 70-те години на 20-и век.

Да разгледаме някои от най-известните фрактали и начини, по които можем да ги моделираме и изследваме.

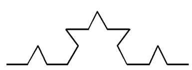
2.1 Криви на Кох. Кривата на Кох носи името на откривателя си (шведския математик Хелге фон Кох) и може да се опише по следния начин:



С други думи всяка отсечка поражда *чупка*, която е част от равностранен триъгълник със страна, равна на 1/3 от отсечката-*родител.* Тя може да се моделира с помощта на Лого-процедура по следния начин [7]:

```
ЗА ЧУПКА :S
НАПРЕД :S / 3
НАЛЯВО 60
ПОВТОРИ 2 [FD :S / 3 RT 120]
НАДЯСНО 180
НАПРЕД :S / 3
END
```

Сега можем да приложим функцията G към всяка новополучена отсечка, т.е. ще поискаме всяка отсечка от новата фигура *да роди чупка* по същия закон – да се раздели отсечката на 3 равни части и да се замести средната ѝ част с триъгълна чупка със страна, равна на 1/3 от страната-*родител* (фиг. 1)

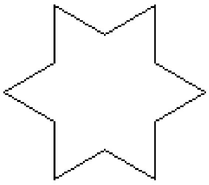


Фиг. 1

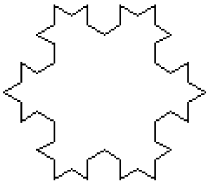
За да опишем този фрактал на Лого, ще модифицираме процедурата ЧУПКА в процедура ФРАКТАЛ, като заместим всяка отсечка (начертана с командата НАПРЕД) с рекурсивно обръщение към ФРАКТАЛ, но с подходящо видоизменени входове за страната и броя на поколенията:

```
ЗА ФРАКТАЛ :S :G
АКО :G = 0 [НАПРЕД :S СТОП]
ФРАКТАЛ :S / 3 :G - 1
НАЛЯВО 60
ПОВТОРИ 2 [ФРАКТАЛ :S / 3 :G - 1 RT 120]
НАДЯСНО 180
ФРАКТАЛ :S / 3 :G - 1
КРАЙ
```

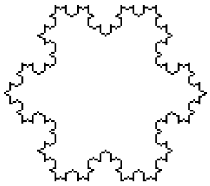
Ако заместим страните на един равностранен триъгълник с фрактал от горния вид, ще получим *снежинки на Кох.* Ето как изглеждат те при едно, две, три и четири поколения чупки (фиг. 2–5)



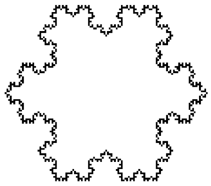
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

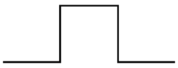


Фиг. 5

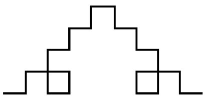
Сега можем да редактираме процедурата за крива на Кох, като заместим триъгълната чупка с квадратна, т.е. да разгледаме следната функция F:

F (———)= 

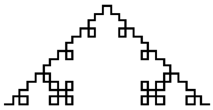
Ето фракталите в този случай при едно, две, три и четири поколения чупки – те все повече заприличват на български шевици (фиг. 6-9)



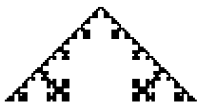
Фиг. 6



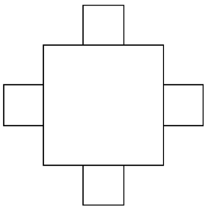
Фиг. 7



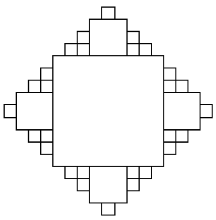
Фиг. 8



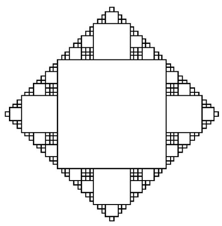
Фиг. 9



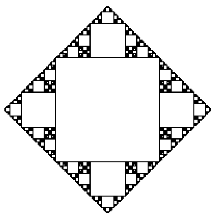
Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13

Можем да изследваме периметъра и лицето на снежинките на Кох с триъгълна и с квадратна чупка. За целта разглеждаме фигури, които са наложени една върху друга снежинки на Кох с различен брой поколения (например за случая на квадратна чупка – фиг. 10-13). Можем първоначално да обобщим и модифицираме процедурата за генериране на снежинки на Кох, като въведем променлива за пресмятане на интересуващите ни величини за различни поколения и параметър за броя на страните на N-ъгълника, генериращ чупката. Ето една примерна процедура на Comenius Logo за пресмятане на периметъра на снежинки на Кох от различни поколения с чупка, която може да бъде част от произволен правилен N-ъгълник

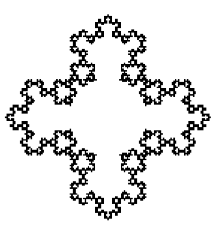
```
to experiment :n :s :g
 start ngon\_koch :n :s :g pr :dist
end

to start
 draw
 make "dist 0
 ;създаване на глобална променлива, в която ще се пресмята периметъра на
 ;снежинката на Кох
end

to ngon\_koch :n :s :g
 ; снежинка на Кох с n страни
 repeat :n[koch:n:s:g rt 360/:n]
end

to koch :n :s :g
 if :g=0 [fd:s make "dist :dist+ :s stop]
 koch :n :s/3 :g-1 lt 180-360/:n
 repeat :n-1 [koch :n :s/3 :g-1 rt 360/ :n] lt 180
 koch :n :s/3 :g - 1
end
```

Лесно може да се изследва редицата от периметрите и от лицата на снежинките на Кох с нарастващ брой на поколенията чупки. След достатъчен брой експерименти, попълване и анализ на дадената по-долу таблица учениците ще натрупат добра интуиция за такива основни математически понятия като *растящи редици* (ограничени и неограничени) и ще получат добра визуализация на понятието *геометрична прогресия.*

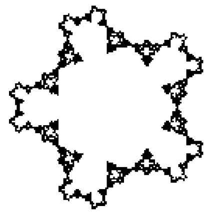
По-нататък те могат мотивирано да преминат към строго пресмятане на лицето на граничната снежинка на Кох (когато $n \to \infty$). Освен това ще се натъкнат на едно поразително свойство на тези криви – че *дори да са по-дълги от разстоянието до Слънцето, те се събират на компютърния екран* [8].

Брой поколения	Дължина на началната страна	Снежинка на Кох с триъгълна чупка		Снежинка на Кох с квадратна чупка	
		Периметър	Лице	Периметър	Лице
0	100	300	4330,13	400	
1	100	400	5773,5	666,67	
2	100	533,33	6415	1111,11	
3	100	711,11	6700,11	1851,85	
4	100	948,15	6826,83	3086,42	

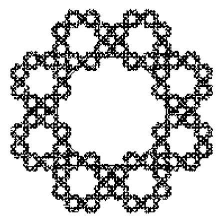
Процедурата `ngon_koch` може да се използва за интересни нови изследвания и още да се обобщи с възможност за различие във вида на чупката и на многоъгълника, както и на ориентацията им, например лява m-ъгълна чупка – десен n-ъгълник (фиг. 14-17) и дясна m-ъгълна чупка – десен n-ъгълник (фиг. 18-21)



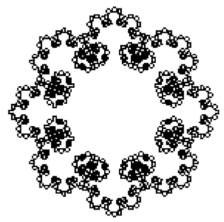
Фиг. 14



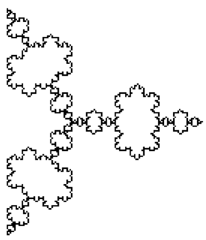
Фиг. 15



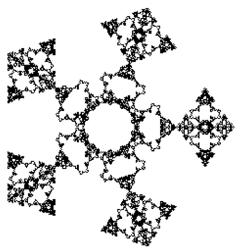
Фиг. 16



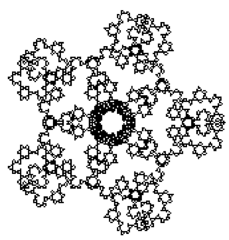
Фиг. 17



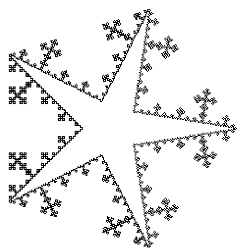
Фиг. 18



Фиг. 19



Фиг. 20

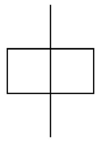


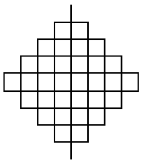
Фиг. 21

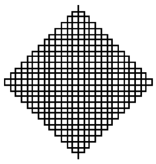
Сега може да се зададат множество въпроси от типа: *Какво ще стане, ако изменим началните условия*? *Има ли фрактали с ограничен периметър и неограничено лице, с неограничен периметър и неограничено лице, ограничен периметър и ограничено лице*?

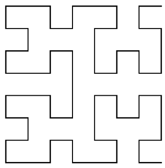
Както споделят редица изтъкнати специалисти по математическо образование [6, 8, 9, 10], фракталите, получени със заместване на отсечка по определен закон, са не само генератор на красиви криви, но ако са структурирани по подходящ начин, те предоставят богата среда за алгебрични и геометрични експерименти за ученици от различни класове и с различни интереси. Самият Манделброт отбелязва в увода на [6], че колкото и иронично да звучи, много от фракталите са открити като примери на патологично поведение, но всъщност те отразяват закона на вселената. Формите в природата, които не са фрактали, са изключение. *Аз обичам евклидовата геометрия*, казва той, *но тя не дава разумна представа за света – планините не са конуси, облаците не са сфери, дърветата не са цилиндри, нито светкавицата пътува по права линия. Почти всичко около нас е неевклидово* ...

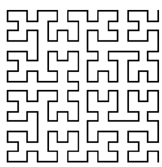
2.2. Криви, запълващи равнината. Кривата на Пеано може да се получи като вариант на кривата на Кох (всяка отсечка се замества с отсечка, на която са добавени две квадратчета с дължина, равна на 1/3 от отсечката – фиг. 22). Както се вижда, последователните итерации на кривата на Пеано (фиг. 23-24) запълват квадрат. Всяка итерация е подобна на предишната (както бе и при кривата на Кох). Но за разлика от последователните етапи от конструкцията на Кох, които от известно място нататък приличат на граничната крива, границата на итерациите на кривата на Пеано е запълнен квадрат (който не е подобен на никоя итерация). Следователно трябва да сме много внимателни при описанието на понятието “себеподобие”.

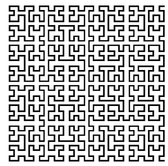

Фиг. 22


Фиг. 23


Фиг. 24


Фиг. 25

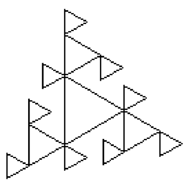

Фиг. 26

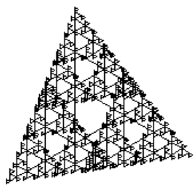

Фиг. 27

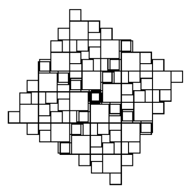
Аналогично кривата на Хилберт (фиг. 25-27) може да запълни произволна част от равнината.

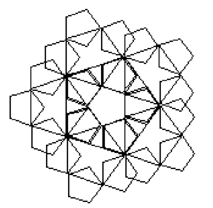
Може да изглежда, че запълващите равнината криви са любопитно явление и са конструирани като един вид математически парадокс. Но се оказва, че основни градивни блокове в живите организми са на този принцип. Освен това тези т.нар. *монструми* (чудовища) намират голямо техническо приложение в компютърната графика (цели 100 години след откриването им).

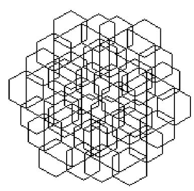
2.3. Поколения от подобни правилни N-ъгълници. Следващите фрактали, които ще разгледаме, се състоят от няколко поколения подобни правилни многоъгълници – един правилен N-ъгълник *е родил* себеподобни N-ъгълници (разположени около върховете му), които от своя страна *са родили* себеподобни N-ъгълници и т.н. (фиг.28-32). В конкретните примери *децата* са по-малки от *родителите* си.


Фиг.28


Фиг. 29


Фиг. 30


Фиг. 31

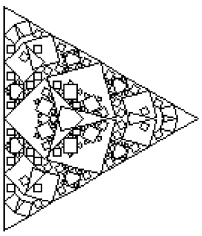

Фиг. 32

Всички фрактали от този вид могат да се генерират с помощта на следната рекурсивна Лого-процедура [7]:

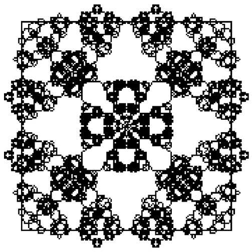
```
за N_ъгълници :n :s :g
 ако :g = 0 [стоп]
 повтори :n [напред :s N_ъгълници :n :s * 0.6 :g - 1 Надясно 360 / :n]
край
```

Тази елегантна с простотата си процедура може да се обобщи или модифицира: като въведем параметър за завъртане на N-ъгълника-*наследник* спрямо N-ъгълника-*родител*; или като увеличаваме броя на страните на *наследниците* във всяко следващо поколение; или пък като въведем параметър за коефициент на нарастване/намаляване на размера на следващите поколения и т.н. От информатична гледна точка е интересно да се илюстрира механизма на изпълнение на рекурсията с въвеждане на цвят, съответстващ на поколението; после с тон, чиято честота и продължителност зависят от поколението и т.н. Като страничен ефект ще получим фрактали, генериращи музика, която в някакъв смисъл отразява тяхната структура. По-нататък правилните многоъгълници може да се заменят със снежинки на Кох.

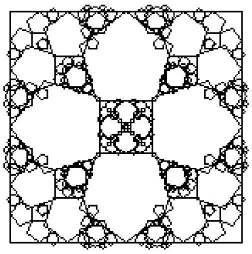
Редица изследователски въпроси от математически характер могат да се разглеждат с ученици от различни възрастови групи – например: да се намери закономерност между броя на *триъгълниците-деца* на всеки ред от фиг. 28 (4-2-2-1); да се види връзката на тези числа с триъгълника на Паскал; да се пресметне как се мени периметъра и лицето на даден вид фрактал с увеличаване на броя на поколенията; какво може да се каже за обвивката на тези фигури и т.н. [9].



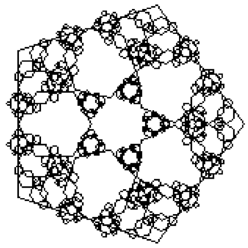
Фиг. 33



Фиг. 34



Фиг. 35

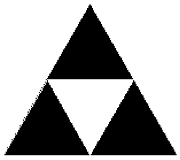


Фиг. 36

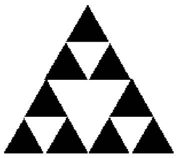
Интересни фрактали могат да се получат посредством обединяване и вариране на идеите за фрактали от типа на Кох и на поколения от подобни многоъгълници. Например, ако заменим чупката в кривата на Кох с N-ъгълник (с четири пъти по-малка дължина на страната и дясно ориентиран), получаваме следните модификации на снежинките на Кох (фиг. 33-36).

2.4. Триъгълник на Шерпински. Един от класическите фрактали (40 години по-млад от множеството на Кантор) е въведен като математически обект през 1916 г. от големия полски математик Шерпински (1882–1969). Тази геометрична конструкция се получава при следния процес: започваме с равностранен триъгълник (фиг. 37). Свързваме средите на страните му и изрязваме средния от получените четири еднакви триъгълника (фиг. 38). Това е основната стъпка на процеса. С други думи прилагаме същата процедура към останалите (черните) триъгълници и получаваме конфигурацията на фиг. 39. Продължаваме този рекурсивен процес до желаната дълбочина на рекурсията. Така на първо ниво получаваме 3, а след това 9, 27, 81, 243 и т.н. триъгълника, всеки от които е умалено копие на фигурата от предишното ниво (фиг. 38-41).

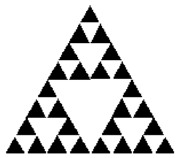
Фиг. 37



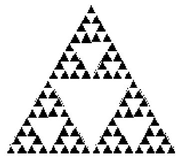
Фиг. 38



Фиг. 39



Фиг. 40



Фиг. 41

Горните фигури са получени с помощта на следната процедура на Comenius Logo:

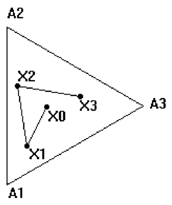
```
to sierpinski :s :g
 if :g = 0 [black\_tri :s stop]
 repeat 3 [sierpinski :s/2 :g-1 fd :s  rt  120]
end

to black\_tri :s
 ;чертане на запълнен равностранен триъгълник
 polygon list 3 list :s 120
end
```

Макар че кривите на Кох и триъгълникът на Шерпински се получават в резултат на конкретен конструктивен процес, този процес е безкраен и всъщност фракталите съществуват като идеализация – граничното множество, към което клони редицата от последователни нива на рекурсията.

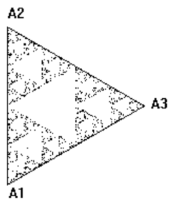
2.5. Играта Хаос. Играта *Хаос* (наречена така от Michael Barnsley [6]) има следните правила:

Изберете 3 произволни точки в равнината и ги означете съответно с A_1, A_2 *и* A_3. *Вземете зарче и избирайте по случен начин числата 1, 2 или 3 (съпоставете на всяко число две страни на зарчето). Започнете играта, като изберете случайна точка върху листа хартия и я отбележете с молив (например* X_0*). Сега изберете случайно число от едно до три. Ако се падне например числото 2, премерете разстоянието от текущата точка* X_0 *до* A_2 *и поставете нова точка* (X_1) *в средата на отсечката* X_0A_2. *Продължете този процес, като отбелязвате винаги средата на отсечката, свързваща текущата точка и случайно избрания връх на триъгълника* $A_1A_2A_3$. *Какво ще образуват точките след достатъчно много итерации на играта?*

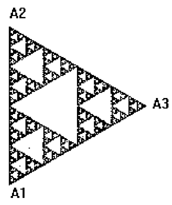
Ето как изглеждат първите няколко хода (фиг. 42), първите 1000 точки (фиг. 43), първите 6000 точки (фиг. 44). Получава се фигура, която първоначално "не е за вярване" – от хаоса се е родил триъгълникът на Шерпински, който е олицетворение на ред и структурираност. С други думи наблюдаваме как процес, свързан със случаен избор, може да доведе до напълно определна форма. И макар че в никой момент не можем да кажем къде ще бъде следващата точка, можем да предвидим вида на граничното множество от точки в играта *Хаос*. Този факт показва една интересна зависимост между случайните процеси и детерминистичните по своя характер фрактали.



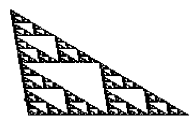
Фиг. 42



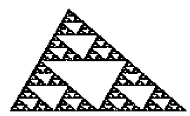
Фиг. 43



Фиг. 44



Фиг. 45



Фиг. 46

Може да се съобрази, че вероятността да попадне точка от играта в конкретен подтриъгълник на Шерпински от k-то ниво е $1/3^k$. Въз основа на това се доказва, че за произволна точка от тригълника на Шерпински може да се намери достатъчно близка точка от играта *Хаос*, стига да играем достатъчно дълго [6, стр. 341]

2.6. Някои впечатления от *хаос*-а в действие. Когато представих играта *Хаос* на седмокласници (от 119 у-ще, в рамките на зимен лагер), те се включиха с ентусиазъм в генериране на хипотези за вида на множеството от точки. Преобладаваха мненията, че ще се получат хаотично разпръснати точки вътре в триъгълника, но дори и тези, които очакваха някаква по-ясно структурирана следа, ахнаха при вида на триъгълника на Шерпински. Последваха серия от въпроси: *Това само за равностранен триъгълник ли важи? Важно ли е от каква точка тръгва играчът? Важно ли е въобще, че става дума за триъгълник?* Има ли *хаотични* игри, които генерират други фрактали освен триъгълник на Шерпински? Не случайно Кантор подчертава важността на *изкуството да се задават правилните въпроси в математиката.* Това всъщност беше и голямата ми надежда – да се събуди любопитството им, да разберат, че и те могат да участват в един изследователски процес заедно с преподавателя, защото на много от въпросите им и аз все още не знаех отговора. *Да проверим!* – споделих нетърпението им и с леки модификации в програмата получихме следния резултат за неравностранни триъгълници (фиг. 45-46).

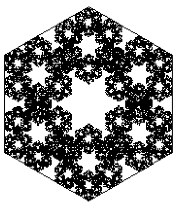
А ако увеличим броя на страните? Да видим поведението на костенурката в случая на квадрат, петоъгълник, шестоъгълник и т.н. – предложиха по-нататък децата. Уви, в този случай хаосът беше наистина пълен и учениците заключиха, че само триъгълникът *има шанс с хаоса.* Пък и бе станало време за ски …

По-късно моделирахме същата игра със студенти от пети курс – специалност *математика и информатика.* Тяхната изненада бе не по-малка от тази на седмокласниците, но те предложиха да обобщим задачата, като въведем коефициент, с който да умножаваме разстоянието до избрания връх. Ето как изглежда предложената от студентите процедура за играта *Хаос* (естествено тяхното решение е по-компактно и доста по-общо от това на учениците):

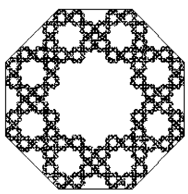
```
to ngon :n :s
 ;построява се многоъгълник, чиито върхове се запомнят и надписват
 repeat :n [make word "A repc pos tt word "A repc fd :s rt 360 / :n]
end
```

```
to game :n :k
 ;безкраен процес, при който се поставят точки според правилата
 ;на играта Хаос
 move\_to thing word "a 1 + random :n :k
 game :n :k
end

to move\_to :p :k
 ;насочване на костенурката към точка със зададени координати и
 ;придвижването й на разстояние, умножено по коефициент k, след
 ;което се поставя точка
 seth towards :p pu fd :k * dist :p pd dot
end

to dist :p
 ;операция, която връща разстоянието от костенурката до произволна точка
 output abs ( pos - :p )
end
```

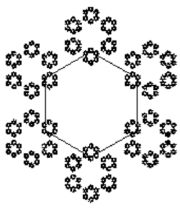
Оказа се, че при коефициенти, по-големи от 0.5, се получават красиви фрактали и при правилни многоъгълници (фиг. 47-50), а дори и при произволни (включително и неизпъкнали) многоъгълници (фиг. 51). Бяха формулирани още интересни за изследване въпроси, например: *Какво ще се получи, ако зарчето не е идеално, т.е. ако някой от върховете на N-ъгълника се избира по-често?*



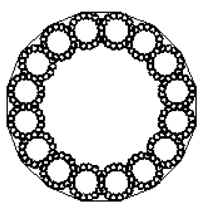
Фиг. 47



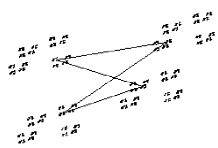
Фиг. 48



Фиг. 49



Фиг. 50



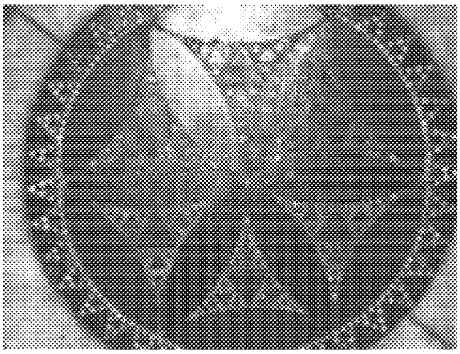
Фиг. 51

3. Заключение. Ясно е, че същността на математиката не е да правим единствено експерименти. Но те могат да ни дадат прозрение за теоретическа обосновка. И ако това може да стане най-вече с подкрепата на учителя, то генерирането на хипотези, наблюдаването на закономерности, откриването на съществените за даден процес фактори са все важна съставна част от математиката, която можем да направим достъпна за учениците с помощта на подходяща компютърна среда от изследователски тип [11].

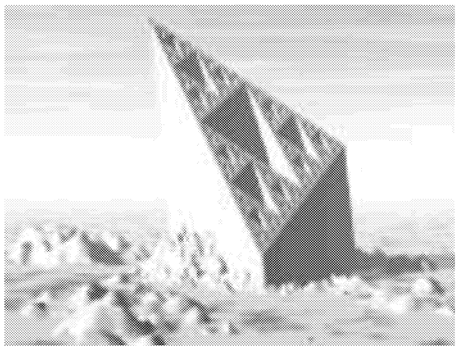
Интересното от образователна гледна точка при моделиране на явления в такава среда е, че учениците и студентите са въвлечени не само в решаване на проблеми, а и във формулиране на задачи, които *те самите* искат да решат и които са смислени за тях в конкретния контекст. Нещо повече, те могат да участват в изследователския процес, като обогатяват *инструментариума* на средата с информатични средства, които са им най-удобни за моделираното явление.

Първите опити да се обогати традиционното учебно съдържание с елементи от фракталната геометрия [6, 9, 10, 11] показват, че учениците заедно с учителите си са силно мотивирани да преживеят изследването на нови теми, да откриват интересни задачи и да обсъждат методи за решаването им. По този начин те имат шанса да се докоснат до математиката като творчество и *не само да учат правилата на играта, а да изпитат удоволствието наистина да играят.*

Не по-малко важно е, че някои от въпросите, които естествено възникват при моделирането на фракталите на Кох и играта *Хаос* са типични за модерни области на математиката от типа на теорията на динамичните системи, кодирането и компресирането на образи [6], анализ на фракталите [12]. Оказва се, че фракталите са и предмет на изкуството – от мотиви на древни съдове [13] и стъклопис на катедрала от12-и век (фиг. 52) до съвременни произведения на изкуството (фиг. 53) и обекти на научната фантастика [14].



Фиг. 52



Фиг. 53

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Papert What is Logo? Who needs it? in *Logo Philosophy and Implementation,* LCSI, 1999.

[2] E. P. Goldenberg. (1999) Bringing Back Formal Language: A Use to Counter My Worries about Computers in the Mathematics Classroom. In: Proceedings of the Seventh European Logo Conference Eurologo'99, (Eds R. Nikolov, E. Sendova, I. Nikolova, I. Derzhanski) Sofia, Bulgaria, 22-25 August 1999.

[3] S. Papert. Mindstorms: Children, Computers, Powerful Ideas. The Harvester press, 1980.

[4] The American Heritage Dictionary, Houghton Mifflin Co., 1992, 719 p.

[5] Н. Долбилин. Игра "Хаос" и фракталы. *Квант*, **4** (1997), 1–8.

[6] H. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe. Fractals for the Classroom. NCTM, Springer-Verlag, 1992.

[7] Д. Дичева, Р. Николов, Е. Сендова. Информатика в стил Лого. Просвета, София, 1996.

[8] P. Lewis. A Fractal Curriculum. Education Development Center Inc, 1990.

[9] E. P. Goldenberg. Seeing Beauty in Mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry. Journal of Mathematical Behavior, **8** (1989), 169–204.
[10] E. P. Goldenberg. Drawing Fractals. Education Development Center Inc, 1989.
[11] Е. Сендова. Компютърни микросветове и модели за интегриране на учебния и творческия процес. Дисертация, 2001.
[12] R. Strichartz. Analysis on Fractals. Notices of the American Mathematical Society, 1999. 1199 p.
[13] A. Walat. Modelowanie i simulacja za pomoca komputer. Podrecznik dla klasy III, oficyna edukacyjna, Warszawa, 2001.
[14] C. Pickover. Chaos in Wonderland. St. Martin's Griffin, NY, 1994.

Евгения Сендова
Институт по математика и информатика
ул. "Акад. Г. Бончев" бл. 8
1113 София
e-mail: jenny@math.bas.bg

INTRODUCING A LITTLE *CHAOS* TO BREAK THE TRADITION (Some non-traditional topics for classes in informatics and mathematics *with no threshold and no ceiling*)

Evgenia Sendova

The paper deals with some non-traditional topics for the education in mathematics and informatics such as fractals and the game of *Chaos*. Methods for presenting them by means of computer environments of exploratory type are considered together with impressions from some educational experiments in both Bulgarian and international contexts.