МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

НЕИНТЕГРУЕМОСТ НА ХАМИЛТОНОВИ СИСТЕМИ И ДИФЕРЕНЦИАЛНА ТЕОРИЯ НА ГАЛОА*

Огнян Христов

Статията е обзор на един съвременен подход за доказване неинтегруемост на Хамилтонови системи базиран на диференциалната теория на Галоа. Този подход е демонстриран върху такива важни за математическата физика системи като движение на твърдо тяло във флуид и многомерния аналог на тази система, както и моделите на Грос–Невьо.

1. Въведение и основни резултати. Нека (M^{2n}, ω) е комплексно симплектично многообразие, H е аналитична функция върху M^{2n}, а съответната Хамилтонова система е

$$\dot{x} = X_H(x). \tag{1}$$

Една Хамилтонова система е интегруема по Лиувил ако съществуват n първи интеграла $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ в инволюция, т.е. $\{F_i, F_j\} = 0$ за всички i и j, където $\{,\}$ е скобката на Поасон.

Нека $z = z(t)$ е някакво решение (различно от положение на равновесие) на (1), а $\Gamma := \{z = z(t)\}$ е неговата интегрална крива. Уравненията във вариации относно $z = z(t)$ са

$$\dot{\eta} = \frac{\partial X_H}{\partial x}(z(t))\eta \tag{VE}$$

Използвайки dH като пръв интеграл за (VE) и редуцирайки по него получаваме т. нар. уравнения в нормални вариации

$$\dot{\xi} = A(t)\xi \quad \text{с размерност } 2(n-1). \tag{NVE}$$

Един от първите, който дава критерии за неинтегруемост е Поанкаре. Нека M^{2n} е реално и $z = z(t)$ е периодично решение на (1). Поанкаре разглежда матрицата на монодромия на (VE) [1]. Той доказва, че ако системата (1) има k първи интеграла, то k характеристични експоненти са 0. Ако допълнително тези k първи интеграла са в инволюция, то $2k$ характеристични експоненти са 0.

Съществуват и други методи, призлизащи от Поанкаре базирани грубо казано върху сложното поведение на решенията, като съществуване на изолирани периодични решения или разцепване на асимптотични повърхности и др. (виж например обзора [2]).

*Частично подпомогнат от договор ММ 1003/2000 с МОН

През 1982 Зиглин доказва следния резултат за неинтегруемост на комплексно аналитични Хамилтонови системи.

Теорема 1 (Зиглин [3]). *Нека системата* (1) *има n първи интеграла, независими в околност на* Γ*, но незадължително върху* Γ*. Да предположим, че групата на монодромия на (NVE) има нерезонансен елемент g. Тогава всеки друг елемент g' на групата на монодромия на (NVE) изпраща собствените направления на g в собствени.*

Да припомним – $g \in Sp(2n, \mathbb{C})$ (групата на монодромия е подгрупа на симплектичната група) е резонансен ако $\lambda_1^{r_1} \dots \lambda_n^{r_n} = 1$, тук r_i са ненулеви цели, а λ_i са собствените числа на g.

Забележка. В теоремата на Зиглин не се предполага инволютивност на интегралите и като че ли е предназначена за $n = 2$ – при по-големи размерности винаги има резонанси.

Друг подход за доказване на неинтегруемост е основан на групата на Галоа на (VE).

Теорема 2 (Ramis, Morales Ruiz [4]). *Нека* (1) *притежава n мероморфни първи интеграла в инволюция в околност на* Γ*, но незадължително върху* Γ*. Тогава компонентата на единицата на групата на Галоа G^0 на (VE) по отношение на* Γ *е абелева.*

До голяма степен теоремата е естествена – абелевостта на Поасоновата алгебра на първите интеграли се "пренася" върху алгебрата на Ли на групата на Галоа.

В приложенията се използва следната схема: 1) намира се частно решение $z = z(t)$; 2) пишат се (VE) и (NVE); 3) проверява се абелевостта на компонентата на единицата на групата на Галоа на (VE), (NVE). Ако се докаже, че G^0 не е абелева, то системата е неинтегруема в смисъл на Лиувил. От абелевостта на G^0 обаче не следва интегруемост.

2. Диференциална теория на Галоа. Всъщност диференциалната теория на Галоа за линейни диференциални уравнения (ЛУ) е теория на Пикар–Весио (добро въведение в темата е [5]). Тук имаме друга концепция за интегруемост (отново свързана с Лиувил) – търсене на решения на ЛУ в явен вид.

Казваме, че едно ЛУ е интегруемо, ако общото му решение се изразява като комбинация на елементи, алгебрични над полето от коефициенти, интеграли от такива и интеграли от експоненти на алгебрични елементи.

Един от основните резултати на тази теория е, че уравнението е интегруемо (в горния смисъл) тогава и само тогава, когато компонентата на единицата на групата на Галоа на уравнението е разрешима.

Нека K е диференциално поле и $'$ е диференциране в него. Примери за такива полета са $\mathbb{C}(x)$ – полето от рационални функции, $\mathcal{M}(\Gamma)$ – полето от мероморфни функции върху риманова повърхнина Γ.

Диференциален автоморфизъм в K е такъв автоморфизъм, който комутира с диференцирането.

Да разгледаме

$$x' = A(t)x, \qquad A \in Mat(m, K) \tag{2}$$

(или еквивалентно ЛУ от ред m). Разширение на Пикар-Весио L на (2) е разширение на K, а именно $L := K(u_1, \dots, u_m)$, където $u_1, \dots u_m$ е фундаменталната система на (2).

Група на Галоа на (2) е групата от всички автоморфизми на L, които запазват $K - G := Gal(L/K)$. Доказва се, че тази група е изоморфна на линейна алгебрична група над $\mathbb{C} - G \in Gl(m, \mathbb{C})$.

Примери. Следващите примери са в някакъв смисъл основни при построяване на групи на Галоа в по-високи размерности.

1) K е диференциално поле с характеристика 0, $a \in K$, но не е някаква производна в K. Разглежда се уравнението $y' = a$. Лесно се показва, че y е трансцендентен над K и $L = K(y)$ разширение на Пикар-Весио, чиято група на Галоа е изоморфна на $\mathbb{C}$. Наистина, при автоморфизъм на L σ

$$\sigma(y') = (\sigma y)' = \sigma a = a \to \sigma y = y + c$$

В този случай говорим за разширание с интеграл ($y = \int a$).

2) Вторият тип разширение е чрез присъединяване на екпонента от интеграл. Разглежда се $y' - ay = 0, a \in K$. Разширенито на Пикар-Весио $L = K(y)$ има група на Галоа, изоморфна на $\mathbb{C}^*$. Нека $\sigma : y \to \sigma y$. Тогава $\left(\dfrac{\sigma y}{y}\right)' = 0 \to \sigma y = cy$.

Дефиниция. *Нека K е диференциално поле, $'$ е диференцирането в него и L е разширението на Пикар-Весио за* (2)*. L се нарича Лиувилево разширение, ако съществува верига от диференциални разширения $K = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_r = L$, където всяко разширение се задава чрез присъединяване на един елемент $\alpha : K_{i+1} = K_i(\alpha)$, удовлетворяващ едно от следните условия:* 1) $\alpha' \in K_i$*;* 2) $\alpha'/\alpha \in K_i$*;* 3) α *е алгебричен над K_i.*

Ясно е, че ако едно ЛУ има Лиувилево разширение, то групата му на Галоа е разрешима. Доказва се и обратното, което както споменах по-горе е един от основните резултати. В частност, ако G^0 е абелева, то уравнението е интегруемо.

Да разгледаме още един пример, който се среща доста често в приложенията. Всяко уравнение от втори ред може да се представи във вида $\xi'' + r(t)\xi = 0, \quad r(t) \in K$. Тъй като детерминантата на Вронски $Wr = const \in K$ показва се, че $\sigma Wr = det\sigma Wr = Wr$. Следователно $det\sigma = 1$ и $G \subset SL(2, \mathbb{C})$. В сила е следното

Твърдение 1 [4]**.** *Произволна алгебрична подгрупа на $SL(2, \mathbb{C})$ е спрегната на един от следните типове*

1) *крайна* $G^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2) $G = G^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{C}$
3) $G_k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \lambda^k = 1$	$G^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{C}$
4) $G = G^0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{C}^*$	5) $G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\beta^{-1} \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right\}$
6) $G = G^0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{C}$	7) $G = G^0 = SL(2, \mathbb{C})$

Вижда се, че 1-5 са абелеви, а 1-6 разрешими. Ще завършим този параграф с два резултата, доказани в [4]. Първо – доказва се, че ако компонентата на единицата на групата на Галоа на (VE) е абелева, то абелева е и компонентата на единицата на групата на Галоа на (NVE). Второ – компонентата на единицата на групата на Галоа е инвариантна относно вземане на крайни накрития т.е. грубо казано можем да избираме такова частно решение, че пресмятанията да са най-прости.

3. Пример 1. Движение на тяло във флуид. Движението на твърдо тяло в идеален безкраен флуид се описва със следните уравнения на Кирхоф

$$\dot{m} = m \times \frac{\partial H}{\partial m} + p \times \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\dot{p} = p \times \frac{\partial H}{\partial p}$$

Тук m, p са съответно пълният момент и импулсът на системата тяло – флуид в подвижната координатна система, свързана с тялото, а H е енергията, квадратична по m, p.

$$2H = \langle Am, m\rangle + \langle Bm, p\rangle + \langle Cp, p\rangle$$

Предполага се, че $A = diag(a_1, a_2, a_3)$, а B, C са симетрични. Тук ще разгледаме случая $B = 0$ и $C = diag(c_1, c_2, c_3)$. Тогава уравненията на движение се записват във вида

$$\begin{aligned}
&\dot{m}_1 = m_2m_3(a_3 - a_2) + p_2p_3(c_3 - c_2), \quad \dot{p}_1 = a_3m_3p_2 - a_2m_2p_3\\
&\dot{m}_2 = m_3m_1(a_1 - a_3) + p_3p_1(c_1 - c_3), \quad \dot{p}_2 = a_1m_1p_3 - a_3m_3p_1\\
&\dot{m}_3 = m_1m_2(a_2 - a_1) + p_1p_2(c_2 - c_1), \quad \dot{p}_3 = a_2m_2p_1 - a_1m_1p_2
\end{aligned} \tag{3}$$

Освен $H = F_1$ уравненията на Кирхоф имат още следните първи интеграли: $F_2 = p_1m_1 + p_2m_2 + p_3m_3$ и $F_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Уравненията на Кирхоф представляват Хамилтонова система върху многообразието $F_2 = f_2, F_3 = f_3$. Без ограничение на общността ще предполагаме $f_3 = 1$.

Твърдение 2. *Нека сред числата a_1, a_2, a_3 няма равни. Тогава, ако имат допълнителен мероморфен пръв интеграл, независещ от H, F_2, F_3, то*

$$K := \frac{c_2 - c_3}{a_1} + \frac{c_3 - c_1}{a_2} + \frac{c_1 - c_2}{a_3} = 0. \tag{4}$$

Ако $K \neq 0$ са неинтегруеми по Лиувил.

Забележка. Горното условие се нарича условие на Клебш и при него съществува квадратичен пръв интеграл т.е. в този случай уравненията на Кирхоф са интегруеми.

Доказателство. Да означим $A_{ij} = a_i - a_j, C_{ij} = c_i - c_j$. Уравненията (3) имат следното частно решение

$$m_1 = m_3 = p_2 = 0, \quad p_1 = cnu, p_3 = snu, m_2 = \frac{\alpha}{a_2}dnu, \tag{5}$$

където $u = \alpha t, \alpha = \sqrt{a_2(2h - c_1)}, \kappa^2\alpha^2 = a_2C_{31}$, а snu, cnu, dnu са елиптичните функции на Якоби. Уравненията в нормални вариации относно решението (5) са

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \quad A_{32}m_2(t)\eta + C_{32}p_3(t)\zeta\\
\dot{\eta} &= \quad A_{21}m_2(t)\xi + C_{21}p_1(t)\zeta\\
\dot{\zeta} &= \quad a_1p_3(t)\xi - a_3p_1(t)\zeta
\end{aligned} \tag{6}$$

заедно със следния пръв интеграл $p_1(t)\xi + p_3(t)\eta + m_2(t)\zeta = const$. Свеждаме (6) до уравнение от втори ред редуцирайки по интеграла ($' = d/du$)

$$\xi'' + p(u)\xi' + q(u)\xi = 0, \tag{7}$$

където

$$p(u) = -2\frac{snu\ cnu\ dnu}{a_2(a_2C_{12} - a_3C_{13})sn^2u - A_{32}\alpha^2}$$

а $q(u)$ е подобен, но на два реда. Коефициентите $p(u), q(u)$ са двойно периодичн функции с периоди $T_1 = 2K/\alpha$ и $T_2 = 2iK'/\alpha$ и полюс $u_0 = (2K + iK')/\alpha$ във фундаменталната област (тук $K(\kappa)$ е пълният елиптичен интеграл от I род, $K' = K(\kappa'), \kappa^2 + \kappa'^2 = 1$).

Нека g_1, g_2 са монодромиите на (7), получени чрез прибавяне на периодите T_1 и T_2 – те са и образуващите на групата на монодромия M. Техният комутатор $g_* = [g_1, g_2]$ отговаря на обиколка около регулярната особена точка u_0. Съгласно класическата теория на Фукс [9] при зададено уравнение

$$\xi'' + \frac{\tilde{p}(u)}{u - u_0}\xi' + \frac{\tilde{q}(u)}{u - u_0}\xi = 0,$$

$\tilde{p}, \tilde{q}$ холоморфни в околност на u_0, то собствените числа на комутатора g_* са $\exp(2\pi i\rho_{1,2})$, където $\rho_{1,2}$ са корените на т. нар. "определящо" уравнение $\rho(\rho - 1) + \tilde{p}(u_0)\rho + \tilde{q}(u_0) = 0$. От формулите [8]

$$res_{u_o} snu = (-1)/\kappa, \quad res_{u_o} cnu = (-1)/(i\kappa), \quad res_{u_o} dnu = (-1)i$$

за уравнението (7) получаваме $\tilde{p}(u_0) = 2, \tilde{q}(u_0) = -\dfrac{a_1a_2a_3K}{C_{31}a_2^2}$. Тъй като групата на Галоа се генерира топологически от M, то ще изразим условието за абелевостта ѝ чрез тази на M. M абелева $\iff$ $g_* = Id$ $\iff$ корените на "определящото" уравнение са цели. Последното условие води до

$$r_1(r_1 + 1) = \frac{a_1a_2a_3K}{C_{31}a_2^2}, \qquad r_1 \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

Системата (3) има две други елиптични решения

$$m_1 = m_2 = p_3 = 0, \quad m_2 = m_3(t), p_1 = p_1(t), p_3 = p_3(t)$$

$$m_2 = m_3 = p_1 = 0, \quad m_1 = m_1(t), p_2 = p_2(t), p_3 = p_3(t)$$

След аналогични пресмятания получаваме следните условия за абелевост на групата на Галоа

$$r_2(r_2 + 1) = \frac{a_1a_2a_3K}{C_{12}a_3^2}, \qquad r_2 \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

$$r_3(r_3 + 1) = \frac{a_1a_2a_3K}{C_{23}a_1^2}, \qquad r_3 \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

Да допуснем, че $K \neq 0$. Комбинирайки (8), (9) и (10) заедно с очевидното тъждество $C_{23} + C_{31} + C_{12} = 0$ и отбелязвайки, че $r_i(r_i + 1) > 0$ достигаме до

$$Ka_1a_2a_3(\frac{1}{a_2^2r_1(r_1 + 1)} + \frac{1}{a_3^2r_2(r_2 + 1)} + \frac{1}{a_1^2r_3(r_3 + 1)}) = 0$$

което води до противоречие с допускането. Това завършва доказателството.

Това твърдение може да се счита за обобщение на [6], където се доказва несъществуването на допълнителен аналитичен пръв интеграл с метода на разцепване на сепаратриси. Този метод обаче трудно се подава на обобщение за повече от 2 степени на свобода за разлика от настоящия подход. Преди да разгледаме многомерния аналог на движение на твърдо тяло във флуид, да означим $l_{12} = -m_3$, $l_{13} = m_2$, $l_{23} = -m_1$, $b_{12} = a_3$, $b_{13} = a_2$, $b_{23} = a_1$, ($l_{ij} = -l_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$). Тогава $H = (1/2)\sum b_{ij}l_{ij}^2 + \sum c_i p_i^2$ и условието на Клебш се записва като

$$K := \frac{c_2 - c_3}{b_{23}} + \frac{c_3 - c_1}{b_{31}} + \frac{c_1 - c_2}{b_{12}} = 0.$$

Нека сега е зададен следният Хамилтониан

$$H = \frac{1}{2}\sum b_{ij}l_{ij}^2 + \sum c_i p_i^2. \tag{11}$$

Тук $l = (l_{ij}) \in so(n), p = (p_i) \in \mathbb{R}^n$. Скобката на Поасон се задава с релациите на Ли алгебрата $e(n) = so(n) \oplus \mathbb{R}^n$ (полудиректно произведение).

Теорема 3. *Ако за някои* i, j, k

$$K_{ijk} = \frac{c_i - c_j}{b_{ij}} + \frac{c_j - c_k}{b_{jk}} + \frac{c_k - c_i}{b_{ki}} \neq 0,$$

то системата (11) *е неинтегруема в смисъл на Лиувил.*

Забележка. При изпълнение на условията $K_{ijk} = 0$ е показано в [7], че системата е интегруема.

Доказателство. Ще използваме една идея на Хейн [10], която е била приложена в друг контекст при изучаване на геодезичните върху $SO(N)$. Да разгледаме следните инвариантни многообразия

$$\Gamma_{ijk} := \{l_{pq} = 0, p \,\text{или}\, q \neq i, j, k \quad p_s = 0, s \neq i, j, k\}.$$

Тогава

$$H_{|\Gamma_{ijk}} = \frac{1}{2}(b_{ij}l_{ij}^2 + b_{jk}l_{jk}^2 + b_{ki}l_{ki}^2 + c_i p_i^2 + c_j p_j^2 + c_k p_k^2)$$

Но според Твърдение 2, горния Хамилтониан е интегруем тогава и само тогава, когато $K_{ijk} = 0$. Неизпълнението на някое от тези условия води до неинтегруемост.

4. Пример 2. Модели на Грос-Невьо. Нека $\mathbf{g}$ е проста алгебра на Ли и $\mathcal{R}$ е нейната коренова система. Дефинираме следния Хамилтониан

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \exp(ic\langle\alpha, x\rangle), \qquad \langle\alpha, x\rangle = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j \tag{12}$$

Тук $x, y \in C^n$ и без ограничение на общността предполагаме $ic = 1$. Като пример ще разгледаме случая $so(2n)$. Кореновата система е $\pm\alpha_k \pm \alpha_j, 1 \leq k < j \leq n$. Тогава Хамилтониана (12) приема вида

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{j>k} \exp(x_j + x_k) + \exp(-x_j - x_k) + \sum_{j\neq k}\exp(x_j - x_k) \tag{13}$$

Ще отбележим, че системата има още един пръв интеграл освен Хамилтониана, а именно $P = \sum_{j=1} y_j$. Следвайки [11, 12] въвеждаме нови променливи $u_j = \exp(x_j), v_j = y_j \exp(-x_j)$. Тогава (13) се записва като

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} v_j^2 u_j^2 + \sum_{j>k}(u_j u_k + u_j^{-1}u_k^{-1}) + \sum_{j\neq k} u_j u_k^{-1} \tag{14}$$

а уравненията на движение са

$$(15)\qquad \dot{u}_j = v_j u_j^2, \quad \dot{v}_j = -u_j v_j^2 - \sum_{j>k} (u_k + u_k^{-1} - u_k u_j^{-2} - u_k^{-1} u_j^{-2}), \quad j = 1, \dots, n.$$

За простота ще разгледаме случая $n = 3$. Тогава системата (15) има следната фамилия от решения

$$(16)\qquad \Gamma(h) : v_1^2 = -8(u_1^{-3}(t) + 2hu_1^{-2}(t) + u_1^{-1}(t)), \quad u_j = 1, v_j = 0, \qquad j = 2, 3.$$

При $h = \pm 1$ $\Gamma(h)$ са цилиндри, а при $h \neq \pm 1$ са торове.

Уравненията в нормални вариации относно решението (16) са

$$\dot{\xi}_j = \eta_j, \quad \dot{\eta}_j = -2(u_1(t) + u_1^{-1}(t) + 2)\xi_j \qquad j = 2, 3.$$

В този случай (NVE) се разпада на директна сума от две уравнения от втори ред

$$(17)\qquad \ddot{\xi}_j + 2\frac{(u_1(t) + 1)^2}{u_1(t)}\xi = 0, \qquad j = 2, 3.$$

Ясно е, че компонентата на единицата на групата на Галоа на NVE е абелева тогава и само тогава, когато такава е компонентата на единицата на групата на Галоа на всяко от горните уравнения.

Да разгледаме кое да е от горните уравнения. Поради факта, споменат в края на параграф 2 можем да изберем кое да е решение от фамилията (16), че пресмятанията да са по прости. Нека $h = 1$. Да означим $x := u_1(t) + 1$ и да сменим независимата променлива $t \to x$. $\left({}' = \dfrac{d}{dx}\right)$ Получаваме хипергеометрично уравнение с особени точки $x = 0, 1, \infty$

$$(18)\qquad \xi'' + (\frac{1}{x} + \frac{1/2}{x-1})\xi' + \frac{-1/4}{(x-1)^2}\xi = 0.$$

За хипергеометричните уравнения

$$(*)\quad \xi'' + (\frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{x} + \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{x-1})\xi' + (\frac{\alpha_1\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{(x-1)^2} + \frac{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2}{x(x-1)})\xi = 0,$$

където $\alpha_1 + a_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$ се въвеждат т. нар. експоненциални разлики $\hat{\lambda} = \alpha_1 - a_2, \hat{\mu} = \beta_1 - \beta_2, \hat{\nu} = \gamma_1 - \gamma_2$.

Теорема 4 (Kimura [13]). *Компонентата на единицата на групата на Галоа на* $(*)$ *е разрешима тогава и само тогава, когато*

1) *поне едно от числата* $\pm\hat{\lambda} + \hat{\mu} + \hat{\nu}, \hat{\lambda} - \hat{\mu} + \hat{\nu}, \hat{\lambda} + \hat{\mu} - \hat{\nu}$ *е нечетно или*

2) $\pm\hat{\lambda}, \pm\hat{\mu}, \pm\hat{\nu}$ *в произволен ред прнадлежат на някоя от петнадесетте фамилии от таблицата на Шварц (виж* [4] *стр.* 34*)*

За уравнение (18) $\hat{\lambda} = 0, \hat{\mu} = \hat{\nu} = \pm\sqrt{5}/2$. Следователно никое от числата $\pm\hat{\lambda} + \hat{\mu} + \hat{\nu}, \hat{\lambda} - \hat{\mu} + \hat{\nu}, \hat{\lambda} + \hat{\mu} - \hat{\nu}$ не е нечетно. Произволна комбинация от $\pm\hat{\lambda}, \pm\hat{\mu}, \pm\hat{\nu}$ не принадлежи също така и на фамилиите от таблицата на Шварц. Следователно модела на Грос-Невьо за $so(6)$ е неинтегруем. Доказателството може да се модифицира по аналогия с Пример 1 за произволно n, като при това се докаже, че не съществува даже друг мероморфен интеграл освен H и P. По подобен начин могат да се разгледат и моделите на Грос-Невьо за другите прости алгебри на Ли.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Поанкаре. Избранние труды, Т. I – III, Москва, 1971.
[2] В. Козлов. Интегруемость и неинтегруемоасть в гамильтоновой механике, *УМН*, **38**, в. 1 (1983), 4–67.
[3] С. Зиглин. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике, I – Функц. анализ, 16, в. 2 (1982), 30–41; II – 17, в. 1 (1983), 8–23.
[4] J. J Morales Ruiz. Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems. Birkhäuser, Prog. in Math., vol. **179**, 1999.
[5] I. Kaplansky. An Introduction to Diffential Algebra. Hermann, 1957.
[6] В. Козлов, Д. Трещев. Неинтегруемость уравнений Кирхофа. *ДАН СССР*, **266**, в. 6 (1982), 1298–1300.
[7] V. I. Arnold, S. P. Novikov (Eds.) Dynamical systems VII, Encyclopedia of Math. Sc.. Springer, 1994.
[8] Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 3. Москва, 1967.
[9] Э. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных диффенциальных уравнений. Москва, 1958.
[10] L. Haine. The Algebraic Complete Integrability of Geodesic Flow on $SO(N)$. *Comm. Math. Phys.* **94** (1884), 271-287.
[11] E. Horozov. On the non-integrability of the Gross-Neweu models. Ann. of Physics, **174** (1987), 430-441.
[12] Е. Хорозов. Ръкопис.
[13] T. Kimura. On Riemann's Equations which are Solvable by Quadratures. *Funkcialaj Ekvacioj*, **12** (1969), 269-281.

Огнян Христов
СУ "Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика
ул. Дж. Баучер № 5
1164 София, България
e-mail: christov@fmi.uni-sofia.bg

NONINTEGRALIBITY OF HAMILTONIAN SYSTEMS AND DIFFERENTIAL GALOIS THEORY

Ognyan Christov

The article is a summary of one contemporary approach for proving nonintegrability of Hamiltonian systems based on the differential Galois theory. This approach is demonstrated on such important for mathematical physics systems as the motion of rigid body in fluid and its multidimensional generalization and the Gross-Neweu models.