МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

ВЪРХУ ЕДНА КИТАЙСКА ЗАДАЧА

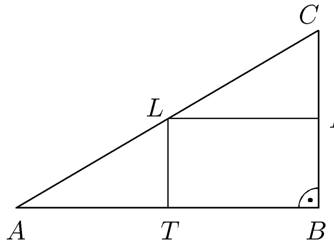
Сава Ив. Гроздев

Предложена е система от задачи-компоненти във връзка с една задача от Китайската национална олимпиада 1985/86г.

Всяка математическа задача е носител на информация за свойства и съотношения между различни математически понятия и обекти. Тази информация е формулирана явно или неявно в условието на самата задача. Неявната информация се превръща в явна след установяване на верния отговор. И в двата случая решението на задачата е по същество доказателство за верността на заложената информация. Следвайки общоприетия принцип в математиката, че всяко доказателство се основава на вече познати факти и съотношения, решението на една задача може да се разглежда като логически свързана последователност от група задачи, определени в [1] като задачи-компоненти.

Всяка задача-компонента може от своя страна да се разглежда като последователност от други задачи-компоненти. Процесът може да се продължи в дълбочина, но очевидно той е краен. Тук няма да се спираме на основанията за избора на едно или друго ниво на подробности. Този избор обикновено се определя от степента на математическата осведоменост и опит на онези, за които е предназначена системата от задачи-компоненти. В настоящата работа системата е съобразена с познанията и възможностите на ученици с подчертани математически интереси, които се готвят за участие в математически състезания и олимпиади. Обект на изследване е една конкретна задача от Китайската национална олимпиада през 1985/86г. (задача 6.), за която е предложена система от задачи-компоненти. Тази задача от своя страна се явява задача-компонента на информация от по-високо ниво (задача 8.) и в частност представлява лема от математическо изследване [2], предназначено за професионалисти.

Задача 1. Върху хипотенузата AC на правоъгълен триъгълник ABC да се намери точка L така, че правоъгълникът $LTBK$, където $LT \perp AB$ ($T \in AB$) и $LK \perp BC$ ($K \in BC$), да има максимално лице.



Решение:

Правоъгълникът $LTBK$ има максимално лице, когато сумата от лицата на $\triangle ATL$ и $\triangle LKC$ е минимална.

От $\triangle ATL \sim \triangle LKC \sim \triangle ABC$ следва, че $\dfrac{S_{\triangle ATL}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{AL^2}{AC^2}$ и $\dfrac{S_{\triangle LKC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{LC^2}{AC^2}$, откъдето

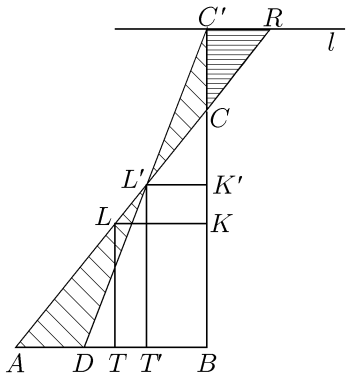
$$S_{\triangle ATL} + S_{\triangle LKC} = S_{\triangle ABC}\frac{AL^2 + LC^2}{AC^2}$$

и следователно задачата се свежда до намиране на т.L върху AC така, че $AL^2 + LC^2$ да е възможно най-малко. Но

$$AL^2 + LC^2 = \frac{1}{2}\left[(AL + LC)^2 + (AL - LC)^2\right] = \frac{1}{2}\left[AC^2 + (AL - LC)^2\right],$$

като последният израз е най-малък при $AL = LC$, т.е. когато т.L е средата на хипотенузата AC.

Горната Задача 1 може да се реши и чисто геометрически:



Нека L е средата на хипотенузата AC в правоъгълния $\triangle ABC$, $LT \perp AB$ ($T \in AB$) и $LK \perp BC$ ($K \in BC$). Нека $L' \in AC$ е точка от хипотенузата, която е различна от т.L. Нека $L'T' \perp AB$ ($T' \in AB$) и $L'K' \perp BC$ ($K' \in BC$).

Ще покажем, че $S_{LTBK} > S_{L'T'BK'}$.

За целта нека C' е върху продължението на BC така, че ако $C'L'$ пресича AB в т.D, то $C'L' = L'D$. През C' прекарваме права l, която е успоредна на AB и нека тази права пресича правата AC в точка R. Тогава

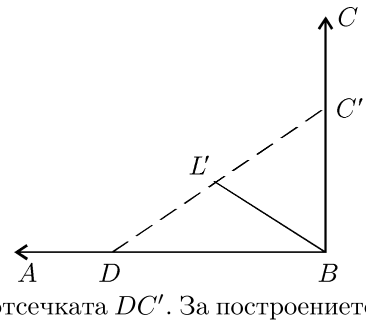
$$S_{\triangle ADL'} = S_{\triangle L'RC'} = S_{\triangle L'CC'} + S_{\triangle CRC'}.$$

От друга страна, $S_{LTBK} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ и $S_{L'T'BK'} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle DBC'}$. Но

$$S_{\triangle ABC} - S_{\triangle DBC'} = S_{\triangle ADL'} - S_{\triangle L'CC'} = S_{\triangle L'RC'} - S_{\triangle L'CC'} > 0,$$

т.е. $S_{LTBK} > S_{\triangle L'T'BK'}$.

В геометричното решение на Задача 1 се налага да се прекара права през т. L' така, че отсечката, която раменете на $\sphericalangle ABC$ отсичат от тази права, се разполовява от L'.



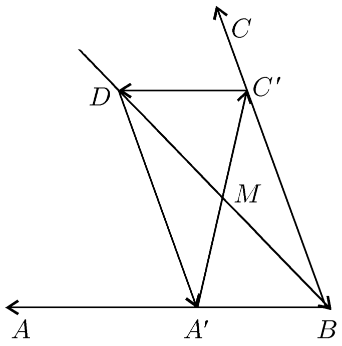
Достатъчно е върху BA да вземем т.D така, че $L'D = L'B$, а върху BC – т.C' така, че $L'C' = L'B$. Тогава $\sphericalangle DL'B + \sphericalangle BL'C' =$

$$= 180^\circ - 2.\sphericalangle DBL' + 180^\circ - 2.\sphericalangle L'BC' =$$

$= 360^\circ - 2.(\sphericalangle DBL' + \sphericalangle L'BC') = 360^\circ - 2.90^\circ = 180^\circ$, т.е. точките D, L' и C' са колинеарни и L' е среда на отсечката DC'. За построението фактически се използва свойството на медианата към хипотенузата в правоъгълен триъгълник, според което медианата е равна на половината от хипотенузата.

Извършеното построение е частен случай на следната по-обща задача.

Задача 2. През точка M от вътрешността на даден ъгъл ABC да се прекара права така, че отсечката, която раменете на ъгъла отсичат от тази права, се разполовява от M.



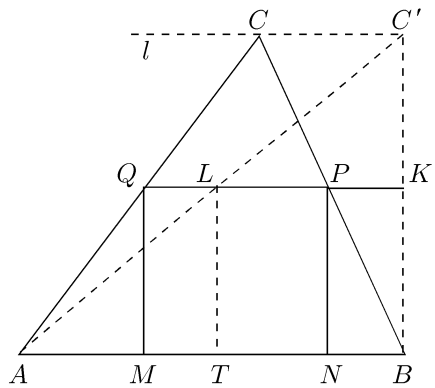
Решение:

Върху лъча BM вземаме точка D така, че $BM = MD$ и през D прекарваме прави, успоредни на раменете BA и BC, които ги пресичат съответно в точките A' и C'. Тогава $A'BC'D$ е успоредник и т.M е средата на диагонала BD. От свойството на успоредника следва, че другият диагонал $A'C'$ минава също през M и се разполовява от тази точка, т.е. правата $A'C'$ е търсената.

Задача 3. В даден триъгълник да се впише правоъгълник с максимално лице.

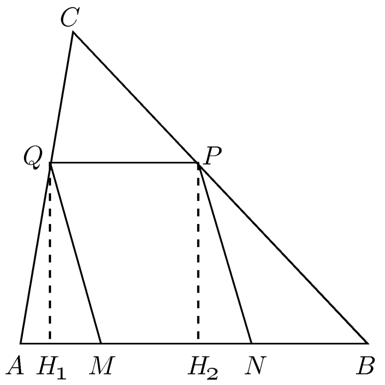
Решение:

Тъй като правоъгълникът е вписан, върховете му са върху страните на триъгълника. Нека $\triangle ABC$ е даденият триъгълник, а вписаният в него правоъгълник с максимално лице е $MNPQ$ ($M, N \in AB$, $P \in BC$, $Q \in CA$).



Нека l е права през т.C, успоредна на AB и нека перпендикулярът от т.B към AB пресича l в т.C'. Нека пресечните точки на правата PQ с AC' и BC' са съответно L и K, а $LT \perp AB$ ($T \in AB$).

От подобията $\triangle QPC \sim \triangle ABC$ и $\triangle LKC' \sim \triangle ABC'$ имаме $\dfrac{QP}{AB} = \dfrac{CQ}{CA}$ и $\dfrac{LK}{AB} = \dfrac{C'K}{C'B}$. Но $\dfrac{CQ}{CA} = \dfrac{C'K}{C'B}$ (от теоремата на Талес за успоредните прави l, QK и AB). Тогава $\dfrac{QP}{AB} = \dfrac{LK}{AB}$ и значи $QP = LK$, откъдето следва, че правоъгълниците $MNPQ$ и $TBKL$ са еднакви. По-нататък е достатъчно да се забележи, че $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC'}$. Тогава съгласно Задача 1 правоъгълникът с максимално лице, който може да се впише в $\triangle ABC'$, се получава, когато L е средата на AC'. Но $l||QL$ и значи т. Q е среда на AC и QP е средна отсечка в $\triangle ABC$. Задачата има три решения, които се получават с помощта на средните отсечки в триъгълника. И трите правоъгълника имат лице, което е точно половината от лицето на $\triangle ABC$.

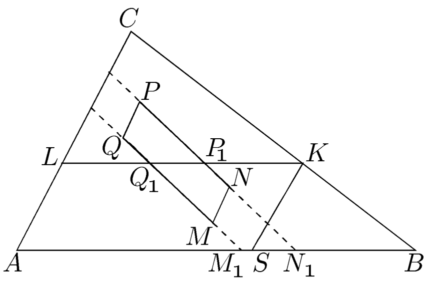


Задача 4. В даден триъгълник да се впише успоредник с максимално лице.

Решение:

Нека $MNPQ$ е успоредникът с максимално лице, който е вписан в $\triangle ABC$, като $M, N \in AB$, $P \in BC$ и $Q \in AC$. Нека $QH_1 \perp AB$ ($H_1 \in AB$) и $PH_2 \perp AB$ ($H_2 \in AB$). Получаваме правоъгълника H_1H_2PQ. При това $S_{MNPQ} = S_{H_1H_2PQ}$. Така задачата се свежда до Задача 3 В случая има безброй много решения.

Задача 5. Да се докаже, че ако един триъгълник покрива даден успоредник, то лицето на триъгълника е поне два пъти по-голямо от лицето на успоредника.



Решение:

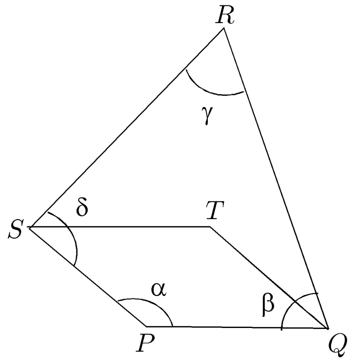
Даденият успоредник означаваме с $MNPQ$, а триъгълника, който го покрива, с ABC. Правите MQ и NP пресичат страните на $\triangle ABC$ в четири точки и значи поне две от тях са върху една и съща страна, например AB. Пресечните точки на тези прави с AB означаваме с M_1 и N_1.

Нека Q_1 е такава точка, че $QQ_1 = MM_1$ и нека правата през Q_1, която е успоредна на AB, пресича AC, PN и BC съответно в точките L, P_1 и K. Тогава $Q_1M_1 = QM$ и успоредниците $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ имат равни лица. Нека правата през K, която е успоредна на AC, пресича AB в т.S. Ясно е, че $S_{M_1N_1P_1Q_1} \leq S_{ASKL}$, защото двата успоредника имат равни височини, а за основите им е изпълнено $Q_1P_1 \leq LK$. При това успоредникът $ASKL$ е вписан в $\triangle ABC$ и остава да приложим Задача 4, в която доказахме, че лицето на вписания успоредник с максимално лице е точно половината от лицето на триъгълника.

Задача 6. *Китайска национална олимпиада 1985/1986г., задача 1. от II ден на олимпиадата* Изпъкнал четириъгълник $PQRS$ е разположен в триъгълник ABC. Да се докаже, че лицето на поне един от триъгълниците PQR, PQS, PRS и QRS не надминава $\dfrac{1}{4}$ от лицето на $\triangle ABC$.

Решение:

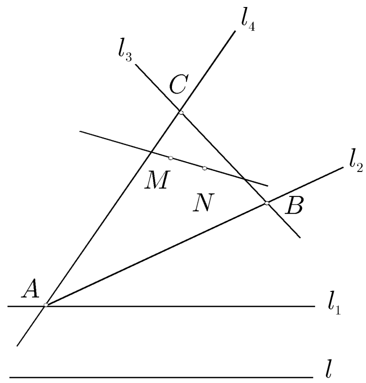
Нека ъглите на четириъгълника при върховете P, Q, R и S са съответно α, β, γ и δ. Понеже $(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta) = 360^\circ$, то не може едновременно $\alpha+\beta < 180^\circ$ и $\gamma+\delta < 180^\circ$. Нека без ограничение $\alpha + \beta \geq 180^\circ$. Аналогично от $(\alpha+\delta)+(\beta+\gamma) = 360^\circ$ следва, че поне едно от неравенствата $\alpha+\delta \geq 180^\circ$ и $\beta+\gamma \geq 180^\circ$ е изпълнено. Без ограничение нека $\alpha + \delta \geq 180^\circ$.



Нека правата през S, която е успоредна на PQ, и правата през Q, която е успоредна на PS, се пресичат в точката T. От избора на α, β, γ и δ следва, че т.T е вътрешна за изпъкналия четириъгълник $PQRS$.

Следователно успоредникът $PQTS$ се покрива от $\triangle ABC$. Сега прилагаме Задача 5 Имаме $S_{PQTS} \leq \dfrac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ и следователно $S_{\triangle PQS} = \dfrac{1}{2} S_{PQTS} \leq \dfrac{1}{4} S_{\triangle ABC}$, което трябваше да се докаже.

Задача 7. Измежду всеки пет точки в равнината, никои три от които не лежат на една права, съществуват четири, които са върхове на изпъкнал четириъгълник.



Решение:

Нека l е произволна права, спрямо която дадените пет точки се намират в една и съща полуравнина. Започваме да движим l успоредно на себе си към точките до среща на точка от дадените. Нека това е точка A и $A \in l_1$, където $l_1 || l$. По-нататък, завъртаме l_1 около A по посока, обратна на часовниковата стрелка, до среща на нова точка B от дадените. В случай, че $B \in l_1$, завъртането е на $0°$. В общия случай получаваме права l_2 през B и A.

Сега завъртаме l_2 в същата посока до среща с точка C измежду останалите три точки. Получаваме правата l_3, определена от B и C. С l_3 постъпваме по същия начин до среща на точка D. Ако $D \not\equiv A$, то четириъгълникът $ABCD$ е изпъкнал. Ако $A \equiv D$, получаваме $\triangle ABC$, като новата права l_4 е определена от точките C и A. При това, останалите точки измежду дадените (нека това са точките M и N) остават във вътрешността на $\triangle ABC$. Правата MN пресича контура на $\triangle ABC$ в две от неговите страни (никои три от точките не лежат на една права). Нека това са страните AC и BC. Тогава четириъгълникът $ABNM$ е изпъкнал, което решава задачата.

Задача 8. *(Александър Сойфер в How Does One Cut a Triangle, 1990, стр.131-134)* Да се докаже, че ако пет точки са разположени в даден триъгълник, съществуват три такива, че лицето на образувания от тях триъгълник не надминава $\dfrac{1}{4}$ от лицето на дадения триъгълник.

Решение:

Достатъчно е да се приложат последователно Задачи 7 и 6.

Задача 9. Да се докаже, че ако шест точки са разположени в квадрат, съществуват три така, че лицето на образувания от тях триъгълник не надминава $\frac{1}{8}$ от лицето на квадрата.

Тази задача е съдържание на статията [2]. Като лема в тази статия се използва Задача 6.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ив. Ганчев. Основни учебни дейности в урока по математика, ИФ "Модул-96", София, 1999.

[2] Yang Lu, Zhang Lingzhong. The problem about six points in a square. Lectures in Mathematics, Sichuan Renmin Publishing House, 159-175.

Сава Гроздев
Институт по механика – БАН
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 4
1113 София
e-mail: savagroz@math.bas.bg

ON A CHINESE PROBLEM

Sava Grozdev

A system of problems-components is proposed in connection with a problem from the Chinese National Olympiad in 1985/86.