МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

КОРЕНУВАНЕ НА ГАУС-ПИТАГОРОВИ ЧИСЛА

Пенка Петрова Гунчева

Целите Гаусови числа са класически обект в теорията на числата. Напоследък бяха свързани с конструирането на Диофантови фигури. Понятието диофантова фигура е въведено от Станчо Димиев и Иван Тонов [1].

С $\mathbb{Z}[i]$ се означава пръстенът на целите Гаусови числа, т.е. комплексните числа от вида $n + im$, където n и m са цели числа. Респективно с $\mathbb{Q}[i]$ се означава полето на рационалните Гаусови числа $x + iy$, където x и y са рационални числа. Операциите събиране и умножение са валидни в $\mathbb{Z}[i]$, а в $\mathbb{Q}[i]$ имаме още и деление на отлично от нула число. Понятието Гаус-Питагорово число, въведено от Станчо Димиев, има за цел да свърже целите Гаусови числа с древното понятие за Питагоров триъгълник. По-точно, казваме, че $n+im$ е число на Гаус-Питагор, ако има такова цяло число l, че тройката (n, m, l) бъде Питагорова тройка, т.е. $n^2 + m^2 = l^2$. Оказва се, че като умножаваме Гаус-Питагорови числа получаваме пак такива числа, но същото не се отнася за събирането им. Считаме, че боравенето с Гаус-Питагоровите числа има дидактическа стойност, благодарение на геометричния им смисъл и може да бъде експериментирано с учениците за извънкласна работа.

Ако $\alpha = n+im$ е Гаусово число с $m \neq 0$, разглеждаме уравнението $z^2 = \alpha$ където z означава комплексно число. Всяко решение на това уравнение относно z наричаме квадратен корен от α. Ако α е Гаус-Питагорово число, в сила е следната формула

$$\alpha^{1/2} = (n + im)^{1/2} = 2^{-1/2}(t + i\ m/t), \qquad t^2 = n + l, \tag{1}$$

където (n, m, l) е Питагорова тройка, съгласно условието за α. Тази формула е посочена от Станчо Димиев без доказателство. Тук предлагаме елементарно доказателство, достъпно за ученици от горните класове на средното училище.

Полагаме $z = x + iy$. Тогава $(x + iy)^2 = n + im$, $m \neq 0$, и следователно

$$x^2 - y^2 = n, \quad 2xy = m.$$

От $m \neq 0$ следва $x \neq 0$, което влече $y = m/2x$. Като заместим в първото равенство по-горе получаваме следното биквадратно уравнение за x

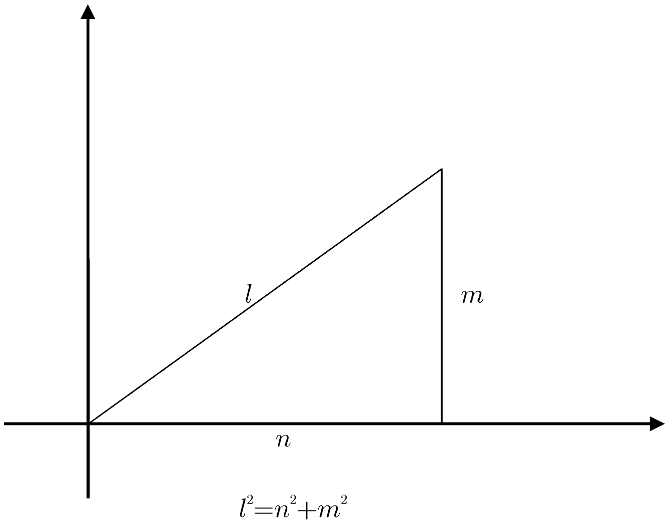
$$4x^4 - 4nx^2 - m^2 = 0.$$

Като положим $x^2 = v$, получаваме $v_1 = \frac{1}{2}(n + (n^2 + m^2)^{1/2})$, или $v_2 = \frac{1}{2}(n - (n^2 + m^2)^{1/2})$. Понеже x е реално число имаме, че v е неотрицателно число, което означава, че v_2 отпада. Получихме

$$x^2 = \frac{1}{2}(n + (n^2 + m^2)^{1/2})$$

Ако α е Гаус-Питагорово число, ще има цяло число l такова, че тройката (n, m, l) да бъде Питагорова тройка, т.е. $l^2 = n^2 + m^2$. Това означава, че

$$x = 2^{-1/2}(n + l)^{1/2}, \quad y = 2^{-1/2}m((n + l)^{-1/2}. \tag{2}$$



$l^2 = n^2 + m^2$

Ако положим $n + l = t^2$, получаваме обявената по-горе формула.

С. Димиев поставя въпроса кога при кореняването на Гаус-Питагорови числа получаваме рационални или даже цели Гаусови числа, разбира се умножени с ирационалното число $2^{-1/2}$, което е едно и също при кореняването на всички Гаус-Питагорови числа. Ясно е, че ако уравнението $n + l = t^2$ относно t има целочислено решение, то посочената формула дава рационално Гаусово число.

Има ли такива Гаус-Питагорови числа α за които корен от α е цяло Гаусово число, разбира се умножено с стандартното ирационално число $2^{-1/2}$?

Пример. Да разгледаме Гаус-Питагоровото число $4+i3$ свързано с Питагоровата тройка (4, 3, 5). За него имаме $n = 4$, $m = 3$, $l = 5$ и, очевидно, $n + l = 9$, т.е. $t = 3$. Окончателно получаваме

$$(4 + i3)^{1/2} = 2^{-1/2}(3 + i).$$

Дефиниция 1. *Казваме, че Гаус-Питагоровото число $\alpha = n+im$, $n^2+m^2 = l^2$, е точен квадрат от някакво цяло Гаусово число $p + iq$, $p, q \in \mathbb{Z}$, ако*

$$\alpha^{\frac{1}{2}} = 2^{-1/2}(p + iq). \tag{3}$$

Дефиниция 2. *Казваме, че $\alpha = n + im$, $n^2 + m^2 = l^2$, е супер Гаус-Питагорово число ако има такова цяло положително число t, че да бъде валидно равенството*

$$n + l = t^2.$$

Твърдение. *Всяко супер Гаус-Питагорово число е точен квадрат в определения по-горе смисъл.*

Доказателство. Нека $\alpha = n + im$, $n^2 + m^2 = l^2$, е супер Гаус-Питагорово число. От

$$m^2 = l^2 - n^2 = (l-n)(l+n) = (l-n)t^2,$$

следва, че $(m/t)^2 = l - n > 0$. Последното равенство показва, че m/t е цяло число.

Полагаме $m/t = s$. От формула (1) следва, че $\alpha^{1/2} = 2^{-1/2}(t + is)$, където $t + is \in \mathbb{Z}[i]$.

Виждаме, че $4 + i3$ е супер Гаус-Питагорово число.

Забележка. Лесно се вижда, че обратното твърдение на по-горе формулираното твърдение 1 не е вярно. Например, $8 + i6$ е точен квадрат $= (3+i)^2$, но не е супер Гаус-Питогорово число.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Димиев, Ив. Тонов. Диофантови фигури. *Математика и математическо образование*, **15** (1986) 383–590.

[2] S. Dimiev, K. Markov. Gauss Integers and Diophantine Figures. *Math. and Education in Math.*, **31** (2002), 88-95.

Пенка Гунчева
Пловдивски университет
Филиал Смолян
Ул. Дичо Петров 32
4700 Смолян

SQUARE RADICAL OF GAUSS INTEGERS

Penka P. Guncheva

The existence of an exact square of a Gauss-Pythagorean number is examined. Exemple is given.