МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

ЧИСЛА НА МЕРСЕН И СЪВЪРШЕНИ ГАУСОВИ ЧИСЛА

Бранимир Чавдаров Кираджиев

Целта на тази статия е да напомни за съвършените числа и числата на Мерсен и да осветли възможностите за обобщението им в пръстена на целите гаусови числа. Вярваме, че това ще бъде полезен материал за извънкласна работа в горните класове. Ръководили сме се от методическата инициатива на Станчо Димиев и Иван Тонов от статията [1].

1. Увод. Несъмнено математиката е свързана с културната среда и това е важно за педагогиката и методиката на преподаването в средното училище. В тази връзка считаме за полезно да се занимаем, разбира се бегло, с влиянието на културата върху математиката в някои древни цивилизации, като например вавилонската и древногръцката. Вавилонците са достигнали висока степен в усвояването на идеята за число, не само за практически цели. Способностите развити при смятането с естествените и рационалните числа за един средно-статистически съвременник, даже в най-развитите страни, едва ли надвишават тези на древния Вавилон. Научноисторическите изследвания по Асирология, показват убедително, че това е наистина така. Откритите таблички за умножение и други по-сложни математически операции съдържат различни инструкции как и в какъв ред да се извършват въпросните операции. Но едва гърците от 5-6 век преди н.е. достигат до понятието за доказателство и понятието за теорема.

Изглежда това е резултат от съответните култури: тази на Вавилонците – мистична и ирационална (магическа, затворена, скрита и тайнствена), докато тази на гърците е рационална, естетическа, и, разбира се, мистична, но не скрита и затворена. Във Вавилон астрологията е доминирала едва ли не навсякъде, напротив в гръцката култура доминира философията, геометрията и астрономията. Именно във Вавилон се развива мистицизмът свързан с числата. Той се изразява в различни вярвания за числата. Например четните числа са считани за женски, а нечетните – за мъжки. Също така магическата сила на числото 7. Имаме 7 дни, 7 божества, 7 дявола, което карало астрономите да търсят 7 планети. По тези времена са били известни само Юпитер и Венера.

Любопитно е, че мистицизмът на числата е повлиял за откриването на някои интересни аритметични свойства. Например, понятието за съвършено число е фактически открито от Вавилонците. Всяко съвършено число, съвпада по дефиниция със сумата на различните от него негови делители. Разбира се, посочили са само примери. Например числото 6. Наистина: делителите на 6, различни от него, са 1, 2 и 3 и очевидно $6 = 1 + 2 + 3$ [3].

2. Въпросът за съвършените числа е изследван от Леонард Ойлер през 18 век.

Теорема. *Необходимото и достатъчно условие едно четно число да е съвършено е то да може да се запише във вида $2^{p-1}(2^p-1)$, където 2^p-1 е просто число.*

Доказателство. Ако $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ и числото 2^p-1 е просто, сумата на делителите на n, която означаваме със $\sigma(n)$ може лесно да се пресметне: имаме следните делители на 2^{p-1}: $1, 2, 4, \ldots, 2^{p-1}$, както и всеки от тези делители, умножен по (2^p-1), други делители няма. Следователно $\sigma(n) = (1+2^p-1)(1+2+4+\ldots+2^{p-1}) = 2^p(2^p-1) = 2n$.

Обратно, нека $\sigma(n) = 2n$ и n е четно число. Можем да запишем n във вида $n = 2^\alpha q$, където q е нечетно число. Тогава $\sigma(n) = 2n$ и $\sigma(n) = (2^{\alpha+1}-1)\sigma(q)$ получаваме равенството $(2^{\alpha+1}-1)\sigma(q) = 2^{\alpha+1}q$. От това следва, че числото $\sigma(q) = 2^{\alpha+1}q/(2^{\alpha+1}-1)$ е цяло, т.е. че числото $(2^{\alpha+1}-1)$ дели q. Но $\sigma(q) = 2^{\alpha+1}q/(2^{\alpha+1}-1) = q/(2^{\alpha+1}-1)$. Последното равенство е възможно само ако $q/(2^{\alpha+1}-1) = 1$, т.е. ако $q = 2^{\alpha+1}-1$. Но равенството $\sigma(q) = q+1$ е възможно само при q – просто. Но от вида на $q = 2^{\alpha+1}-1$ следва, че q може да е просто само ако $\alpha+1$ е просто число. Да го означим с p. Тогава получаваме $q = 2^p-1$ и $n = 2^{p-1}(2^p-1)$.

Простите числа от вида 2^p-1 наричаме прости числа на Мерсен. Ползата от горната теорема е, че свежда търсенето на четни съвършени числа до търсенето на прости числа на Мерсен.

В достатъчната си част тази теорема е била известна още на Евклид. Необходимостта на условието е била доказана за първи път от Ойлер.

Във връзка с повдигнатите в статията [2] въпроси за гаусови цели числа, можем да отбележим следното. При търсене на аналог на числата на Мерсен в $\mathbb{Z}[i]$, се набива на очи аналогията между числото 2 в $\mathbb{Z}$ и числото $(1+i)$ в $\mathbb{Z}[i]$. Ако разгледаме числата от вида $(1+i)^p-1$, където p е просто число, ще установим, че за $p = 2, 3, 5, 7$ получаваме все прости елементи от $\mathbb{Z}[i]$. Интересно е докъде може да се продължи тази аналогия. (Например как можем да дефинираме аналог на функцията $\sigma(n)$ в $\mathbb{Z}[i]$.)

Ще се опитаме да дадем дефиниция на "съвършено гаусово число". Нека най-напред потърсим такава дефиниция в $\mathbb{Z}$. Наличието на положителни и отрицателни делители променя ситуацията. Ясно е, че сумата на всички делители на числото $n \in \mathbb{Z}$ е нула. Използвайки асоциираните елементи [2] можем да дадем следната

Дефиниция 1. *Числото $n \in \mathbb{Z}$ е съвършено, ако може да се представи като сбор от всички свои делители n_i, за които $|n_i| < n$ и се взима само по един делител от клас асоциирани.*

Тази дефиниция определя числото 24 като съвършено число, защото например $24 = -1-2-3+4+6+8+12$.

Нека отбележим, че в $\mathbb{N}$ числото 24 не е съвършено число. За да се освободим от такива примери ще предложим следната

Дефиниция 2. *Числото $n \in \mathbb{Z}$ и $n < 0$ е съвършено ако $-n$ е съвършено в $\mathbb{N}$. За естествените числа се запазва старата дефиниция.*

В $\mathbb{Z}[i]$ единиците са четири $1, -1, i$ и $-i$ [2] и по този начин заедно с всяко гаусово число $\omega = a+ib$, можем да разглеждаме числата $\omega_1 = -a-ib$, $\omega_2 = -b+ia$,

$\omega_3 = b - ia$, асоциирани с него. Ясно е, че ако α дели ω, то и асоциираните с α числа делят ω.

Нека $\omega = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$. Ще разделим целите гаусови числа на три класа както следва:

Дефиниция 3. *Числото $\omega = a + ib$ ще наричаме естествено гаусово число, ако $a > 0$ и $b > 0$.*

Дефиниция 4. *Числото $\omega = a + ib$ ще наричаме отрицателно гаусово число, ако $a < 0$ и $b < 0$.*

Дефиниция 5. *Ако $\omega = a + ib$ не е естествено или отрицателно гаусово число, ще го наричаме гаусово число от смесен тип.*

Дефиниция 6. *Ще казваме, че $\omega = a+ib$ е съвършено гаусово число, ако сбора на всичките делители на ω, ω_i, $H(\omega_i) < H(\omega)$ [2], от които поне един е отрицателно или естествено гаусово число, а другите делители са от смесен тип и при това се взима по един от всеки клас асоциирани е равен на ω.*

На тази дефиниция навежда мисълта факта, че числата $(1+i).[(1+i)^2-1] = -3+i$ и $(1+i)^2.[(1+i)^3-1] = -4-6i$ са съвършени гаусови числа в горния смисъл.

Лесно се проверява, че числото $-3+i$, е съвършено гаусово число, което има две представяния: $-3+i = i + (-1+i) + (-2-i)$; $-3+i = -1 + (-1-i) + (-1+2.i)$. Същото откриваме и за числото $-4-6i = -i + (1-i) + 2 + (-2-3i) + (-5-i)$ или $-4-6i = i + (-1+i) + (-2) + (-2-3i) + (1-5i)$.

Може да се дадат още дефиниции за съвършени гаусови числа, но остава открит въпроса: Има ли аналог на теоремата на Евклид-Ойлер за съвършените гаусови числа?

Много би било интересно как биха отговорили Вавилонците и древните гърци на предизвикателството съвършени гаусови числа с оглед на тяхната култура. Трудно е на съвременника да предположи това, но е ясно, че само аналогията едва ли ще донесе решението на този въпрос. В подкрепа на горното можем да приведем още един пример: числото $2^{11} - 1 = 23.89$ е съставно, докато числото $(1+i)^{11} - 1$ е просто гаусово число. Наистина в означенията на [2] $N[(1+i)^{11} - 1] = 2113$, което е просто число от вида $4.k + 1$, но не е просто Гаусово.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Димиев, Ив. Тонов. Диофантови фигури. *Математика и математическо образование*, **15** (1986), 383–590.

[2] S. Dimiev, K. Markov. Gauss integers and Diophantine Figures *Math. and Edication in Math.*, **31** (2002), 88–95.

[3] Ш. Х. Михелович. Теория чисел, Москва, 1987 год.

Бранимир Чавдаров Кираджиев
Лесотехнически университет
бул. "Климент Охридски"
София

NUMBERS OF MERSEN AND PERFECT NUMBERS

Branimir Chavdarov Kiradjiev

The purpos of this paper is to recall about the perfect numbers and the numbers of Mersen, and to clarify the possibilities for its generalization in the ring of Gauss integers. We bielive this is would be potentially usefull in didactic plan.