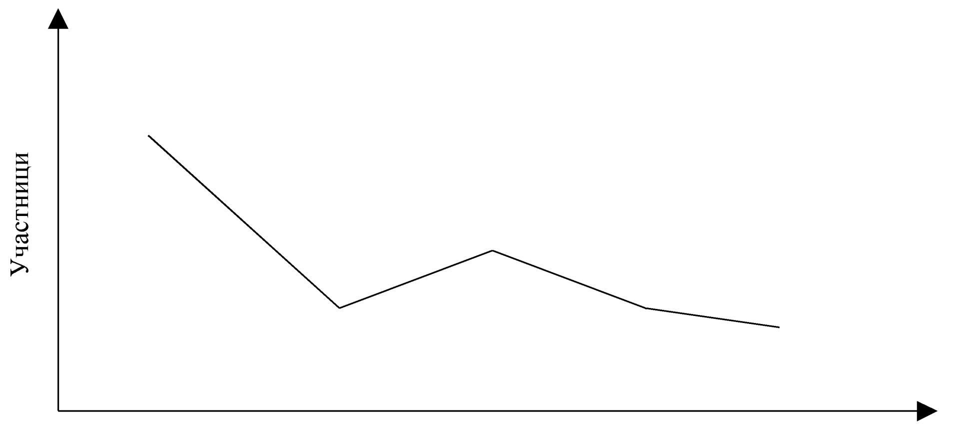
МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

ТРУДНОСТ И УСТОЙЧИВОСТ НА ЕДНА ИЗПИТНА ЗАДАЧА

Милен Найденов Найденов, Татяна Стефанова Маджарова

Тази работа представлява едно статистическо изследване върху две задачи, дадени на конкурсния изпит по математика за постъпване във ВВМУ "Н. Вапцаров", 2000 г. Предложени са методи за измерване трудността и устойчивостта, които съдържа една задача. Резултатите от изпита дават възможност да се оценят не само участниците в конкурса, но и самите задачи.

В тази статия се въвеждат понятията "трудност" и "устойчивост" като характеристики на една задача. Те се определят на базата на статистическо изследване. Затова е необходимо да се разполага с резултатите от експеримент (изпит, контролна работа и др.), в който участвува задачата. Те могат да се дадат в следния вид:



Фигура 1

В двумерна декартова координатна система върху абсцисната ос се нанася скалата, по която е извършено оценяването (най-често шестобална система), а върху ординатната ос са отчетени резултатите в проценти на участниците, достигнали съответния бал.

Трудността и устойчивостта на една изпитна задача ще бъдат оценявани по същата скала, по която се оценяват и знанията на обучаемите.

Статистическото изследване е направено за две от конкурсните задачи, дадени на кандидатстудентския изпит по математика през 2000г. във ВВМУ "Н. Вапцаров".

Задача 1 (Задача 1-В – 2000г.) Да се реши уравнението

$$\cos 7x + 2\cos 3x.\sin 2x + \cos x = 0.$$

Решение на задача 1.

$$\cos 7x + 2\cos 3x.\sin 2x + \cos x = 0\,,$$
$$\cos 7x + \cos x + 2\cos 3x.\sin 2x = 0\,,$$
$$2\cos 4x.\cos 3x + 2\ cos3x.\sin 2x = 0\,,$$
$$2\cos 3x(\cos 4x + \sin 2x) = 0\,,$$
$$2\cos 3x\left(1 - \sin^2 2x + \sin 2x\right) = 0\ :$$

1^0: $\cos 3x = 0,\quad 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad \underline{x = \dfrac{\pi}{6}(1+2k).}$

2^0: $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0.$

Полагаме $u = \sin 2x$ и лесно получаваме решенията $u_1 = 1$, $u_2 = -\dfrac{1}{2}$.

$21^0:\ \sin 2x = 1,\qquad 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\qquad \underline{x = \dfrac{\pi}{4}(1+4k).}$

$$22^0:\ \sin 2x = -\frac{1}{2}\ \left|\ \begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\ \right|\ \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12}(-1+12k) \\ x = \dfrac{\pi}{12}(-5+12k) \end{array}$$

Задача 2 (Задача 2 – 2000г.) Да се намери множеството от функционални стойности на функцията

$$y\,(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Решение на задача 2. Задачата може да бъде решена чрез пълно изследване на функцията

$$y\,(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Тук ще посочим някои по-важни резултати от изследването. Функцията $y(x)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално x.

$$y'\,(x) = \frac{4x^2 - 4}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$$

и от $y'\,(x) = 0$ намираме $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Знакът на $y'\,(x)$ определяме от знака на числителя $4(x^2-1)$, т.е. $y'\,(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и $y'\,(x) < 0$ за $x \in (-1, 1)$. Лесно определяме $y_{\max} = y\,(-1) = \dfrac{7}{3}$; $y_{\min} = y\,(1) = -3$.

Този начин задължително изисква да получим $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 1$, т.е. функцията притежава хоризонтална асимптота $y = 1$.

Изследването показва, че за всяко реално x, тази функция приема стойности в интервала $\left[-3, \frac{7}{3}\right]$.

Проверката и оценяването на знанията на кандидат-студентите за отделните задачи става на базата на предварително формулирани критерии. При тази тема бе прието на всяка вярно решена задача да се дават максимално осем точки.

Основният проблем, който стои при оценяването на трудността на една изпитна задача, е да се намерят обективни критерии за такава оценка. Този проблем е трудно разрешим, тъй като във всички случаи задачата се оценява като "лесна" или "трудна" спрямо определена група от хора, които я решават. Тази оценка зависи от степента на знанията им; времето, с което разполагат за решаването ѝ; психическото им състояние (на конкурс, състезание, контролна работа обучаемите са психически по-неустойчиви и по-трудно се справят с поставените задачи) и др.

Данните в Таблица 1 представят резултатите за двете конкурсни задачи, получени от една извадка, включваща 25 случайно избрани участници в конкурса.

Бал	Задача	1-В	Задача	2
	Абс. честота	Отн. честота	Абс. честота	Отн. честота
0	5	0.20	5	0.20
0.5	0	0.00	3	0.12
1	1	0.04	2	0.08
1.5	1	0.04	0	0.00
2	0	0.00	2	0.08
2.5	0	0.00	1	0.04
3	0	0.00	0	0.00
3.5	2	0.08	0	0.00
4	2	0.08	3	0.12
4.5	4	0.16	1	0.04
5	0	0.00	3	0.12
5.5	0	0.00	0	0.00
6	0	0.00	2	0.08
6.5	2	0.08	1	0.04
7	4	0.16	0	0.00
7.5	1	0.04	2	0.08
8	3	0.12	0	0.00

Таблица 1

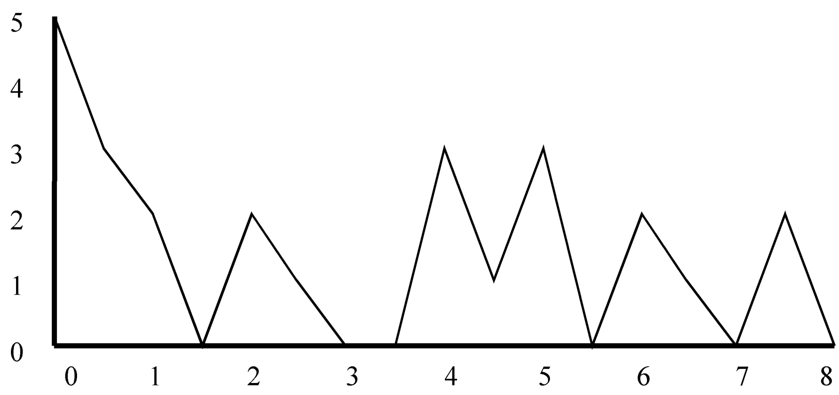
За геометрично представяне на неизвестната плътност са използвани полигоните на разпределение, показани на фигури 2 и 3, съответно за задача 1 и задача 2.

Характерно и за двете графики е максимумът в нулата, т.е. най-голямата част от кандидатите са получили нула точки при решаването и на двете задачи. Такова явление се наблюдава почти винаги, когато се обобщават резултатите от приемния изпит, както за отделна задача, така и за цялата тема (най-голям брой кандидати получават оценка слаб).

На базата на тези данни в Таблица 2 са дадени стойностите на основните мерки за разсейването и за центъра му.

No по ред	Числ. характеристики на статистическото разпределение	Задача 1-В	Задача 2
1.	Средна стойност	4.32	2.92
2.	Медиана	4.5	2.5
3.	Мода	0	0
4.	Дисперсия	8.1176	6.9536

Таблица 2



Фигура 2

Въз основа на така получените резултати считаме, че е удачно трудността на една изпитна задача да се пресмята по формулата

$$T = B - \overline{x},$$

където T е трудност, B – максималният бал за оценяване (десен край на скалата), а $\overline{x}$ е средна стойност (среден успех на тази задача).

Ако на една задача участниците в конкурса постигат по-нисък среден успех, то съгласно тази формула трудността и е по-голяма. Така дефинираната оценка за трудност очевидно се влияе силно от степента на подготвеност на обучаемите.

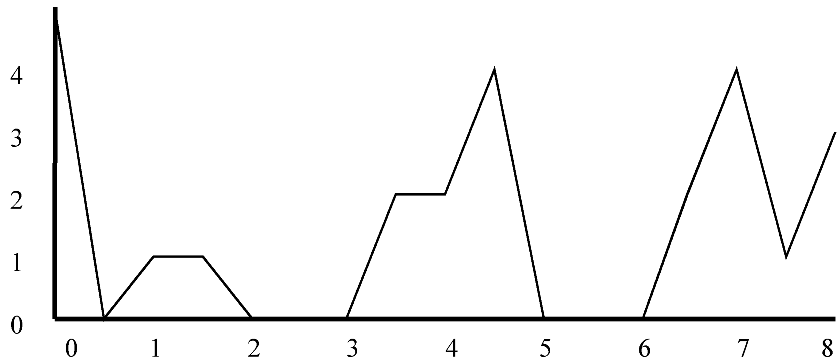
Остава открит въпросът: Как да се отчете влиянието на самата задача?

За тази цел е удобно да се въведе една нова характеристика на задачата, която ще дефинираме с формулата

$$u = \overline{x} - M,$$

където с M е означена медианата на разпределението.

Ако медианата в едно изследване е по-малка от средната стойност, това означава, че по-голям брой участници в конкурса са получили оценка, по-ниска от средната. При $\overline{x} = M(u = 0)$ разпределението е симетрично. В такъв случай, въведената по-горе характеристика u е мярка за отклонение от някакво равновесно състояние. Тази нова характеристика на изпитната задача може да се нарече "устойчивост".



Фигура 3

Може да се приеме, че една задача е добре балансирана (равновесна), ако за нея е изпълнено

$$\left|\frac{u}{\overline{x}}\right| < \frac{1}{10}.$$

Въз основа на посочените по-горе данни лесно се получават следните резултати за трудността и устойчивостта на разгледаните задачи.

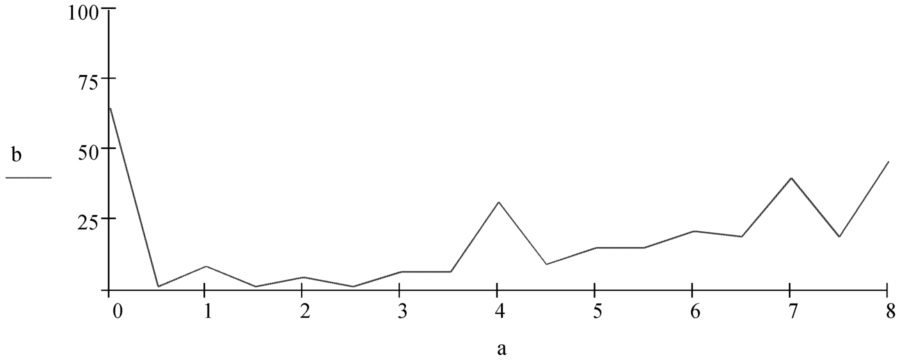
	Задача 1	Задача 2
Т	3.68	5.08
u	-0.18	0.42

Таблица 3

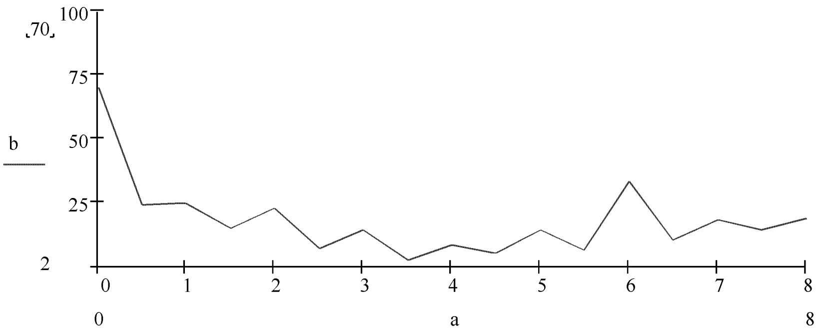
Аналогични резултати се получават за двете разгледани изпитни задачи при обработка на протоколите за всичките 307 участници в конкурса. Статистическите характеристики за цялата генерална съвкупност са изложени както следва:

No по ред	Числ. характеристики на статистическото разпределение	Задача 1-В	Задача 2
1.	Средна стойност	4.63029316	3.17752443
2.	Медиана	5.5	2
3.	Мода	0	0
4.	Дисперсия	8.551595663	8.196323261

Таблица 4



Фигура 4



Фигура 5

	Задача 1	Задача 2
T	3.37	4.83
u	-0.87	1.17

Таблица 5

Като се анализират резултатите могат да се направят следните изводи:

1. Задача 2 се е оказала по-трудна за участниците в конкурса. На нея кандидатите са получили средно по-малко точки, отколкото на задача 1 и при това стандартното отклонение от този среден брой е по-малко. Този извод се налага и поради факта,че Задача 2 има по-нисък среден процент от максимума (0.39719) от Задача 1 (0.578786645). В статистиката е прието задача, за която този коефициент е по-малък от 50% да се счита за трудна, а ако е по-голям от 80% – за лесна. Това дава възможност да се сравнят резултатите на Задача 1 и Задача 2 и спрямо средния процент от максимума за цялата конкурсна тема, който е 0.440655537.

2. Задача 1 е сравнително лесна, а Задача 2 – трудна спрямо темата.

3. При увеличаване броя на участниците в експеримента стойностите на параметрите Т и u имат устойчиво поведение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Стоименова. Измерителни качества на тестове. Нов Български Университет, София, 2000.
[2] Г. Чобанов. Статистика. АЛМА МАТЕР Интернационал.
[3] М. Найденов, Т. Маджарова. За трудността и съдържанието на една математическа задача. Научна сесия, ВВМУ, Варна, 2001.

9000 Варна, ул. "Васил Друмев", 73
Висше Военноморско училище "Н. Вапцаров"
Катедра "Математика, физика и информатика"
Милен Найденов Найденов
Татяна Стефанова Маджарова

THE DIFFICULTY AND THE STABILITY OF AN EXAMINATION PROBLEM

Milen N. Naydenov, Tatiana S. Madjarova

This work is a statistical research on two problems, given on the entrance exam in Naval Academy in 2000. It concerns some methods for accounting the difficulty and the stability of a problem. Exam results give us the opportunity to rate not only the participants but the problems as well.