МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

НЯКОИ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ ПЕРИМЕТРИ НА ТРИЪГЪЛНИЦИ

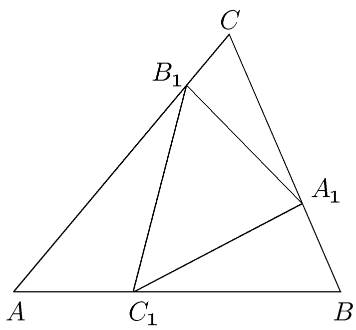
Емил Янков Стоянов

В статията е разгледана конструкцията "триъгълник, вписан в триъгълник", формулирани са и са доказани твърдения, свързани с периметрите на участващите в конструкцията триъгълници в общия случай и по-специално, когато върховете на вписания триъгълник са петите на чевианите на външния триъгълник или пък петите на перпендикулярите, спуснати към страните на външния триъгълник от вътрешна за него точка.

Известна е конструкцията "триъгълник, вписан в триъгълник" (черт. 1) (A_1, B_1 и C_1 са произволни точки съответно от страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$) и свързаните с нея твърдения:

I. (Ердьош) "Поне едно от лицата на триъгълниците AB_1C_1, A_1B_1C и A_1B_1C не надминава лицето на $\triangle A_1B_1C_1$". (Доказано от Де Брунер – 1956 г.)

II. (VIII МОМ, 1966 г. – София) "Поне едно от лицата на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C не надминава $\frac{1}{4}$ от лицето на $\triangle ABC$". (Предложена от Полша).



черт. 1

Ще отбележим, че второто твърдение следва лесно от първото.

Наистина, ако $S_{A_1B_1C_1} > \frac{1}{4}S_{ABC}$ (с S_{XYZ} означаваме лицето на $\triangle XYZ$), то поне едно от $S_{AB_1C_1}$, $S_{A_1BC_1}$ и $S_{A_1B_1C}$ няма да надминава $\frac{1}{4}S_{ABC}$, защото в противен случай

$$S_{ABC} = S_{AB_1C_1} + S_{A_1BC_1} + S_{A_1B_1C} + S_{A_1B_1C_1} > 4 \cdot \frac{1}{4}S_{ABC} = S_{ABC}.$$

Ако $S_{A_1B_1C_1} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$, то от **I** всичко е ясно!

Логично е да възникне въпроса има ли аналогични твърдения за периметрите на триъгълниците от същата конфигурация, т.е. верни ли са твърденията:

III. “Поне един от периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C не надминава периметъра на $\triangle A_1B_1C_1$”.

IV. “Поне един от периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C не надминава aP_{ABC} (с P_{XYZ} означаваме периметъра на $\triangle XYZ$), където a е константа, по-малка или равна на 1 и независеща от вида на триъгълника”.

Отговорът на **IV** е положителен, защото ако допуснем, че всеки от периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C е по-голям от $\dfrac{2}{3}P_{ABC}$, то

$$P_{AB_1C_1} + P_{A_1BC_1} + P_{A_1B_1C} > 3 \cdot \frac{2}{3}P_{ABC} = 2P_{ABC},$$

но $P_{AB_1C_1} + P_{A_1BC_1} + P_{A_1B_1C} = P_{ABC} + P_{A_1B_1C_1}$, т.е. $P_{ABC} + P_{A_1B_1C_1} > 2P_{ABC}$ откъдето $P_{A_1B_1C_1} > P_{ABC}$, което, лесно се вижда, е невъзможно!

От друга страна, нека $\triangle ABC$ е равностранен (черт. 2) със страна a и $AB_1 = BC_1 = CA_1 = x$. Тогава

$$P_{AB_1C_1} = P_{A_1BC_1} = P_{A_1B_1C} = a + \sqrt{a^2 - 3x(a-x)}$$

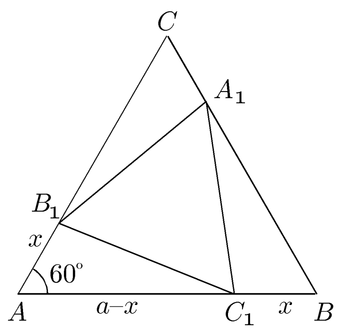
и $P_{AB_1C_1} \leq 2a$, защото

$$a + \sqrt{a^2 - 3x\,(a-x)} \leq 2a \quad \Leftrightarrow \quad 3x\,(a-x) \geq 0,$$

което е очевидно вярно, като равенство се достига при $x = a$ или $x = 0$, т.е. $\triangle A_1B_1C_1$ съвпада с $\triangle ABC$.

Но $\dfrac{2}{3}P_{ABC} = \dfrac{2}{3} \cdot 3a = 2a$.

И така $P_{AB_1C_1} = P_{A_1BC_1} = P_{A_1B_1C} \leq \dfrac{2}{3}P_{ABC}$, като равенството се достига.



черт. 2

Следователно отговорът на **IV** е $a = \dfrac{2}{3}$.

Сега ще се спрем на два частни случая за конфигурацията от черт. 1 и ще докажем за тях нещо повече от общия случай **III**. А именно:

V. “Ако AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка, то измежду периметрите на AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C поне един не надминава $P_{A_1B_1C_1}$ и поне един е по-голям или равен на $P_{A_1B_1C_1}$.”

VI. “Ако A_1, B_1 и C_1 са петите на перпендикулярите, спуснати от вътрешна точка X за $\triangle A_1B_1C_1$ (A_1, B_1 и C_1 са от страните), то измежду периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C поне един не надминава $P_{A_1B_1C_1}$ и поне един е по-голям или равен на $P_{A_1B_1C_1}$.” (Авторът предложи това твърдение като задача на последната МОМ в САЩ и тя бе включена в селекцията).

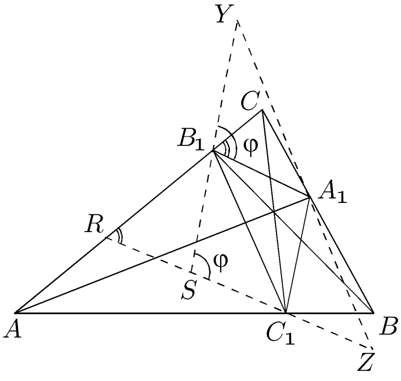
Първо ще докажем **V.**

Доказателство на V:

При условията на твърдението съществува точка S (черт. 3) от $\triangle ABC$ такава, че четириъгълникът с върхове A_1, B_1, C_1 и S е успоредник (вж. [1]). Нека за определеност $S \in \triangle AB_1C_1$.

Тогава $P_{A_1B_1C_1} = P_{B_1C_1S} \leq P_{AB_1C_1}$, т.е. $P_{AB_1C_1} \geq P_{A_1B_1C_1}$ и втората част на твърдението е доказана.

Сега да построим права, успоредна на B_1C_1 през точка A_1 и пресичаща лъчите SB_1 и SC_1 съответно в точките Y и Z. Нека $\sphericalangle A_1B_1Y = \sphericalangle C_1SB_1 = \varphi$. Тогава $\sphericalangle A_1B_1C = \sphericalangle C_1RC \leq \varphi$ (φ е външен ъгъл за $\triangle RSB_1$, като равенство се достига при $S \equiv R$), т.е.



черт. 3

(1) $$\sphericalangle A_1B_1Y \geq \sphericalangle A_1B_1C$$

Аналогично получаваме

(2) $$\sphericalangle A_1C_1Z \geq \sphericalangle A_1C_1B$$

От равенствата $\sphericalangle B_1A_1C + \sphericalangle B_1A_1C_1 + \sphericalangle C_1A_1B = 180°$ и

$$\sphericalangle B_1A_1Y + \sphericalangle B_1A_1C_1 + \sphericalangle C_1A_1Z = 180°$$

пък следва, че не може едновременно да са изпълнени неравенствата

$$\sphericalangle B_1A_1C > \sphericalangle B_1A_1Y \text{ и}$$
$$\sphericalangle C_1A_1B > \sphericalangle B_1A_1Z.$$

Нека $\sphericalangle B_1A_1C \leq \sphericalangle B_1A_1Y$ (както е на черт. 3).

Това и (1) дава, че точка C е вътрешна за $\triangle B_1A_1Y$.

(Ако $\sphericalangle C_1A_1B \leq \sphericalangle C_1A_1Z$ от (2) пък следва, че $B \in \triangle C_1A_1Z$.)

Вече е ясно, че $P_{B_1A_1C} \leq P_{B_1A_1Y} = P_{A_1B_1C_1}$ като равенство се достига когато A_1, B_1 и C_1са средите на страните на $\triangle ABC$, с което доказахме и първата част на твърдението **V**.

(Ако $S \in \triangle A_1BC_1$ или $S \in \triangle A_1B_1C$, разсъжденията са аналогични.)

Доказателство на твърдение VI:

Първо ще докажем следната

Лема. *При условията на твърдението винаги съществува точка S вътре или по контура на $\triangle ABC$ и такава, че върховете на поне един от триъгълниците (черт. 4) AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C заедно с S са върхове на успоредник.*

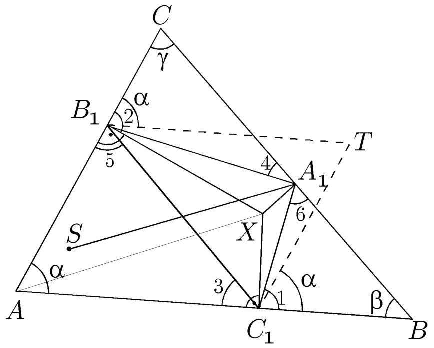
Доказателство на лемата:

Да въведем означенията $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$, $\sphericalangle A_1C_1B = \sphericalangle 1$, $\sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle 3$, $\sphericalangle B_1A_1C = \sphericalangle 4$, $\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle 5$, $\sphericalangle C_1A_1B = \sphericalangle 6$.

Ако $\sphericalangle 1 \geq \alpha$ и $\sphericalangle 2 \geq \alpha$, то A_1 е в успоредника AC_1TB_1 ($C_1T \| AC$, $B_1T \| AB$) и следователно симетричната точка на A_1 относно средата на B_1C_1 е в $\triangle AC_1B_1$, т.е. това ще е търсената точка S.

Аналогични са разсъжденията, ако $\sphericalangle 3 \geq \beta$ и $\sphericalangle 4 \geq \beta$ или $\sphericalangle 5 \geq \gamma$ и $\sphericalangle 6 \geq \gamma$.

Да допуснем, че не е изпълнен нито един от горните три случая. Без да ограничаваме общността можем да приемем, че $\angle 1 < \alpha$. Тогава $\sphericalangle 6 > \gamma$ (от $\triangle A_1BC_1$ и $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 6 + \beta = 180°$) и следователно $\sphericalangle 5 < \gamma$ (от допускането), от което пък следва $\sphericalangle 3 > \beta$ (както преди малко, но от $\triangle AB_1C_1$) и значи $\sphericalangle 4 < \beta$ (отново от допускането), което пък води до $\sphericalangle 2 > \alpha$ (от $\triangle A_1B_1C$). От всичко това получаваме $\sphericalangle 1 < \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 > \sphericalangle 4$ и $\sphericalangle 5 < \sphericalangle 6$.



черт. 4

Тогава AC_1XB_1 е вписан в окръжност и следователно $\sphericalangle AXB_1 = \sphericalangle 3$. Аналогично $\sphericalangle CXB_1 = \sphericalangle 4$.

$$AX = \frac{XB_1}{\cos \sphericalangle 3} > \frac{XB_1}{\cos \sphericalangle 4} = CX, \quad \text{т.е.}$$

(1) $$AX > CX.$$

По същия начин от $\sphericalangle 6 > \sphericalangle 5$ и $\sphericalangle 2 > \sphericalangle 1$ следват неравенствата $BX > AX$ и $CX > BX$, което заедно с (1) води до противоречивата верига

$$AX > CX > BX > AX.$$

Следователно допускането не е вярно, т.е. изпълнен е един от трите случая, за които стана въпрос в началото. С това лемата е доказана.

От тук нататък доказателството на **VI** е точно повторение на доказателството на **V**, но имайки предвид черт. 4.

Накрая ще отбележим, че втората част на твърденията **V** и **VI** не е изпълнена в общия случай, т.е. не можем да допълним **III** с твърдението, че поне един от периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C е по-голям или равен на $P_{A_1B_1C_1}$, което е ясно от доказателството на **IV**. Там при $x \neq \dfrac{a}{2}$ имаме (черт. 2)

$$\begin{aligned}
&P_{A_1B_1C_1} = 3\sqrt{a^2 - 3x\,(a-x)},\\
&P_{AB_1C_1} = P_{A_1BC_1} = P_{A_1B_1C} = a + \sqrt{a^2 - 3x(a-x)} \ \text{ и}\\
&3\sqrt{a^2 - 3x(a-x)} > a + \sqrt{a^2 - 3x(a-x)} \iff 3(a-2x)^2 > 0,
\end{aligned}$$

което при направеното предположение за x е очевидно вярно.

И така $P_{A_1B_1C_1} > P_{AB_1C_1} = P_{A_1BC_1} = P_{A_1B_1C}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Стоянов. Някои геометрични оценки в триъгълник, *Математика и математическо образование*, **22**, (1993) 274–275.

Емил Янков Стоянов
ж.к. Плиска, бл. 6, ет. 9, ап. 53
3700 Видин, България

SOME INEQUALITIES BETWEEN PERIMETERS OF TRIANGLES

Emil Yankov Stoianov

The subject of this article is The triangle-inscribed-into-triangle construction. Connections have been made and proofs have been given related to the perimeters of the configured triangles in general, and in the particular case in which the inscribed triangle's vertices are the intersection points of the chevians of the exterior triangle or in the case in which the inscribed triangle's vertices are the intersection points of the perpendiculars to the exterior triangle's sides drawn from an interior point.