МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

НЮТОНОВИ ИНТЕГРАЛИ

Владимир Тодоров, Петър Стоев, Михаил Константинов

Разгледани са някои аспекти на преподаването на определен интеграл в смисъла на Нютон в техническите и икономическите университети.

Стандартният похват на преподаването на определен интеграл в техническите и икономическите университети следва доста ортодоксалната версия, която се е утвърдила в университетите в Европа през втората половина на XIX век. Ще забележим, че в България *във всички* университети темата "определен интеграл" се преподава и до ден днешен по същия начин: дефинират се суми на Дарбу или Риман, обяснява се (най-често без достатъчно разбиране на материята) какво е това граница на такива суми и след това се тръгва по пътя на борба с тази дефиниция. Пътят не е лек, защото основните свойства, както и методите за пресмятане на определения интеграл са неочевидни и нелеки следствия от тази дефиниция. Допълнително затруднение тук е обстоятелството, че в една или друга степен бъдещи инженери или химици, или икономисти, или информатици трябва да усвоят какво е това граница на обобщена редица.

Както е добре известно, още от времето на Нютон и Лайбниц съществуват два начина да се каже какво е определен интеграл – на Нютон и на Лайбниц. Приетата у нас практика следва метода на Лайбниц, в който интегралът се определя като граница на това, което сега най-често се нарича сума на Риман. Ще отбележим, че идеята за интегрална сума по същество произхожда от *метода на изчерпването* на Евдокс и Архимед. Лайбниц развива тази идея в математически апарат и са били нужни два века, за да бъде прецизирано понятието за интеграл от Риман. И така, през втората половина на XIX век стандартната концепция за интеграл е оформена достатъчно добре, за да обслужва както теоретичните, така и приложните раздели на естествознанието. Интегруемите функции са тези, които са ограничени и прекъснати в множество с мярка на Лебег нула и този клас е достатъчно широк за различните приложения. Той е даже *твърде широк*, например за целите на обучението в техническите университети (ТУ). Естествено, това утежнява преподаването на темата определен интеграл и в общия случай демотивира студентите за по-задълбоченото ѝ усвояване.

Избързвайки малко ще отбележим, че всички съществени за инженерната наука (а и за всички естествени науки) функции са по части аналитични.

Нютон предлага друг подход. Той дефинира определения интеграл посредством това, на което сега му казваме "теорема на Лайбниц-Нютон". Впрочем, напълно в духа на своята епоха Нютон въобще не е изпитвал колебания относно геометричния смисъл на въведения от него интеграл. Без да коментира "очевидния" в тези времена факт за съществуването на лицето на дадена равнинна фигура (или област), той показва как се пресмята това лице. В това между другото се състои доказателството на Нютон на теоремата на Лайбниц-Нютон. Този геометричен стил според нас е подходящ за преподаването в ТУ и в наши дни. Наистина, в инженерната практика и теория не се работи с неизмерими по Жордан области.

При подхода на Нютон свойствата на определения интеграл, а също така и методите за неговото пресмятане, са прости следствия от дефиницията му. И щом като е така, то въпросът защо да не се възприеме този подход, е основателен. Тук ще обсъдим някои аргументи "за" и "против".

Разликата между интегралите, определени по Лайбниц (ще им казваме L интеграли) и тези по Нютон (N интеграли) е не само в дефинициите. Както е добре известно, двете дефиниции определят *различни* класове от интегруеми функции. Нека например $F(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x^2}$ за $x \neq 0$ и $F(0) = 0$. Ясно е, че

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} \sin \dfrac{1}{x^2}, & \text{ако} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ако} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Значи ако $F' = f$, то съществува $(N) \int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$, например

$$(N) \int\limits_{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}}^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} f(x)dx = F\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = -\frac{1}{\pi}.$$

Да забележим обаче, че $(L) \int\limits_a^b f$ не съществува във всеки интервал, който съдържа нулата, защото там функцията f е неограничена и не може да се говори за Риманови суми в този случай.

Без особен труд може да се построи функция f, която е ограничена и прекъсната *във всяка точка* от Канторово множество (например в интервала $[0, 1]$) с положителна мярка и която *има примитивна* F. Ясно е, че $(N) \int\limits_0^1 f = F(1) - F(0)$ съществува, а $(L) \int\limits_0^1 f$ *не съществува*, защото f е прекъсната в множество с положителна мярка.

От друга страна възможно е някоя функция да е (L) интегруема, но да няма интеграл в смисъл на Нютон. Такава е например характеристичната функция на класическото Канторово множество. Тя е прекъсната в неизброимо множество от точки, което има мярка нула.

1.1 По дефиниция

$$(N)\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

където F е примитивна на f в интервала $[a, b]$. Основната теорема на интегралното смятане гарантира, че тази дефиниция е добра.

За да бъде използвана пълноценно дефиниция 1.1 трябва да имаме представа за какъв клас от функции става дума в нея. И ако е възможно да се разшири този клас, то не е лошо да го направим. По наше мнение добра възможност дава идеята за *обобщена примитивна* [2], вж. също [3, 1] и [4, 5].

1.2 Функцията F е *обобщена примитивна* на f в интервала $[a, b]$, ако F е непрекъсната в $[a, b]$ i $F'(x) = f(x)$ за всички $x \in [a, b]$ освен евентуално за краен брой точки от интервала $[a, b]$.

Идеята да използваме обобщени примитивни е добра, защото основната теорема на интегралното смятане е вярна и за обобщени примитивни:

1.3 *Ако F и G са обобщени примитивни на f в интервала $[a, b]$, то $F(x) - G(x) = \mathrm{const}$.*

Доказателството (според нас не е необходимо то да бъде излагано стриктно) е съвсем достъпно за студентите от техническите и икономическите университети и е интуитивно ясно. Наистина, ако F или G нямат производна евентуално в точките $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_p \le b$, то $F'(x) = G'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (x_{i-1}, x_i) \subset [a, b]$. Следователно $F - G = \mathrm{const}_i$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Освен това $F - G$ е непрекъсната функция в $[a, b]$. Значи дефиниция 1.1 е коректна и за обобщени примитивни.

Горната забележка позволява прозрачно изграждане на теорията на определените интеграли, защото обобщена примитивна има всяка стъпаловидна или по части линейна функция, а тъкмо тези функции са от значение за различните приложения на определените интеграли. Че всяка стъпаловидна функция например има обобщена примитивна се вижда лесно. Наистина, нека $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k+1} = b$ и за $x \in (x_{i-1}, x_i)$ имаме $f(x) = p_i$. Лесно е да се обясни, че стойността на f в точките x_i не е от значение. Тогава функцията F, определена от равенството

$$F(x) = p_i(x - x_{i-1}) + p_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2}) + \cdots + p_1(x_1 - x_0)$$

за $x \in [x_{i-1}, x_i]$ е обобщената примитивна на f, за която $F(a) = 0$. Всяка друга примитивна има вида $F + \mathrm{const}$.

N интегруемите фукции образуват достатъчно широк за приложения клас.

1.4 Ако f е N интегруема и е равномерна граница на N интегруемата редица $\{f_n\}$, то

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \le \varepsilon(b - a),$$

ако $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ за всяко $x \in [a, b]$. Това означава, че множесвтото на N интегруемите функции е затворено относно равномерната сходимост. По-долу ще видим, че от тук лесно следва, че за непрекъснати (и следователно и за по части непрекъснати функции) интегралите по Нютон и по Лайбниц съвпадат.

Може да се докаже [1], че N интегруема е всяка функция, която е равномерна граница на стъпаловидни функции и интегралът ѝ е равен на границата на съответните интеграли, но това според нас не необходимо да се прави, поне в ТУ. Достатъчно е да покажем, че всяка по части непрекъсната функция е N интегруема, а за тази цел е достатъчно да се убедим, че всяка непрекъсната функция има примитивна. Това се получава например по следния начин.

1.5 Всяка непрекъсната в интервала $[a, b]$ функция f е равномерна граница на по части линейни непрекъснати функции.

Доказателството (което и тук може да е идейно) следва от факта, че f е равномерно непрекъсната. Наистина, ако $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ са такива, че $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ за $|x - y| < \delta$, то по части линейната фунция g, определена по-долу, е равномерно 2ε-близка до f.

Вземаме достатъчно голямо естествено n, за което $h = \dfrac{b-a}{n} < \delta$ и полагаме $x_i = a + ih$ за $i = 0, 1, \dots, n$. Тогава за $x \in [x_{i-1}, x_i]$ полагаме

$$g(x) = \frac{1}{h}((x - x_{i-1})f(x_i) - (x - x_i)f(x_{i-1}))$$

и получаваме

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{|x - x_{i-1}|}{h}|f(x) - f(x_i)| + \frac{|x_i - x|}{h}|f(x_{i-1}) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Тъй като g очевидно има примитивна (тя се изписва лесно в явен вид), то от тук получаваме, че всяка непрекъсната функция има примитивна и значи е N интегруема.

Впрочем, ако останем във важната за приложенията класа на по части аналитичните функции f, доказателството за съществуване на обобщена примитивна на f е тривиално.

Тъй като сумите на Риман са важни за приложенията на интегралите, то трябва да отбележим, че когато дадена функция е едновременно L и N интегруема, двата вида интеграли са равни. Впрочем, според нас е достатъчно това да се покаже само за непрекъснати или по части непрекъснати функции.

Да разгледаме по-подробно въпроса за връзката между определените интеграли по Нютон и по Лайбниц. Както беше отбелязано по-горе, когато двата интеграла да съществуват, те са равни. Преди да покажем това ще направим следната забележка.

1.6 *Ако функцията f има примитивна в $[a, b]$, то съществува подредица (в смисъл на обобщени редици) от Риманови суми на f, всеки елемент на която е равен на $(N)\int\limits_a^b f$.*

Доказателство. Нека $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е разбивка на интервала $[a, b]$, т.е., $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Тогава

$$(N)\int\limits_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} (N)\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)).$$

Според формулата на Лагранж имаме

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

където $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Следователно

$$\textbf{(N)} \qquad (N)\int\limits_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \mathcal{R}(f, T),$$

където $\mathcal{R}(f, T)$ е Риманова сума на f за разбивката T.

Като следствие на 1.6 получаваме и отговор на поставения по-горе въпрос.

1.7 *Нека функцията $f : [a, b] \to R$ е интегруема по Лайбниц и има примитивна. Тогава*

$$(N)\int\limits_a^b f = (L)\int\limits_a^b f.$$

От тук лесно се получава, че интегралите на Нютон и на Лайбниц съвпадат също така и за по части непрекъснати функции. В приложенията не е необходимо да се разглеждат гранични процеси с обобщени редици; достатъчно е да се докаже, че твърдението 1.6 е вярно и за по части непрекъснати функции – то е очевидно за тези разбивки, чиито възли включват и точките на прекьсване.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Боярчук. Основы классического и современного анализа. Выща школа, Киев, 1965.

[2] Н. Бурбаки. Функции действительного переменного (элементарная теория). Наука, Москва, 1965.

[3] А. Карташев, Б. Рождественский. Математический анализ. Наука, Москва, 1984.

[4] М. Константинов. Техника на интегрирането. Неопределен интеграл. Изд. УАСГ, София, 1996.

[5] В. Тодоров. Интеграли от числови функции. Изд. ВИАС, София, 1997.

Вл. Тодоров, П. Стоев, М. Константинов

УАСГ, бул. Хр. Смирненски 1

1421 София

NEWTON INTEGRALS

V. Todorov, P. Stoev, M. Konstantinov

The paper deals with some aspects of teaching the concept of definite integral in the sense of Newton at technical and economical universities.