МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

ФОРМУЛИ ЗА ПРЕСМЯТАНЕ НА СТЕПЕННИ СБОРОВЕ

Валери Стефанов Цеков

Целта на тази работа е да представи основните свойства и съответните инструменти за пресмятане на степенни сборове. Тази теория е илюстрирана с подходящи задачи. Обърнато е специално внимание на формулата на Варинг като по-малко известна явна формула.

За произволни естествени числа k и n (т.е. $k \in N$, $n \in N$) разглеждаме сумата:

$$s_n(k) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \tag{1}$$

където $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са корените на даден полином $p_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с произволни коефициенти. Числата $s_n(k)$ се наричат степенни сборове и са обект на много алгебрични задачи, давани по време на математически състезания. За да могат учениците да ги решават, е необходимо да познават основните свойства на степенните сборове, които не се изучават в часовете за общозадължителна подготовка по математика в средното училище. В тази статия ще направим преглед на въпросните свойства и на начините за пресмятане на степенните сборове, а теорията ще илюстрираме с подходящи задачи. По-голямо внимание ще отделим на формулата на Варинг (Waring), като по-малко позната и единствената явна формула.

Директното пресмятане на $s_n(k)$ с помощта на дефиницията (1) на практика много рядко се използва, тъй като е невъзможно, когато корените не могат да бъдат намерени, и е много трудно осъществимо, когато степенният показател k е голям, или корените се намират трудно, или броят им n е голям, или са ирационални или имагинерни числа.

Формулата на Нютон е най-често прилаганото свойство на степенните сборове. Тъй като тя е добре позната, то само ще я припомним, без да се спираме на нейното доказателство (такова може да бъде намерено например в [1] и [2]):

$$s_n(k) + a_1 s_n(k-1) + a_2 s_n(k-2) + \ + a_{k-1} s_n(1) + a_k k = 0, \tag{2}$$

където $k \in N$ и $a_p = 0$ за всяко $p > n$. Ако използваме познатите формули на Виет $a_p = (-1)^p \sigma_p(n)$, където $\sigma_p(n) = \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$ за $1 \le p \le n$ и $\sigma_p(n) = 0$ за $p > n$ са елементарните симетрични полиноми на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то:

$$s_n(k) - \sigma_1(n) s_n(k-1) + \sigma_2(n) s_n(k-2) + \ + (-1)^{k-1\sigma}_{k-1}(n) s_n(1) + (-1)^{k\sigma}_{k}(n) k = 0. \tag{3}$$

Като всички рекурентни формули Нютоновата има един голям недостатък: за да изчислим $s_n(k)$ за $k > 1$, трябва преди това да изчислим $s_n(i)$, за $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Формулата на Варинг изразява всеки степенен сбор $S_n(k)$ в явен вид или чрез коефициентите a_i на полинома $p_n(x)$, или чрез елементарните симетрични полиноми σ_i. Преди да я докажем ще въведем за удобство следните обозначения:

$N_0 = \{n$ цяло: $n \geq 0\}$, $[x]$ – цялата част на реалното число $x \geq 0$;

За k, m, $n \in N : n! = \begin{cases} 1.2.3\dots n & \text{за } n > 0 \\ 0 & \text{за } n = 0 \end{cases}$,

$N_0^n = \{(i_1, i_2, \dots, i_n)$: $i_p \in N_0$, $p = 1, 2, \dots, n\}$,

$I_n = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in N_0^n$, $l(I_n) = \sum\limits_{p=1}^{n} i_p$, $h(I_n) = \sum\limits_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} i_{2p}$, $d(I_n) = \sum\limits_{p=1}^{n} p i_p$,

$I_n! = i_1! i_2! \cdots i_n!$, $a^{I_n} = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$, $\sigma^{I_n} = (\sigma_1(n))^{i_1} (\sigma_2(n))^{i_2} \dots (\sigma_n(n))^{i_n}$,

$N_n(k) = \{I_n \in N_0^n : l(I_n) = k\}$, $M_n(k) = \{I_n \in N_0^n : d(I_n) = k\}$,

$M_{n,m}(k) = \{I_n \in M_n(k) : i_m > 0\}$.

Теорема на Варинг. *За $k \in N$ и $n \in N$ е в сила:*

$$s_n(k) = \sum_{I_n \in M_n(k)} \frac{(-1)^{l(I_n)} k\,(l\,(I_n) - 1)!}{I_n!} a^{I_n} = \sum_{I_n \in M_n(k)} \frac{(-1)^{h(I_n)} k\,(l\,(I_n) - 1)!}{I_n!} \sigma^{I_n}.$$

Използването на симетричните полиноми $\sigma_p(n)$ във формулите на Нютон и Варинг ги прави по-универсални, тъй като тогава можем да ги прилагаме за произволни променливи $x_1, x_2, \dots, x_n$, а не само за корените на полином.

В [2] и [3] са дадени доказателства на теоремата на Варинг, които използват неизучавани в средното училище знания от математическия анализ: някои свойства на сходящите редове, теоремата на Тейлър, както и следната:

Теорема на Нютон. *За $k \in N$, $n \in N$ и за произволни $x_1, x_2, \dots, x_n$ е в сила:*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{I_n \in N_n(k)} \frac{k!}{I_n!} x^{I_n}.$$

Частен случай на горната формула е добре познатият Нютонов бином.

Доказателството на теоремата на Варинг, което ще предложим в тази статия, използва само знания от елементарната математика: формулата (2) на Нютон и следващите четири леми. Лесно се съобразява верността на първата от тях:

Лема 1. *а) $N_n(0) = M_n(0) = \{(0, 0, \dots, 0) \in N_0^n\}$; б) $M_{n,k}(k) = \{I_n \in N_0^n$: $i_k = 1$ и $i_p = 0$ за $p \neq k\} = M_n(k) \cap N_n(1)$ за $k \leq n$; в) $M_{n,m}(k) = \emptyset$ за $k < m \leq n$.*

Лема 2. *За $m \leq k$ съществува еднозначно обратимо съответствие между множествата $M_{n,m}(k)$ и $M_n(k - m)$.*

Доказателство. Очевидно, че съответствието $f : M_{n,m}(k) \to M_n(k - m)$, за което $f(i_1, \dots, i_{m-1}, i_m, i_{m+1}, \dots, i_n) = (i_1, \dots, i_{m-1}, i_m - 1, i_{m+1}, \dots, i_n)$, е еднозначно обратимо.

Лема 3. *За произволни $I_n \in N_0^n$ и $n \in N$:*

а) $d(I_n)(l(I_n) - 1) = \sum\limits_{m=1}^{min(n, d(I_n) - 1)} i_m\,(d\,(I_n) - m)$; б) $\dfrac{d\,(I_n)\,(l\,(I_n) - 1)\,!}{I_n!} \in N_0$.

Доказателство. а) $d(I_n)(l(I_n) - 1) = l(I_n) d(I_n) - d(I_n) = \left(\sum\limits_{m=1}^{n} i_m\right)\left(\sum\limits_{p=1}^{n} p i_p\right) -$

$\sum\limits_{m=1}^{n} mi_m = \sum\limits_{m=1}^{n} i_m \left(\sum\limits_{p=1}^{n} pi_p - m \right) = \sum\limits_{m=1}^{n} i_m \left(d\left(I_n \right) - m \right).$

За да получим желания вид на горната сума, остава да съобразим, че: ако $d(I_n) < m \leq n$, то съгласно Лема 1 в) имаме $i_m = 0$; ако $d(I_n) = m$, то $d(I_n) - m = 0$.

б) Даденото частно е равно на нула само когато или $l(I_n) = 0$ (понеже тогава $I_n = (0, 0, \ldots, 0)$ и следователно $d(I_n) = 0$), или $l(I_n) = 1$.

Понеже $\dfrac{l\left(J_n\right)!}{J_n} \in N$ за всяко $J_n \in N_0^n$, $J_n \neq (0, 0, \ldots, 0)$, то за $l(I_n) > 1$ имаме:

$$\frac{d\left(I_n\right)\left(l\left(I_n\right)-1\right)!}{I_n!} = \frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{n} mi_m\right)\left(l\left(I_n\right)-1\right)!}{I_n!} = \sum_{m=1}^{n} \frac{mi_m\left(l\left(I_n\right)-1\right)!}{I_n!},$$

$$\frac{i_m(l(I_n)-1)!}{I_n!} = \begin{cases} \dfrac{(l(I_n)-1)!}{i_1!\ldots i_{m-1}!(i_m-1)!i_{m+1}!\ldots i_n!} = \dfrac{(J_n)!}{J_n!} & \text{при } i_m > 0 \\ 0 & \text{при } i_m = 0 \end{cases},$$

където

$$J_n = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in N_0^n, j_p = i_p \ \text{ за } \ p \neq m \ \text{ и } \ j_m = i_m - 1. \tag{4}$$

Лема 4. *Нека за* $k \in N$ *и* $n \in N$

$$t_n(k) = \sum_{I_n \in M_n(k)} \frac{(-1)^{l(I_n)} k\left(l\left(I_n\right)-1\right)!}{I_n!} a^{I_n}, \tag{5}$$

където $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ *е редица, за която* $a_p = 0$ *за* $p > n$. *Тогава е в сила равенството:*

$$t_n(k) + a_1 t_n(k-1) + a_2 t_n(k-2) + \cdots + a_{k-1} t_n(1) + k a_k = 0. \tag{6}$$

Доказателство. За $k = 1$ равенство (6) приема вида $t_1(k) + a_1 = 0$ и се удовлетворява от $t_n(1) = \dfrac{(-1)^1 .1.0!}{1!} a_1 = -a_1$, пресметнато по формула (5).

Нека сега $1 < k \leq n$. Като приложим последователно равенството $l(I_n) - 1)! = (l(I_n) - 1)(l(I_n) - 2)!$, Лема 3 а), Лема 1 б), съкращение на i_m, когато то е различно от нула (при $i_m = 0$ съответното събираемо е равно на нула), прегрупиране на събираемите, Лема 2 и използваме полагането (4), ще получим: $t_n(k) =$

$$\sum_{\substack{I_n \in M_n(k) \\ l(I_n) > 1}} \frac{(-1)^{l(I_n)} d(I_n)(l(I_n)-1)(l(I_n)-2)!}{I_n!} a^{I_n} + \sum_{\substack{I_n \in M_n(k) \\ l(I_n) = 1}} \frac{(-1)^{l(I_n)} k(I_n)(l(I_n)-1)!}{I_n!} a^{I_n} =$$

$$= \sum_{\substack{I_n \in M_n(k) \\ l(I_n) > 1}} \frac{(-1)^{l(I_n)} \left(\sum\limits_{m=1}^{k-1} i_m(d(I_n - m) \right)(l(I_n)-2)!}{I_n!} a^{I_n} - k a_k =$$

$$-\sum_{m=1}^{k-1} a_m \sum_{I_n \in M_{m,n}(k)} \frac{(-1)^{l(I_n)-1}(k-m)(l(I_n)-2)!}{i_1!\ldots i_{m-1}!(i_m-1)!i_{m+1}!\ldots i_n!} a_1^{i_1} \ldots a_{m-1}^{i_{m-1}} a_m^{i_m - 1} a_{m+1}^{i_{m+1}} \ldots a_n^{i_n} - k a_k =$$

$$-\sum_{m=1}^{k-1} a_m \sum_{J_n \in M_n(k-m)} \frac{(-1)^{l(J_n)} (k-m) (l (J_n) - 1)!}{J_n!} a^{J_n} = -\sum_{m=1}^{k-1} a_m t_n(k-m) - k a_k.$$

Нека накрая $k > n$. Повтаряме горните преобразувания, с тази разлика, че:

$-ka_k$ няма да го има, тъй като от $k > n$ следва, че $l(I_n) > 1$ за всяко $I_n \in M_n(k)$;

– Лема 3 а) ще прилагаме за $\min(n, d(I_n) - 1) = \min(n, k-1) = n$;

и получаваме $t_n(k) = -\sum\limits_{m=1}^{k-1} a_m t_n(k-m)$, което е равносилно на (6), понеже $a_p = 0$ за $p > n$.

Доказателство на теоремата на Варинг. Достатъчно е да докажем, че $s_n(k) = t_n(k)$ за всеки $k, n \in N$. Това ще направим с математическа индукция по k.

За $k = 1$: $s_n(1) = t_n(1) = -a_1$.

Допускаме, че $s_n(m) = t_n(m)$ за всяко $m < k, k > 1$. Ще докажем, че тогава и $s_n(k) = t_n(k)$. За целта заместваме в доказаното в лема 4 равенство (6) и получаваме:

$$t_n(k) + a_1 s_n(k-1) + a_2 s_n(k-2) + \ldots + a_{k-1} s_n(1) + k a_k = 0.$$

Тогава от горното равенство и от равенство (2) следва, че $s_n(k) = t_n(k)$.

Второто равенство на теоремата следва директно от формулите на Виет.

Прилагайки формулите на Нютон и Варинг за решаване на олимпиадни задачи, ще използваме и следните четири твърдения:

$$\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} = \binom{n}{m} \tag{7}$$

$$n\binom{n-1}{m-1} = m\binom{n}{m} \quad \text{за} \quad m \in N, n \in N, m \leq n. \tag{8}$$

Понеже $M_3(3) = \{(3,0,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$, то от формулата на Варинг имаме:

$$\begin{aligned} s_3(3) &= \frac{3.2!}{3!} (\sigma_1(3))^3 + \frac{(-1)^1 3.1!}{1!1!} \sigma_1(3) \sigma_2(3) + \frac{3.0!}{1!} \sigma_3(3) = \\ &= (\sigma_1(3))^3 - 3\sigma_1(3)\sigma_2(3) + 3\sigma_3(3). \end{aligned} \tag{9}$$

Лема 5. *Ако x_1, x_2, x_3 са неотрицателни числа, то $s_3(3) + 6\sigma_3(3) \geq \sigma_1(3)\sigma_2(3)$.*

Доказателство. От лесното за проверка равенство:

$$(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)(-x_1 + x_2 + x_3) - x_1 x_2 x_3 = \sigma_1(3)\sigma_2(3) - s_3(3) - 6\sigma_3(3)$$

следва, че Лема 5 е равносилна на: $(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)(-x_1 + x_2 + x_3) \leq x_1 x_2 x_3$.

Лесно се съобразява, че или точно едно от трите числа $u = x_1 - x_2 + x_3$, $v = x_1 + x_2 - x_3$, $w = -x_1 + x_2 + x_3$ е отрицателно, или нито едно. В първия случай горното неравенство е очевидно, а в другия следва от получените от неравенството между средноаритметично и средногеометрично: $\sqrt{uv} \leq x_1$, $\sqrt{vw} \leq x_2$, $\sqrt{wu} \leq x_3$.

За строго положителни x_1, x_2, x_3 лема 5 е еквивалентна на следната:

Задача 1. Положителните числа a, b, c са такива, че $abc = 1$. Да се докаже, че

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

(XLI MOM, 2000 г., [7], бр. 3/2000, с. 45 , зад. 2)

Наистина, желаната еквивалентност може да се получи, като за подходящо подбрани положителни числа x_1, x_2, x_3 положим $a = \dfrac{x_1}{x_2}$, $b = \dfrac{x_2}{x_3}$, $c = \dfrac{x_3}{x_1}$.

Задача 2. Нека k и n са цели числа такива, че $1 \leq k \leq n$ и нека $a_1, a_2, \ldots, a_k$ удовлетворяват равенствата: $\begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_k = -n \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 = n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^k + a_2^k + \cdots + a_k^k = (-1)^k n \end{cases}$.

Докажете, че $(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k) = x^k + \binom{n}{1}x^{k-1} + \binom{n}{2}x^{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}$.

(Финален кръг на олимпиадата в Япония, 1995, [4], с. 29, зад. 221)

Решение. Съгласно условието на задачата корените на дадения полином са $x_i = -a_i$, а от дадените равенства следва, че $s_k(i) = (-1)^i n$ за $i = 1, 2, \ldots, k$.

От формулата (2) на Нютон имаме

$$s_k(m) + b_1 s_k(m-1) + b_2 s_k(m-2) + \cdots + b_{m-1} s_k(1) + b_m m = 0, \tag{10}$$

където с b_i е означен коефициентът на дадения полином пред x^{m-i} за $i = 1, 2, \ldots, m$ и $m \in N$, като $b_i = 0$ за $i > k$.

Чрез математическа индукция по m ще докажем равенството:

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-1-i}\binom{n}{i} = \binom{n-1}{m-1} \quad \text{за} \quad m \in N, n \in N, m \leq n. \tag{11}$$

За $m = 1 : (-1)^0\binom{n}{0} = 1 = \binom{n-1}{0}$. Допускаме верността на (11) за някое $m < n$. Като използваме индукционното допускане и (7), ще докажем верността на (11) и за $m+1$:

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}\binom{n}{i} + (-1)^0\binom{n}{m} = -\binom{n-1}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m}.$$

Пак чрез индукция ще докажем, че $b_m = \binom{n}{m}$ за $m = 1, 2, \ldots, k$.

За $m = 1$ от (10) получаваме $s_k(1) + b_1 = 0$, откъдето $b_1 = -s_k(1) = n = \binom{n}{1}$.

Да допуснем, че $b_i = \binom{n}{i}$ за $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $m > 1$. Ще докажем, че тогава и $b_m = \binom{n}{m}$. Като използваме индукционното допускане и равенство $s_k(i) = (-1)^i n$ и заместим в равенство (10), след което приложим последователно равенства (11) и (8), ще получим: $mb_m = (-1)^{m-1}n\binom{n}{0} + (-1)^{m-2}n\binom{n}{1} + \cdots + (-1)^0 n\binom{n}{m-1} = n\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{m-1} = m\binom{n}{m}$, откъдето се получава $b_m = \binom{n}{m}$.

Задача 3. Нека a, b и c са реални числа, за които $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 4$ и $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 5$. Да се намери $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$. ([7], бр. 1/1998, с. 7 , зад. М+115)

Решение. Ако означим $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{b}{c}$, $x_3 = \frac{c}{a}$, то $\sigma_3(3) = x_1x_2x_3 = 1$, а в такъв случай от дадените в условието равенства следва, че $\sigma_1(3) = x_1 + x_2 + x_3 = 4$

и $\sigma_2(3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 5$. Това, което се търси е $s_3(3)$ и от (9) получаваме: $s_3(3) = 4^3 - 3.4.5 + 3 = 7$. Аналогично можем да пресметнем и $s_3(i), i > 3$.

Задача 4. Да се докаже, че за всеки три неотрицателни числа a, b и c е в сила неравенството $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \dfrac{1}{4}(a + b + c)^3$, като равенство се достига само тогава, когато две от тях са равни, а третото е нула. (Четвърти кръг на олимпиадата в България, 1980 г., [5], с. 34 , зад. 80-4-4)

Решение. Напред ще разгледаме случая, когато поне едно от трите числа, например c, е равно на нула. Тогава неравенството ще добие вида $a^3 + b^3 \geq \dfrac{1}{4}(a+b)^3$, а верността му следва от следното представяне $a^3 + b^3 - \dfrac{1}{4}(a+b)^3 = \dfrac{3}{4}(a+b)(a-b)^2$, от което става ясно, че равенството е възможно само когато $a = b$.

Нека сега и трите числа са положителни. Ако означим $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ и приложим (9), то доказваното неравенство добива вида $s_3(3) + 6\sigma_3(3) \geq \dfrac{1}{4}(\sigma_1(3))^3$. Доказателството на последното се получава от (9) и от Лема 5 по следния начин:

$$s_3(3) + 6\sigma_3(3) - \frac{1}{4}(\sigma_1(3))^3 = \frac{3}{4}(s_3(3) + 9\sigma_3(3) - \sigma_1(3)\sigma_2(3)) \geq \frac{3}{4}3\sigma_3(3) = \frac{9}{4}\sigma_3(3) > 0.$$

Задача 5. Нека x, y и z са такива неотрицателни реални числа, че $x + y + z = 1$. Да се докаже, че $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \dfrac{7}{27}$. (XXV МОМ, 1984 г., [6], бр. 8/1984, с. 6, зад. 1)

Решение. Ако означим $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, то доказваните неравенства ще добият вида $0 \leq \sigma_2(3) - 2\sigma_3(3) \leq \dfrac{7}{27}$. Лявото от тях следва от представянето $\sigma_2(3) - 2\sigma_3(3) = xy(1-z) + yz(1-x) + zx = xy(x+y) + yz(y+z) + zx \geq 0$.

Тъй като $\sigma_1(3) = 1$, то от неравенството между средно геометрично и средно аритметично следва, че $\sigma_3(3) = xyz \leq \dfrac{(x+y+z)^3}{27} = \dfrac{(x+y+z)^3}{27}$, а от лема 5 получаваме неравенството $s_3(3) + 6\sigma_3(3) \geq \sigma_2(3)$, равносилно на: $-s_3(3) - 3\sigma_3(3) \leq 3\sigma_3(3) - \sigma_2(3)$.

С помощта на равенство (9) и на третото и първото от току-що доказаните три неравенства получаваме: $3\sigma_2(3) - 6\sigma_3(3) = 1 - s_3(3) - 3\sigma_3(3) \leq 1 + 3\sigma_3(3) - \sigma_2(3)$, откъдето $4\sigma_2(3) - 8\sigma_3(3) \leq 1 + \sigma_3(3) \leq 1 + \dfrac{1}{27} = \dfrac{8}{27}$ и накрая $\sigma_2(3) - 2\sigma_3(3) \leq \dfrac{7}{27}$.

Задача 6. Сумата на три цели числа u, v и w е равна на нула. Докажете, че числото $2u^4 + 2v^4 + 2w^4$ е квадрат на цяло число. (Задачник на [8], бр. 9/1984, с. 34, зад. М882)

Решение. Ако означим $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = w$, то $\sigma_1(3) = 0$ и тъй като $M_3(4) = \{(4,0,0), (2,1,0), (1,0,1), (0,2,0)\}$, то от формулата на Варинг получаваме:

$$s_3(4) = \frac{3.2!}{3!}\left(\sigma_1(3)\right)^3 + \frac{(-1)^1 3.1!}{1!1!}\sigma_1(3)\sigma_2(3) + \frac{4.1!}{1!1!}\sigma_1(3)\sigma_3(3) +$$
$$+\frac{(-1)^1 3.1!}{1!1!}\sigma_1(3)\sigma_2(3) = 2(\sigma_2(3))^2.$$

Тогава $2u^4 + 2v^4 + 2w^4 = 2s_3(4) = 4(\sigma_2(3))^2 = (2\sigma_2(3))^2$.

Задача 7. Нека комплексните числа x, y, z, t са такива, че:

$$x+y+z+t=0, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=0, \quad \frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xt}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{yt}+\frac{1}{zt}=0.$$

Да се намери $x^{1998}+y^{1998}+z^{1998}+t^{1998}$. (Конкурсна задача от [9], бр. 7-8/1999, с. 316, зад. C:2178; в условието от този брой е допусната грешка, която е поправена в брой 2/2000, с. 96 на [9])

Решение. Ако освободим от знаменател дадените в условието равенства, ще получим $\sigma_1(4) = \sigma_2(4) = \sigma_3(4) = 0$. А понеже 1998 не се дели на 4, то равенството $i_1+2i_2+3i_3+4i_4 = 1998$ е възможно само когато поне едно от неотрицателните цели числа i_1, i_2, i_3 е различно от нула. Последното означава, че ако приложим формулата на Варинг за търсената сума $s_4(1998)$, то във всяко нейно събираемо ще има поне един множител от вида $(\sigma_{2p+1}(m))^{i_{2p+1}} = 0, 1 \le j \le 3$. Следователно $s_4(1998) = 0$.

Задача 8. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^5+y^5+z^5=3 \end{array}\right. . \qquad \text{([8], бр. 12/1984, с. 16 , зад. 3)}$$

Решение. Ако означим $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, то $\sigma_1(3) = 1$, $s_3(2) = 3$, $s_3(5) = 1$. Понеже $M_3(2) = \{(2,0,0),(0,1,0)\}M_3(5) = \{(5,0,0),(3,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(0,1,1)\}$, то: $3 = s_3(2) = \frac{3.2!}{3!}(\sigma_1(3))^3 + \frac{(-1)^1 3.1!}{1!1!}\sigma_1(3)\sigma_2(3) = 1-2\sigma_2(3)$, откъдето $\sigma_2(3) = -1$;

$$1 = s_3(5) = \frac{3.2!}{3!}(\sigma_1(3))^3 + \frac{(-1)^1 3.1!}{1!1!}\sigma_1(3)\sigma_2(3) + \frac{5.2!}{2!1!}(\sigma_1(3))^2\sigma_3(3) +$$

$$+\frac{(-1)^2 5.2!}{1!2!}\sigma_1(3)(\sigma_2(3))^2 + \frac{4.1!}{1!1!}\sigma_1(3)\sigma_3(3) = 10\sigma_3(3)+11, \sigma_3(3) = -1.$$

По този начин получихме, че дадената система е равносилна на системата:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1(3) = x+y+z = 1 \\ \sigma_2(3) = xy+yz+zx = -1 \\ \sigma_3(3) = xyz = -1 \end{array}\right. ,$$

която лесно се решава чрез заместване и има за решения $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$.

Задача 9. Нека $s_m(k) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^k$ за произволни $k \in N$, $m \in N$, $m > 2$ и t е най-големият общ делител на елементарните симетрични полиноми $\sigma_{2p+1}(m)$, $p = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m-1}{2}\right]$, на произволните цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, за които $\sigma_1(m) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 0$.

Да се докаже, че t дели $s_m(2n+1)$ за всяко естествено n. (Оригинална задача)

Решение. От $\sigma_1(m) = 0$ следва, че всички събираеми във формулата на Варинг, за които $i_1 \neq 0$, са равни на нула. Тогава $s_m(2n+1) =$

$$\sum_{(0,i_2,i_3,\ldots,i_m)\in M_m(2n+1)} \frac{(-1)^{h(I_m)}(2n+1)(l(I_m)-1)!}{i_2! i_3 \cdots i_m!}(\sigma_2(m))^{i_2}(\sigma_3(m))^{i_3}\cdots(\sigma_m(m))^{i_m}.$$

Равенството $2i_2+3i_3+4i_4+\cdots+mi_m = 2n+1$, $n \in N$ е възможно само когато поне едно от числата $i_{2p+1}(p=1,2,\dots,\left[\dfrac{m-1}{2}\right])$ е различно от нула, което означава, че всяко събираемо в степенния сбор $s_m(2n+1)$ има поне един множител от вида $(\sigma_{2p+1}(m))^{i_{2p+1}}$ и съгласно Лема 3 б) се дели на t.

Следват няколко задачи за упражнение:

Задача 10. Да се реши системата:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=n \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^k+x_2^k+\cdots+x_k^k=n \end{cases},$$

където $x_1,\,x_2,\dots,x_n$ са комплексни числа. ([8], бр. 12/1984, с. 16, зад. 13)

Задача 11. Да се намерят онези тройки (x_1,x_2,x_3) от реални числа x_1,x_2,x_3, които са решения на системата:

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3=3 \\ x_1x_2x_3=1 \end{array}\right. .$$

(Заключителен кръг на олимпиадата в ГДР, 1987, [6], бр. 4/1988, с. 48, зад. 389)

Задача 12. Да се докаже неравенството $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{1-\beta}{1+\beta}+\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}\ge\dfrac{1}{4}$, където $\alpha\ge0$, $\beta\ge0$, $\gamma\ge0$ и $\alpha+\beta+\gamma=1$. (Трети кръг на олимпиадата в България, 1970 г., [5], с.18, зад.70-3-1)

Задача 13. Целите числа a, b, c, d, e са такива, че нечетното естествено число p дели $a+b+c+d+e$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$. Да се докаже, че тогава p дели и числото $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$. (Задачник на [8], бр. 8/1984, с. 44 , зад. М879)

Задача 14. Нека a, b, c са цели числа такива, че $a+b+c$ дели $a^2+b^2+c^2$. Да се докаже, че съществуват безбройно много положителни цели числа n такива, че $a+b+c$ дели $a^n+b^n+c^n$. (Подборни състезания за определяне на румънския отбор за XXVIII МОМ 1987, [10], бр. 1998, с. 57 , зад. S.T.3)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Давидов, Ст. Додунеков. Алгебра и елементарни функции. Народна просвета, С., 1984.

[2] Н. Обрешков. Висша алгебра. Наука и изкуство, С., 1966.

[3] Consuela Luiza Voica. Formulele lui Waring. *Gazeta matematică*, **7–8** (1997), 267–272.

[4] С. Гроздев, О. Мушкаров. Двадесет национални олимпиади по математика.

[5] П. Кендеров, Й. Табов. Български олимпиади по математика. Народна просвета, С., 1990.

[6] *Математика*, брой 8/1984, 4/1988.

[7] *Математика плюс*, брой 1/1998, 3/2000.

[8] *Квант*, брой 8/1984, 9/1984, 12/1984.

[9] *Gazeta Matematică*, брой 7-8/1999, 2/2000.

[10] *Romanian Mathematics Magazine*, брой 1998.

Валери Стефанов Цеков
СОУ "Христо Ботев"
38030 гр. Грамада
обл. Видин, ул. "Бели Бряг" 5

FORMULAS FOR CALCULATING POWER SUMS

Valeri Stefanov Tsekov

The purpose of this article is to present the basic properties and the respective means of calculating power sums. This theory is illustrated with approriate problems. Special attention is given to the formula of Waring as the only explicit formula which is not widely-known.