МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2002
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2002
Proceedings of Thirty First Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 3–6, 2002

ОСНОВНА ТЕОРЕМА ЗА РАЦИОНАЛНИТЕ СИМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ

Валери Стефанов Цеков

Статията разглежда рационалните симетрични функции, в частност, симетричните полиноми и някои техни свойства.

В настоящата статия ще използваме следните съкратени обозначения:

С N_0 и N ще бележим съответно множествата на неотрицателните цели и на естествените числа, а с $[x]$ - най-голямото цяло число, непревишаващо реалното x; за $k, m, n \in N$: $n! = \begin{cases} 1.2.3\dots n & \text{за} \quad n > 0 \\ 1 & \text{за} \quad n = 0 \end{cases}$, $V_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)}$, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$;

$$I_n = (i_1, i_2, \dots, i_n), \quad N_0^n = \{I_n : \ i_u \in N_0, \quad u = 1, 2, \dots, n\};$$

J_n^u се получава от $J_n \in N_0^n$ като u-ият елемент на последната се увеличи с m;

$$l(I_n) = \sum_{u=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} i_{2u}, \quad d(I_n) = \sum_{u=1}^{n} u_{i_u}, \quad I_n! = i_1! i_2! \dots i_n!, \quad a^{I_n} = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n},$$

$$N_n(k) = \{I_n \in N_0^n : \quad l(I_n) = k\}, \quad M_n(k) = \{I_n \in N_0^n : \quad d(I_n) = k\}.$$

С $P(J_n) = P(j_1, j_2, \dots, j_n)$ ще бележим множеството на всички пермутации без повторение на числата j_1, j_2, $\dots$, j_n; ако обаче между самите числа има равни, тогава и между пермутациите ще има равни.

Нека x_1, x_2, $\dots$, x_n са произволни променливи и $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ е множеството на всички полиноми на тези променливи.

Една функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ ще наричаме симетрична, ако $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за всяка $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in P(1, 2, \dots, n)$.

Предмет на разглеждане в настоящата статия са рационалните симетрични функции (чието множество ще бележим с $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$), в частност симетричните полиноми (чието множество ще бележим с $S[x_1, x_2, \dots, x_n]$), и някои техни свойства.

Непосредствено от горната дефиниция следва, че:

Лема 1. *Ако една рационална функция (полином) е равна на константа или на сбор, разлика, произведение, частно, степен на рационални симетрични функции, то тя (той) също е рационална симетрична функция (полином).*

За $k, n \in N$ да разгледаме следните очевидно симетрични полиноми:

$$s_n(k) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k,$$

$$\sigma_m(n) = \begin{cases} \sum\limits_{1\le i_1\le i_2\le\dots\le i_m\le n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m} & \text{за } 1\le m\le n \\ 0 & \text{за } m>n \end{cases},$$

$$\varphi_m(n,J_m) = \begin{cases} \sum\limits_{1\le i_1\le i_2\le\dots\le i_m\le n} \ \sum\limits_{(\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots\alpha_m)\in P(J_m)} x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\dots x_{i_m}^{\alpha_m} & \text{за } 1\le m\le n \\ 0 & \text{за } m>n \end{cases}.$$

Полиномите $s_n(k)$ се наричат степенни сборове, $\sigma_m(n)$ – елементарни m-формени симетрични полиноми, а $\varphi_m(n, J_m)$ ще наричаме прости m-формени симетрични полиноми от клас J_m. Ще бележим $\sigma^{I_n} = (\sigma_1(n))^{i_1}(\sigma_2(n))^{i_2}\dots(\sigma_n(n))^{i_n}$.

Ако разбием множеството от елементите $j_1, j_2, \dots, j_m$ на дадена m-орка J_m на t $(t \in N)$ непресичащи се подмножества така, че елементите на всяко от тях да са равни, и ако броят на елементите на тези подмножества е съответно $m_1, m_2, \dots, m_t$, то тогава $m_1 + m_2 + \dots + m_t = m$. Лесно се съобразява, че всяка пермутация се среща точно $m_1!m_2!\dots m_t!$ пъти в множеството $P(J_m)$. Тъй като общият брой на всички едночлени във $\varphi_m(n, J_m)$ е равен на $C_n^m m! = V_n^m$, то броят на различните едночлени във $\varphi_m(n, J_m)$ е $\dfrac{V_n^m}{m_1!m_2!\dots m_t!}$. Следователно:

$$\varphi_m(n, J_m) = m_1!m_2!\dots m_p!\omega_m(n, J_m), \tag{1}$$

където с $\omega_m(n, J_m)$ сме означили симетричния полином, който съдържа само различните едночлени на $\varphi_m(n, J_m)$, и който ще наричаме минимален прост m-формен симетричен полином от клас J_m.

Като непосредствено следствие от равенство (1) се получава:

Лема 2. *а)* $\varphi_m(n, J_m) = \omega_m(n, J_m) \Leftrightarrow t = m, m_i = 1$ *за* $i = 1, 2, \dots, m$; *б)* $\varphi_m(n, J_m) = \omega_m(n, J_m) = \sigma_m(n) \Leftrightarrow t = m, m_i = 1$ *и* $j_i = 1$ *за* $i = 1, 2, \dots, m$; *в)* $s_n(1) = \sigma_1(n)$; *г)* $s_n(j_1) = \varphi_1(n, J_1)$.

Ще въведем наредба в декартовото произведение N_0^n по следния начин:

$$I_n = J_n \quad \Leftrightarrow i_u = j_u \ \text{ за } \ u = 1, 2, \dots, n;$$

$$I_n > J_n \quad \Leftrightarrow i_1 > j_1 \ \text{ или } \ i_u = j_u \ \text{ за } \ u = 1, 2, \dots, v \ \ (v < n) \ \text{ и } \ i_{v+1} > j_{v+1}.$$

Ако с $P[\sigma_1(n), \sigma_2(n), \dots, \sigma_n(n)]$ означим множеството на всички полиноми на променливите $\sigma_1(n), \sigma_2(n), \dots, \sigma_n(n)$, то по-горе дефинираната наредба лесно може да бъде пренесена и в множествата от едночлените на $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $P[\sigma_1(n), \sigma_2(n), \dots, \sigma_n(n)]$: $x^{I_n} = x^{I_n} \quad \Leftrightarrow I_n = J_n \quad \Leftrightarrow \sigma^{I_n} = \sigma^{J_n}$;

$$x^{I_n} > x^{I_n} \quad \Leftrightarrow I_n > J_n \quad \Leftrightarrow \sigma^{I_n} > \sigma^{J_n}.$$

Лема 3. *Ако $\sigma^{I_n} \neq \sigma^{J_n}$, то най-големите едночлени в нормалните видове на σ^{I_n} и σ^{J_n}, разглеждани като полиноми на $x_1, x_2, \dots, x_n$, са също различни.*

Доказателство. Лесно се съобразява, че въпросните най-големи едночлени са равни съответно на $\prod\limits_{u=1}^{n} x_u^{\sum_{v=u}^{n} i_v}$ и $\prod\limits_{u=1}^{n} x_u^{\sum_{v=u}^{n} j_v}$. Ако допуснем, че последните са равни, ще последват равенствата $\sum\limits_{v=u}^{n} i_v = \sum\limits_{v=u}^{n} j_v$ за $u = 1, 2, \dots, n$, откъдето лесно получаваме $I_n = J_n$ и $\sigma^{I_n} = \sigma^{J_n}$, което противоречи на условието.

Лема 4. *Ако ax^{I_n} е най-големият едночлен в нормалния вид на произволен симетричен полином $p \in S[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то тогава $i_1 \ge i_2 \ge \dots \ge i_n$.*

Доказателство. Да допуснем, че съществува естествено число u такова, че $1 \leq u < n$ и $i_u < i_{u+1}$. Тогава едночленът $ax_1^{i_1} \dots x_u^{i_{u+1}} x_{u+1}^{i_u} \dots x_n^{i_n}$ ще бъде по-голям от ax^{I_n} и поради симетричността на p ще участва в нормалния вид на последния, което противоречи на избора на едночлена ax^{I_n}. Следователно $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$.

Елементарните симетрични полиноми играят много съществена роля в множествата $S[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$, която се изразява от следната:

Теорема 1 (Основна теорема за симетричните функции). а) *Всеки симетричен полином може да се представи по единствен начин като полином на елементарните симетрични полиноми. б) Всяка рационална симетрична функция може да се представи като рационална функция на елементарните симетрични полиноми.*

В статията [1] е доказана известната:

Теорема на Варинг. *За всеки две естествени числа k и n е в сила:*

$$(2) \qquad s_n(k) = \sum_{I_n \in M_n(k)} \frac{(-1)^{l(I_n)} k(l(I_n)-1)!}{I_n!} a^{I_n} = \sum_{I_n \in M_n(k)} \frac{(-)^{h(I_n)} k(l(I_n)-1)!}{I_n!} \sigma^{I_n},$$

където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са произволни променливи, които могат да бъдат разглеждани като всичките корени на произволен полином $p_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Ясно е, че теоремата на Варинг реализира в явен вид представянето, за което става дума в Теорема 1, но само за степенните сборове. Например:

$$(3) \quad s_3(2) = (\sigma_1(3))^2 - 2\sigma_2(3); \qquad (4) \quad s_3(3) = (\sigma_1(3))^3 - 3\sigma_1(3)\sigma_2(3) + 3\sigma_3(3);$$

$$(5) \qquad s_3(4) = (\sigma_1(3))^4 - 4(\sigma_1(3))^2\sigma_2(3) + 4\sigma_1(3)\sigma_3(3) + 2(\sigma_2(3))^2.$$

Предстои да докажем Теорема 1 в общия случай, като за целта ще ни бъдат необходими още няколко леми:

Лема 5. $\varphi_m(n, J_m) s_n(j_{m+1}) = \varphi_{m+1}(n, J_{m+1}) + \sum\limits_{u=1}^{m} \varphi_m\left(n, J_m^u\left(j_{m+1}\right)\right)$.

Доказателство. Броят на всичките събираеми в лявата страна на доказваното равенство е nV_n^m, а в дясната е $V_n^{m+1} + mV_n^m = (n-m+m)V_n^m = nV_n^m$.

Остава само да докажем, че всяко събираемо от лявата страна се среща и в дясната. За целта да вземем произволно събираемо $x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \dots x_{i_m}^{j_m} x_i^{j_{m+1}}$ от лявата страна. Ако $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, то същото събираемо ще се среща отдясно в полинома $\varphi_{m+1}(n, J_{m+1})$. Ако $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, например $i = i_u$ за някое u $(1 \leq u \leq m)$, то тогава въпросното събираемо ще се среща отдясно в полинома $\varphi_m(n, J_m^u\left(j_{m+1}\right))$.

Лема 6. *Всеки прост симетричен полином може да се представи като полином на елементарните симетрични полиноми.*

Доказателство. Твърдението ще докажем с индукция по m.

За $m = 1$ верността на Лема 6 следва непосредствено от Лема 2 г) и от (2).

Да допуснем, че за някое $m \in N$ твърдението на Лема 6 е вярно за всички m-формени прости полиноми $\varphi_m(n, J_m)$. Верността на твърдението и за следващото естествено число $m+1$ (т.е. за всички $(m+1)$-формени прости полиноми) се получава последователно от Лема 5, индукционното допускане, формула (2) и Лема 1.

Лема 7. *Всеки симетричен полином може да се представи като сума от прости симетрични полиноми.*

Доказателство. Нека $p = p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ е произволен симетричен полином и нека $ax_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \ldots x_{i_m}^{j_m}$ е един от едночлените в нормалния му вид. От дефиницията на симетричен полином следва, че в нормалния вид на p участва и полиномът $p_0 = a\omega_m(n, J_m)$, за който с помощта на равенство (1) получаваме $p_0 = \dfrac{d\,(I_n)\,(l\,(I_n) - 1)\,!}{I_n!} \varphi_m(n, J_m)$. Полиномът $p_1 = p - p_0$ има по-малко едночлени от p и съгласно Лема 1 също е симетричен. Следователно за него можем да приложим същите разсъждения и т.н., докато изчерпим едночлените от нормалния вид на p.

Доказателството на Лема 7 определя прост алгоритъм за получаване на самото представяне, чрез който лесно се извеждат следните равенства:

$$\begin{gathered} u = (x_1 + x_2)^2 (x_2 + x_3)^2 (x_3 + x_1)^2 = \omega_2(3, (2, 4)) + \\ +2\omega_2(3, (3, 3)) + 2\omega_3(3, (1, 1, 4)) + 6\omega_3(3, (1, 2, 3)) + 10\omega_3(3, (2, 2, 2)); \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} v = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)((x_1 + x_2)^2(x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2(x_3 + x_1)^2 + \\ +(x_3 + x_1)^2(x_1 + x_2)^2) = \omega_2(3, (1, 5)) + 2\omega_2(3, (2, 4)) + \omega_2(3, (3, 3)) + \\ +5\omega_3(3, (1, 1, 4)) + 13\omega_3(3, (1, 2, 3)) + 24\omega_3(3, (2, 2, 2)); \end{gathered} \tag{7}$$

$$w = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)^3 = \omega_3(3, (1, 1, 4)) + 3\omega_3(3, (1, 2, 3)) + 6\omega_3(3, (2, 2, 2)). \tag{8}$$

Лема 8. *Всяка дробна рационална симетрична функция може да се представи като частно на два симетрични полинома.*

Доказателство. Нека $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и $f = \dfrac{p}{q}$, където p и q са полиноми от $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Ако q е симетричен полином, то съгласно Лема 1 и p е такъв. Ако полиномът q не е симетричен, то нека разгледаме произведението $q_1 = \prod\limits_{I_n \in P(1,2,\ldots,n)} q(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, в което полиномът $q = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ участва като един от множителите. Умножаваме числителя и знаменателя на функцията f с полинома $q_2 = \dfrac{p}{q}$ и получаваме $f = \dfrac{p}{q}$. Тъй като q_1 очевидно е симетричен полином, то съгласно Лема 1 такъв ще бъде и полиномът pq_2.

Доказателство на Теорема 1. а) **Съществуването** на представяне следва непосредствено от Леми 7 и 6.

Ще дадем още едно доказателство на **съществуването**, като този път използваме само Лема 1 и Лема 4.

Нека ax^{I_n} е най-големият едночлен в нормалния вид на произволен полином $p_1 \in S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Да разгледаме функцията $q_1 = \left(\prod\limits_{u=1}^{n-1} (\sigma_u(n))^{i_u - i_{u+1}}\right) (\sigma_n(n))^{i_n}$, която съгласно Лема 1 и Лема 4 е симетричен полином относно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и неговият най-голям едночлен е точно ax^{I_n}. Тогава пак съгласно Лема 1 полиномът $p_2 = p_1 - q_1$ е симетричен и неговият най-голям едночлен bx^{J_n} е по-малък от ax^{I_n}.

За полинома p_2 прилагаме същите разсъждения и получаваме симетричния полином $p_3 = p_2 - q_2$ $\left(q_2 = \left(\prod\limits_{u=1}^{n-1} (\sigma_u(n))^{j_u - j_{u+1}}\right) (\sigma_n\,(n))^{j_n}\right.$ – симетричен полином), чийто най-голям едночлен е по-малък от $b\sigma^{J_n}$, т.е. $J_n < I_n$, и т.н.

По-горе описаният процес е краен, тъй като съществуват точно $(i_1 + 1)^n$ на брой елементи J_n на N_0^n, за които $j_u \le i_1$ за $u = 1, 2, \ldots, n$, а между тях са тези, за които $J_n < I_n$ и $j_1 \ge j_2 \ge \cdots \ge j_n$. Следователно съществува естествено число $m > 1$, за което $p_u = p_{u-1} - q_{u-1}$ за $u = 2, 3, \ldots, m$ и $p_m = 0$. От последните равенства лесно се получава, че $p_1 = q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-1}$.

За да докажем **единствеността**, нека да допуснем, че съществува полином $p = p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, за който има две представяния като полином от $P[\sigma_1(n), \sigma_2(n), \ldots, \sigma_n(n)]$: $p = q_1(\sigma_1(n), \sigma_2(n), \ldots, \sigma_n(n)) = q_2(\sigma_1(n), \sigma_2(n), \ldots, \sigma_n(n))$.

Да образуваме разликата $q_1 - q_2 = r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q(\sigma_1(n), \sigma_2(n), \ldots, \sigma_n(n))$. Разглеждана като полином r на $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тя е тъждествено равна на нула. Ще докажем, че тя е тъждествено равна на нула и като полином на $\sigma_1(n), \sigma_2(n), \ldots, \sigma_n(n)$, откъдето ще получим, че $q_1 = q_2$ като полиноми на $\sigma_1(n), \sigma_2(n), \ldots, \sigma_n(n)$, а оттук ще следва единствеността на представянето.

За целта да допуснем, че не всички коефициенти в нормалния вид на q са нулеви и нека $a\sigma^{I_n}$ е едночленът с най-голям показател I_n, чийто коефициент a е различен от нула. Съгласно Лема 3 най-големият едночлен $a \prod\limits_{u=1}^{n} x_u^{\sum\limits_{v=u}^{n} i_v}$ на $a\sigma^{I_n}$ относно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ няма да има подобен в никой от останалите едночлени на q. Но тогава в нормалния вид на полинома r ще има едночлен с ненулев коефициент, което противоречи на избора на r. Следователно q е тъждествено равен на нула.

б) Следва непосредствено от Лема 8 и току-що доказаната подточка а).

Теорема 1 гарантира съществуване на разглежданото представяне, но (за разлика от теоремата на Варинг) не дава явна формула за получаването му, а в общия случай такава и не съществува. С изключение на тривиални случаи като например

$$(x_{1\pm}a)(x_{2\pm}a)(x_{3\pm}a) = \sigma_3(3) \pm a\sigma_2(3) + a^2\sigma_1(3) \pm a^3, \tag{9}$$

задачата за получаване на представянето никак не е лесна. Има обаче разработени методи за представяне на симетричните полиноми (следователно съгласно лема 8 и на рационалните симетрични функции), на два от които ще се спрем по-нататък. Тези методи използват идеята съответно на първото и на второто доказателство на съществуването в подточка а) на Теорема 1.

Първи метод: симетричният полином се представя напред като сума на прости симетрични полиноми, които след това с помощта на Лема 5 и на теоремата на Варинг се представят в желания вид. Тъй като първият етап на този метод е елементарен, ще илюстрираме с два примера само втория:

Пример 1. $\varphi_2(3, (1, 2)) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2$.

За $m = 1$ и $n = 3$ от Лема 5 следва, че $\varphi_1(3, (2))s_3(1) = \varphi_2(3, (1, 2)) + \varphi_1(3, (3))$, откъдето с помощта на Лема 2 в, г) и на (3) и (4) получаваме

$$\varphi_2(3, (1, 2)) = s_3(2)\sigma_1(3) - s_3(3) = \sigma_1(3)\sigma_2(3) - 3\sigma_3(3). \tag{10}$$

Пример 2. $\varphi_2(3, (2, 2)) = 2(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2)$.

За $m = 1$ и $n = 3$ от Лема 5 следва, че $\varphi_1(3, (2))s_3(2) = \varphi_2(3, (2, 2)) + \varphi_1(3, (4))$, откъдето с помощта на Лема 2 в, г№ и на (3) и (5) получаваме

$$\begin{gathered}\varphi_2(3, (2, 2)) = s_3(2)s_3(2) - s_3(4) = 2(\sigma_2(3))^2 - 4\sigma_1(3)\sigma_3(3), \quad \text{а тогава} \\ \omega_2(3, (2, 2)) = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = (\sigma_2(3))^2 - 2\sigma_1(3)\sigma_3(3).\end{gathered} \tag{11}$$

Втория метод ще демонстрираме за симетричния полином $p_1 = p_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1) = x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$.

Тъй като $x_1^2x_2^2x_3^2$ е най-големият едночлен в нормалния вид на p_1, то разглеждаме полиномите $q_1 = (\sigma_1(3))^{2-2}(\sigma_2(3))^{2-2}(\sigma_3(3))^2 = (\sigma_3(3))^2$ и $p_2 = p_1 - q_1 =$

$x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+1$. Понеже $x_1^2x_2^2$ е най-големият едночлен в нормалния вид на p_2, то разглеждаме полиномите $q_2 = (\sigma_1(3))^{2-2}(\sigma_2(3))^{2-0}(\sigma_3(3))^0 = (\sigma_2(3))^2$ и $p_3 = p_2 - q_2 = -2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$. Най-големият едночлен в нормалния вид на p_3 е $-2x_1^2x_2x_3$ и затова разглеждаме полиномите $q_3 = -2(\sigma_1(3))^{2-1}(\sigma_2(3))^{1-1}(\sigma_3(3))^1 = -2\sigma_1(3)\sigma_3(3)$ и $p_4 = p_3 - q_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$. Най-големият едночлен в нормалния вид на p_4 е x_1^2 и затова разглеждаме полиномите $q_4 = (\sigma_1(3))^{2-0}(\sigma_2(3))^{0-0}(\sigma_3(3))^0 = (\sigma_1(3))^2$ и $p_5 = p_4 - q_4 = -2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1+1$. Най-големият едночлен в нормалния вид на p_5 е $-2x_1x_2$ и затова разглеждаме полиномите $q_5 = -2(\sigma_1(3))^{1-1}(\sigma_2(3))^{1-0}(\sigma_3(3))^0 = -2\sigma_2(3)$ и $p_6 = p_5 - q_5 = 1$. Най-големият едночлен в нормалния вид на p_6 е 1 и затова разглеждаме полиномите $q_6 = (\sigma_1(3))^{0-0}(\sigma_2(3))^{0-0}(\sigma_3(3))^0 = 1$ и $p_7 = p_6 - q_6 = 0$. Следователно:

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1) = (\sigma_3(3))^2+(\sigma_2(3))^2+(\sigma_1(3))^2-2\sigma_1(3)\sigma_3(3)-2\sigma_2(3)+1. \tag{12}$$

Преди да приложим гореизложеното за решаване на задачи от олимпийски тип ще припомним следното неравенство, доказано в [1] за неотрицателни x_1, x_2, x_3:

$$s_3(3) + 6\sigma_3(3) \geq \sigma_1(3)\sigma_2(3), \tag{13}$$ от което непосредствено следва

$$\begin{aligned} &\omega_3(3,(1,1,4)) + 3\omega_3(3,(2,2,2)) - \omega_3(3,(1,2,3)) = \\ &= \sigma_3(3)(s_3(3) + 3\sigma_3(3) - \omega_2(3,(1,2))) \geq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

За ползата и съдържателността на неравенство (13) говори фактът, че то често се използва при решаване на задачи, а еквивалентни нему формулировки се дават на различни математически състезания. Като потвърждение на последното в [1] бе посочена задача 2 от МОМ 2000.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Цеков. Формули за пресмятане на степенни сборове. *Математика и информатика*, 2000.

[2] Л. Давидов, Ст. Додунеков. Алгебра и елементарни функции. Народна просвета, София, 1984.

[3] Н. Обрешков. Висша алгебра. Наука и изкуство, София, 1966.

[4] А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Наука, Москва, 1971.

[5] П. Кендеров, Й. Табов. Български олимпиади по математика. Народна просвета, София, 1990.

Валери Стефанов Цеков
СОУ "Христо Ботев"
38030 гр. Грамада
обл. Видин, ул. "Бели Бряг" 5

A BASIC THEOREM OF THE RATIONAL SYMMETRIC FUNCTIONS

Valeri Stefanov Tsekov

The article presents the rational symmetric functions, in particular, the symmetric polynomials and some of their properties.