МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2003
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2003
Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Sunny Beach, April 5–8, 2003

ГЕОМЕТРИЯ НА ПОЛИНОМИТЕ – ДВЕ ХИПОТЕЗИ*

Бл. Сендов

В тази лекция се дават сведения за един класически раздел на комплексния анализ – *геометрия на полиномите* и се формулират две хипотези принадлежащи към него. Това са известната it хипотеза на Смейл за средната стойност и една стара хипотеза на автора.

Ключови думи: *Геометрия на полиномите, Теорема на Гаус-Люка, Хипотеза на Смейл за средната стойност, Хипотеза на Илиев-Сендов.*

1. Геометрия на полиномите. Геометрията на полиномите е част от теорията на алгебричните полиноми на комплексна променлива, която изучава взаимното геометрично разположение в комплексната равнина на нулите на един полином и нулите на неговата производна. Това направление е предизвиквало интереса на българските математици акад. Никола Обрешков, акад. Любомир Чакалов, акад. Любомир Илиев и редица други през първата половина на миналия век.

Според основната теорема на алгебрата, всеки алгебричен полином от n-та степен

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

където коефициентите $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са произволни комплексни числа и $a_n \neq 0$, има точно n нули (като се вземат предвид техните кратности) и се представя във вида

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

където $A(p) = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ е множеството от нулите на $p(z)$. Тъй като геометрията на полиномите се интересува от нулите на полиномите, то ще разглеждаме полиноми със старши коефициент $a_n = 1$. Такива полиноми се наричат *мономиални*.

Производната на мономиалния полином $p(z)$ е полином от $n-1$-ва степен и е равна на

$$p'(z) = p(z) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} = n(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \cdots (z - \zeta_{n-1}), \tag{1}$$

където $A(p') = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}\}$ е множеството от нулите на производната на p, които се наричат още *критични точки* на полинома p.

Всеки алгебричен полином p от n-та степен може да се разглежда като изображение

$$p : A(p) \to A(p'), \tag{2}$$

*Mathematics Subject Classification: 30C10 което на всеки n точки от комплексната равнина (нулите на полинома) съпоставя $n-1$ точки от същата равнина (нулите на неговата производна). Ако полиномът има многократни нули, то някои от n-те точки съвпадат. Геометрията на полиномите изучава геометричните свойства на изображението (2).

Едно елементарно свойство на (2) е следното: Ако си мислим, че нулите на полинома и нулите на неговата производна имат еднакво тегло, то центърът на тежестта на нулите на полинома съвпада с центъра на тежестта на нулите на производната. Това се изразява с равенството

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{n-1}}{n-1},$$

което се получава непосредствено.

1.1. Някои теореми от геометрия на полиномите. Една от първите и основни теореми в геометрията на нулите е Теоремата на Гаус-Люка. Да означим с $H(p)$ *затворената изпъкнала обвивка на* $A(p)$ (на точките в комплексната равнина, които са нули на полинома p).

Теорема 1. (Гаус-Люка) *За всеки алгебричен полином* p

$$H(p') \subset H(p).$$

Тази теорема е била формулирана от Гаус, който я доказва въз основа на механични съображения. Félix Lucas дава формално доказателство на тази теорема в мемоара си *Геометрия на нулите* [7] и така кръщава този раздел от комплексния анализ.

За полиноми с реални коефициенти на реална променлива е в сила класическата теорема на Рол, която се обобщава за произволна диференцируема функция на една променлива.

Теорема 2. (Теорема на Рол) *Нека* x_1 *и* x_2 *са две различни реални нули на реалния полином* p*. Тогава между* x_1 *и* x_2 *има поне една нула на* p'*.*

Теоремата на Рол не е в сила за комплексни полиноми на комплексна променлива. Затова са интересни нейни аналози. Два от тях са следните:

Теорема 3. (Теорема на Сегьо) *Нека* z_1 *и* z_2 *са две различни нули на полинома* p *и* l *да е симетралата на отсечката от* z_1 *до* z_2*. Тогава всяка една от двете затворени полуравнини определени от* l *съдържа поне по една нула на* p'*.*

Теорема 4. (Теорема на Грейс-Хейвуд) *Ако* z_1 *и* z_2 *са две различни нули на полинома* p *от степен* n*, то затвореният диск с център* $(z_1+z_2)/2$ *и радиус* $(|z_1 - z_2|/2)\cot(\pi/n)$ *съдържа поне една нула на* p'*.*

Доказателствата на всички цитирани до тук теореми могат да се намерят в класическата монографията на Никола Обрешков [12].

2. Историята на една хипотеза. Когато през пролетта на 1958 година станах асистент на акад. Обрешков, трябваше по тогавашната традиция да се занимавам с нещо, което да е в кръга на неговите интереси. Спрях се на Теорема 4. От нея получаваме непосредствено

Следствие 1. *Нека* p *е полином от степен* $n \geq 2$*,* z_1 *е коя да е нула на* p *и* $\delta(z_1) = \min\{|z_1 - z_k| : \ k = 2, 3, \ldots, n\}/2$*. Тогава затвореният диск с център* z_1 *и* *радиус $\delta(z_1)/\sin(\pi/n)$ съдържа поне една нула на p'.*

Оценката в Следствие 1 е точна и се достига, например за бинома $b(z) = z^n - 1$. Полиномът $b(z)$ е интересен с това, че всичките му нули са върху единичната окръжност (периферията на единичния диск), а всичките нули на производната му са в началото. Така всеки затворен диск с център в нула на $b(z)$ и радиус 1 съдържа нула на неговата производна. Полиномът $b(z)$ е в известен смисъл екстремален за теоремата на Грейс-Хейвуд. Това ме подтикна да формулирам през есента на 1958 година следната

Хипотеза 1. *Ако всички нули на един полином от степен поне 2 лежат в затворения единичен диск, то всеки диск с център нула на този полином и радиус 1 съдържа поне една нула на неговата производна.*

Тази хипотеза е очевидна за полиноми от степен $n = 2$. Моите усилия през 1958 година доведоха до нейното доказателство и за $n = 3$, но този резултат, според акад. Обрешков, не бе достоен за публикуване. По време на Световният конгрес по математика през 1962 година в Копенхаген успях, чрез протекцията на акад. Обрешков, да се срещна и разговарям за тази хипотеза с тогавашния корифей на геометрията на нулите, американският математик Морис Марден, който е написал класическата монография *Геометрия на полиномите* [9]. Той прояви интерес към моята хипотеза и ме увери, че е оригинална. Двадесет години по-късно, в една своя статия [10] той пише следното за Хипотеза 1:

> *Тази хипотеза беше включена в колекцията от изследователски проблеми в теорията на функциите, публикувана през 1967 година от професор Хейман* [5]. *Тъй като тя е била поставена на вниманието на Хейман от професор Илиев, тя става известна като „Хипотеза на Илиев“. В същност, тази хипотеза принадлежи на българския математик Бл. Сендов, който ме запозна, и навярно и други, с нея през 1962 на Международния конгрес по математика, състоял се в Стокхолм.*

След смъртта на Морис Марден, двамата му сина публикуват биографична статия в памет на баща си [8], в която пишат:

> *За да покажем вкуса на неговите интереси, ще завършим с формулирането на една хипотеза от която той бе завладян за повече от 25 години; тя беше повтаряна в повечето от неговите изследователски проекти в NSF*[1]*, и по-голямата част от неговата статия в Мънтли*[2] *от 1983 беше посветена на нея. Това е Хипотезата на Илиев, която Мори твърдеше, че е на Сендов, който съобщил на Мори за нея през 1962: . . .*

3. Хипотезата на Смейл. Знаменитата хипотеза на Филдсовия медалист Стефан Смейл за средната стойност, е формулирана през 1981 година [16] във връзка със сходимостта на един числен метод за последователни приближения на нулите на

[1] Националната научна фондация на САЩ
[2] American Mathematical Monthly

даден полином p. За този метод е желателно да се намери най-малката положителна константа c за която

$$|p'(z)| \geq \frac{1}{c}\left|\frac{p(\zeta)-p(z)}{\zeta - z}\right| \tag{3}$$

за поне една нула ζ на производната p' и всички $z \in \mathbb{C}$. Достатъчно е да докажем (3) само за $z = 0$ и за всички полиноми p за които $p(0) = 0$ и $p'(0) \neq 0$. Относно най-малката константа c, Смейл формулира следната хипотеза, известна като *Хипотеза на Смайл за средната стойност.*

Хипотеза 2. *Нека p е полином от степен n за който $p(0) = 0$ и $p'(0) \neq 0$. Тогава*

$$\min\left\{\left|\frac{p(\zeta)}{\zeta p'(0)}\right| : \ p(\zeta) = 0\right\} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

Немският математик Г. Шмайзер [14] формулира Хипотеза 2 като проблем от геометрия на полиномите по следния начин. Да разгледаме произволен полином $p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n}(z - z_n)$ от степен n, за който z_j е проста нула. Тогава

$$g(z) = p(z + z_j) \tag{4}$$

е полином, който удовлетворява условието на Хипотеза 2. Обратно чрез (4), всеки полином g удовлетворяващ условието на Хипотеза 2 съответствува на някой полином p който има z_j за проста нула.

Очевидно, критичните точки на полинома g се получават от тези на p чрез изваждане на z_j. Следователно, съгласно Хипотеза 2 за g, съществува критична точка ζ на p за която

$$\left|\frac{g(\zeta - z_j)}{(\zeta - z_j)g'(0)}\right| \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

В термините на нулите на p, получаваме неравенството

$$\left(\prod_{k=1,\ k\neq j}^{n} |\zeta - z_j|\right) \Big/ \left(\prod_{k=1,\ k\neq j}^{n} |z_k - z_j|\right) \leq 1 - \frac{1}{n},$$

и още

$$\left(\prod_{k=1,\ k\neq j}^{n} |\zeta - z_j|\right)^{1/(n-1)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)} \left(\prod_{k=1,\ k\neq j}^{n} |z_k - z_j|\right)^{1/(n-1)}.$$

Това означава, че *за всяка проста нула z_j на p съществува поне една критична точка ζ на p която е средно геометрично по-близко до останалите нули на p от колкото е z_j.*

Г. Шмайзер обръща внимание върху определена връзка между Хипотеза 1 и Хипотеза 2. Така например, Д. Тишлер [17] е доказал, че Хипотеза 2 е вярна за полинома p ако всички негови нули, освен тази в началото, лежат върху една окръжност с център в началото. Също така Хипотеза refcj1 е вярна за полинома p ако всички негови нули лежат върху единичната окръжност. Последното твърдение е доказано през 1969 година независимо в [13] и в [14]. Ще приведем неговото доказателство, тъй като е много просто и елегантно, но най-напред ще дефинираме следното множество от полиноми.

$\mathcal{P}_n$ – множеството от мономиалните полиноми на които всички нули лежат в затворения единичен диск $D = D(0,1) = \{z : |z| \leq 1\}$.

Лема 1. (Гудман-Рахман-Рати и Шмайзер). *Ако $p \in \mathcal{P}_n$ и $p(1) = 0$, то съществува $\zeta_1 \in A'(p)$, която лежи в затворeният диск $D(c,r)$ с център $c = 1/2$ и радиус $r = 1/2$.*

Доказателство. Ако $p'(1) = 0$, лемата е очевидна, тъй като можем да вземем $\zeta_1 = 1$. Нека $p'(1) \neq 0$ и $p(z) = (z-1)q(z)$, тогава $p''(1)/p'(1) = 2q'(1)/q(1)$ и съгласно (1)

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1-\zeta_j} = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1-z_k}. \tag{5}$$

Нека $\Re(1/(1-\zeta_1)) = \max\{\Re(1/(1-\zeta_j)) : j = 1,2,\ldots,n-1\}$, където $\Re(z)$ означава реалната част на z. Тогава от (5) имаме

$$(n-1)\Re\left(\frac{1}{1-\zeta_1}\right) \geq 2\sum_{k=2}^{n} \Re\left(\frac{1}{1-z_k}\right) \geq n-1,$$

тъй като $|z_k| \leq 1;\ k = 2,3,\ldots,n$. Понеже $\Re(1/(1-\zeta_1)) \geq 1$, то

$$|\zeta_1 - 1/2| \leq 1/2.$$

С това Лемата е доказана.

Очевидно, чрез ротация около началото, от Лема 1 получаваме

Следствие 2. *Ако $p \in \mathcal{P}_n$ и $p(z_1) = 0$, където $|z_1| = 1$, тогава съществува $\zeta_1 \in A(p')$, която лежи в затворения диск $D(z_1/2, 1/2)$.*

Тъй като дискът $D(z_1/2, 1/2)$ се съдържа в диска $D(z_1, 1)$, от Лема 1 следва, че Хипотеза 1 е вярна за всяка периферна нула. Мотивирани от това, че дискът $D(z_1/2, 1/2)$ се съдържа в диска $D(z_1, 1)$ и е съществено по-малък от него, авторите на Лема 1 формулират една по-силна хипотеза от Хипотеза 1, а именно

Хипотеза 3. (Рати-Шмайзер). *Ако $p \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 2$ и z_1 е нула на $p(z)$, то дискът $D(z_1/2, 1 - |z_1|/2)$ съдържа поне една нула на $p'(z)$.*

Хипотеза 3 е доказана от Г. Гакс [3] за $2 \leq n \leq 5$. М. Мюлер [11], като използва компютър, конструира контрапримери за Хипотеза 3 за полиноми от степен 6, 8, 10 и 12. Контрапримери за полиноми от степен 7, 9 и 11 конструират С. Кумар и Б. Шеной [6]. Вероятно Хипотеза 3 не е вярна за всяко натурално $n \geq 6$.

Всички резултати свързани с Хипотеза refcj1, публикувани до 2000 година включително са отбелязани в обзорната статия [15]. Ще споменем само резултата на Дж. Браун и Г. Ксианг [2], които доказаха през 1999 година верността на Хипотеза 1 за всички полиноми до степен 8 включително. До сега Хипотеза 2 е доказана само за полиноми до 4-та степен.

В началото на миналата година, немският математик Г. Шмиедер предложи един интересен вариационен метод за доказателство на разглежданите две хипотези. С него интензивно си разменяхме писма по електронната поща с които той ми изпращаше последователните подобрения на доказателството си на Хипотеза 1. За съжаление винаги намирах някакъв кусур и му го съобщавах, но все се надявах неговият метод да успее. В края на лятото проф. Шмиедер ми съобщи, че със същия метод е доказал и Хипотеза 2, доказателството е изпратил на самия Смейл и той го одобрил. Това дало основание на проф. Шмиедер да представи за публикуване две статии с неговите доказателства на двете хипотези. Той ми написа още, че напълно разбира моите чувства за това, че хипотезата ми се ликвидира и затова все намирам непълноти в доказателството ѝ. Това, естествено малко ме засегна, но въпреки всичко му изпратих моите бележки по варианта представен за публикуване. С това нашата кореспонденция престана. По други канали научих, че доказателството на проф. Шмиедер за Хипотеза 2 е отхвърлено от рецензентите на списанието.

На 18 юли 2001 година, в електронният депозитариум arXiv.Math се появиха две статии на проф. Шмиедер с преработени доказателства по отделно на двете хипотези. За съжаление, и двете доказателства пак имаха пропуски. Продължих да следя arXiv.Math, без да се обаждам повече на проф. Шмиедер за намираните от мен пропуски в неговите доказателства. Но вероятно други математици му се обаждат навреме, защото до ноември 2001 година той последователно подменя доказателствата и сега в депозитариума стоят четвъртите варианти. Те пак не са изрядни. Последният вариант е съществено изменен и не знам защо чак в него той ми благодари за бележките, които са подобрили текста. Интересуващите се могат да изтеглят чрез Интернет текстовете от arXiv.Math като посочат за 2001 година автора Schmieder.

4. Методът на Шмиедер. За да изложим идеята на Метода на проф. Шмиедер, ще ни е необходимо понятието *екстремален полином*. За всеки полином $p \in \mathcal{P}_n$ и всяка негова нула z_k дефинираме

$$\rho(z_k; A(p')) = \min\{|z_k - \zeta_j| : \ j = 1, 2, \ldots, n-1\},$$

$$\rho(p) = \rho(A(p); A(p')) = \max\{\rho(z_k; A(p')) : \ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

и

$$\rho_n = \sup\{\rho(p) : \ p \in \mathcal{P}_n\}.$$

Екстремален в $\mathcal{P}_n$ наричаме такъв полином $p \in \mathcal{P}_n$ за който $\rho(p) = \rho_n$.

Екстремална нула z_1 на екстремалния полином p е такава за която

$$\rho(z_1; A(p')) = \rho_n.$$

При тези означения, Хипотеза 1 гласи: $\rho_n = 1$ *за всяко натурално* $n \geq 2$, или *За всеки полином $p \in \mathcal{P}_n$ е в сила неравенството*

$$\rho(A(p); A(p')) \leq 1.$$

Ще отбележим, че Боянов, Рахман и Зинал [1] доказаха, че $\rho_n \leq 2^{1/n}$, т. е., Хипотеза 1 е асимптотично вярна. От този резултат и резултата на Дж. Браун и Г. Ксианг [2] следва още, че $\rho_n < 1.08006\ldots$ за всяко $n \geq 2$.

От компактността на множеството $\mathcal{P}_n$ и от непрекъснатостта на функционала $\rho(p)$, дефиниран в $\mathcal{P}_n$, следва съществуването на екстремални полиноми. Предполага се, че всички екстремални полиноми в $\mathcal{P}_n$ имат вида $z^n - e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Методът на Шмиедер е вариационен и има за цел да определи свойствата на екстремалните полиноми. Добре известно е, че дробно-линейната трансформация

$$\varphi(z) := \frac{z + th}{1 + t\bar{h}z},$$

където h е комплексно число с $|h| \leq 1$, а $t \in [-1, 1]$ е реален параметър, трансформира единичният диск в себе си. При тази трансформация точките от единичната окръжност остават върху нея, а вътрешните точки се трансформират пак във вътрешни точки. Идеята на проф. Шмиедер е да варира нулите на полиномите от $\mathcal{P}_n$ с трансформацията $\varphi(z)$, която е инвариантна в това множество. По точно, нека $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, където $|h_k| \le 1,\ k = 1, 2, \dots, n$ и

$$z_k(t) = \varphi_k(z_k) := \frac{z_k + th_k}{1 + t\overline{h_k} z_k},\ k = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Тогава за всеки полином $p \in \mathcal{P}_n$ проф. Шмиедер дефинира неговата вариация

$$q(\mathbf{h}, t; z) = q(t; z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k(t)) = \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{z_k + th_k}{1 + t\overline{h_k} z_k} \right). \tag{7}$$

Съгласно свойствата на $\varphi(z)$, полиномът $q(\mathbf{h}, t) \in \mathcal{P}_n$. Ако означим с $\zeta_j(t),\ j = 1, 2, \dots, n-1$ нулите на производната на $q(t; z)$ от (7) по отношение на z, то с помощта на теоремата за неявните функции могат да се пресметнат производните $\zeta'(t)$ на критичните точки на p като функции на параметъра t. От друга страна, нулите на $q(t; z)$ са определени от (6) като функции на параметъра t. Нека p е екстремален полином и z_1 е една негова екстремална нула. Проф. Шмиедер изразява разстоянието между екстремалната нула z_1 на полинома и една коя да е нула ζ_j на производната на варирания полином с формулата

$$|z_1(t) - \zeta_j(t)| = |z_1 - \zeta_j| \left| 1 + t \frac{z_1'(0) - \zeta_j'(0)}{z_1 - \zeta_j} + O(t^2) \right|.$$

Ако

$$\Re \left(\frac{z_1'(0) - \zeta_j'(0)}{z_1 - \zeta_j} \right) > 0,$$

тогава $|z_1(t) - \zeta_j(t)| > |z_j - \zeta_j|$ за достатъчно малки t. Ако с подходящ избор на вектора $\mathbf{h}$ това може да стане за всички най-близки критични точки до z_1, то нулата z_1, противно на допущането, няма да е екстремална. Така получаваме условия от които могат да се определят характеристики на екстремалните полиноми. Крайната цел е да се докаже, че ако един полином е екстремален, то всички негови нули лежат върху единичната окръжност. С това, съгласно Следствие 2, Хипотеза 1 ще бъде доказана. Трудността идва от обстоятелството, че функционалът $\rho(p)$ изглежда има локални максимуми, които не са абсолютни максимуми. Това прави успеха на вариационните методи твърде проблематичен.

Интересно е да се наблюдава движението на критичните точки на даден полином при преместването на една негова нула. Това може да стане с програмата Maple 6. Ако производната на полинома p има многократна нула ζ_1 с кратност σ, то при най-малко преместване на една нула на p, критичната точка ζ_1 „експлодира“ и от нея се образуват σ на брой различни прости критични точки по посоки, които последователно сключват помежду си ъгъл $2\pi/\sigma$. Това означава, че с вариране само на една нула не можем да отдалечим дадена многократна критична точка от дадена нула на полинома. Важно е да се разбере, дали с едновременно вариране на повече нули, да речем σ на брой, можем да преместим една критична точка от кратност σ, без тя да „експлодира“, т. е., да си остане от същата кратност. Такава възможност за критични точки до кратност $n-2$ е необходима за да може с вариационен метод да се докаже Хипотеза 1. Аналогична е и ситуацията с Хипотеза 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. D. Bojanov, Q. I. Rahman and J. Szynal. On a conjecture of Sendov about the critical points of a polynomial. *Math. Z.*, **190** (1985), 281–285.

[2] J. E. Brown, and G. Xiang. Proof of the Sendov conjecture for polynomials of degree at most eight. *J. Math. Anal. Appl.*. **232**, No 2 (1999), 272–292.

[3] G. Gacs. On polynomials whose zeros are in the unit disk. *J. Math. Anal. Appl.*, **36** (1971), 627–637.

[4] A. G. Goodman, Q. I. Rahman and J. Ratti. On the zeros of a polynomial and its derivative. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 273–274.

[5] W. K. Hayman. Research Problems in Function Theory. Althlone Press, London, 1967.

[6] S. Kumar and B. G. Shenoy. On some counterexamples for a conjecture in geometry of polynomials. *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat. Fiz.*, No 12 (1991), 47–51.

[7] F. Lucas. Géomt́rie des polynômes, *J. École Polytech.*, **46** No 1 (1879), 1–31.

[8] A. Marden and P. Marden. Morris Marden (1905 – 1991). *J. Complex Variables*, **26**, (1994), 183–186.

[8] M. Marden. Geometry of Polynomials. 2nd edition, Math. Surveys Monographs, **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.

[9] M. Marden. Conjectures on the critical points of a polynomial, *Amer. Math. Monthly*, **90** (1983), 267–276.

[10] M. J. Miller. Maximal polynomials and the Ilieff–Sendov conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **321** (1990), 285–303.

[11] Н. Обрешков. Нули на полиномите. Изд. БАН, 1963.

[12] G. Schmeisser. Bemerkungen zu einer Vermutung von Ilieff. *Math. Z.*, **111** (1969), 121–125.

[13] G. Schmeisser. The Conjectures of Sendov and Smale. In: Approximation Theory: A Volume Dedicated to Blagovest Sendov, Edited by B. D. Bojanov, DABRA, Sofia, 353–369, 2002.

[14] Bl. Sendov. Hausdorff Geometry of Polynomials. *East Journal on Approximation*, **7** No 2 (2001), 1–56.

[15] S. Smale. The fundamental theorem of algebra and complexity theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **4** (1981), 1–36.

[16] D. Tischler Critical points and values of complex ploynomials. *J. of Complexity*, **5** (1989), 438–456.

Бл. Сендов
Централна Лаборатория за паралелни изчисления
Българска Академия на Науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, Блок 25А
1113 София, България
e-mail: `bsendov@argo.bas.bg`

GEOMETRY OF POLYNOMIALS – TWO HYPOTHESES

Bl. Sendov

Information is given about a classical topic of complex analysis geometry of polynomials and two relevant to this topic hypotheses are formulated. These are a known mean value Smale's hypothesis and an old author's hypothesis.

Key words: *Geometry of polynomials, Gauss-Lukas theorem, Mean value Smale's hypothesis, Ilieff-Sendov hypothesis*