МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2003
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2003
Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Sunny Beach, April 5–8, 2003

ОЛИМПИАДИ И СИНЕРГЕТИКА

Сава Гроздев

Въведението на настоящата статия съдържа кратка историческа справка за периодите в натрупването на български опит при провеждането на олимпиади по математика и подготовката на ученици за участие в тях. Посочено е минималното учебно съдържание, необходимо за успешно представяне в балкански и международни олимпиади, както и примерна литература за неговото усвояване. Разгледани са основните учебни дейности в подготовката, самоподготовката и специализираните подготовки. Направена е ретроспекция на разработките по проблеми на възприемането на знания, когнитивната психология и решаването на задачи, в които се прилага синергетичен подход.

1. Въведение и исторически бележки. През последните десетина години се налага терминът „олимпиадна математика“ като за специална математическа дисциплина. Един от първите литературни източници, в които става дума за олимпиадна математика, е [1]. Говори се дори за ново математическо образование, свързано с олимпиадите [2, 3]. Известно е, че олимпиадите (не само по математика) въздействат върху познавателната активност на учениците и учителите, стимулират развитието и задълбочават интереса, повишават знанията, уменията и способностите. Без да се абсолютизира тяхната роля, защото не са единствената форма за изява, те са средство за получаване на голяма част от онова (включително и съдържание по математика), което училището не дава и не е длъжно да дава. Олимпиадите осигуряват възможност за реализация на една от основните роли на образованието за постепенно и трайно превръщане на учениците от обучавани в самообучаващи се, защото чрез тях се овладяват високоефективни технологии за самостоятелно мислене, самоусъвършенстване и действие. Това отговаря на съвременните изисквания за активиране на дейности, които са различни от класическите класно-урочни, за формиране на можещи и търсещи личности в контекста на единството между образование и възпитание.

Набирането на български опит при организиране на математически олимпиади и подготовка за участие в тях започва формално през учебната 1949/50 г., когато по инициатива на акад. Любомир Чакалов се провежда първата олимпиада у нас. Тя е първа не само в областта на математиката, а изобщо. Примери за извънкласна дейност датират и от по-рано. Така, през 20-те години на XX в. се организират групи за допълнителна работа с добри ученици по математика. Те са свързани с името на младия тогава учител Петко Иванов, който по-късно основава катедрата по методика на математиката в Софийския университет, става ръководител на катедрата и доцент. През 30-те години учителят Божин Танчев от II мъжка гимназия в София провежда редовни извънкласни занимания с ученици, между които са бъдещите професионални математици – професорите Ярослав Тагамлицки, Алипи Матеев и Спас Манолов. Олимпиадата през 1949/50 г. се превръща в стимул за организиране на първите кръжоци по математика, включително в по-малките градчета и села. Ръководител на такъв кръжок в Полски Тръмбеш (по това време село) е например учителят Веселин Атанасов. Периодът до 1960 г. се характеризира с налучкване, стихийност и с решаването на проблеми предимно от организационен характер.

Извънкласните форми придобиват качествено ново съдържание през 60-те години, когато възникват първите школи по математика (първата школа е основана в Русе от учителя Дочо Дочев, който по-късно става професор), първият задочен конкурс (през 1961 г. се дава начало на математически радио-конкурс по инициатива на тогавашните асистенти Иван Ганчев – сега професор и Йордан Кучинов – по-късно станал доцент), първите математически паралелки, първото чисто математическо списание за ученици и учители (през учебната 1963/64 г. по инициатива на проф. Алипи Матеев – пръв главен редактор и Руси Русев – сега доцент, започва издаването на сп. Математика), първите математически гимназии. В организационно отношение е неоценима активността в този период на математика Ганчо Ганчев – тогава министър на просветата, а в научно отношение – (освен споменатите) на акад. Благовест Сендов, проф. Иван Проданов, доц. Кирил Дочев и др.

Най-новата история на опита у нас при организиране на математически олимпиади и подготовка за участие в тях започва през втората половина на 70-те години. Формалната дата е 01.04.1976 г., когато се сформира Екип за извънкласна работа към тогавашния Единен център по математика и механика при БАН. Създател на Екипа и негов пръв и дългогодишен ръководител (около 10 години) е Петър Кендеров (сега академик). Екипът включва учени, преподаватели във ВУЗ, учители и през него преминават най-известните български математици и педагози. Особена роля за натрупания опит имат учителите, сред които грее звездата на Атанас Радев – автор на редица учебници и сборници, завещал не голямото си състояние на математическата гимназия в Ямбол, която сега носи неговото име. (В тази връзка ще отбележим, че в момента в България има 20–30 учители, които изпълняват изискванията за доктори по математика по отношение на професионалната си квалификация и научна продукция.) Чрез активната дейност на Екипа се изгражда стройна система за направление и стимулиране на извънкласните форма на работа с изявени ученици. Тази дейност включва научното осигуряване на провежданите понастоящем математически олимпиади и състезания, както и подготовката за тях. Тя се реализира чрез установената схема от състезания, като същевременно помага за високите постижения на българските участници в балканските и международните олимпиади. През последните пет години България е неизменно в първата петица на най-добре представящите се държави и редовно изпреварва страни със значителен човешки и икономически ресурс. Между причините за успехите са натрупаният опит от членовете на Екипа за извънкласна работа и научният подход към подготовките и селекциите, на който е посветена настоящата статия.

2. Върху учебното съдържание на математическите олимпиади. Тематиката на задачите от международните олимпиади е от следните области на математиката: теория на числата, комбинаторика, алгебра и геометрия. През последните пет години това разделение се ползва от международното жури при обсъждане на състезателните теми, а така също и от проблемния комитет на всяка международна олимпиада, който проучва предложенията на страните-участнички и изготвя т. нар. „шорт-лист“ с избрани задачи (обикновено около 30). Разделението е условно и твърде общо. То не дава отговор на често срещания въпрос на ученици и учители: „Какво трябва да знаем, за да можем да решаваме олимпиадни задачи?“ Учебното съдържание по математика в училище също може да се раздели по посочения начин. Но въпреки разнообразието му в различните държави, то очевидно не е достатъчно за тези, които имат желание да бъде забелязано участието им в балканска или международна олимпиада.

Твърде парадоксално звучи следният факт. От една страна международното жури и проблемният комитет избягват задачи например от стереометрията и анализа, поради това, че в някои държави те не се изучават в училище. От друга страна обаче се приемат решения, които ползват например производни на функции. И ако последното все пак може да се обясни с това, че производните се изучават в повечето държави, то съвършено неясни са причините за приемане на решения с частни производни. Такива решения, включително и на български ученици, се появяват често във връзка със задачи за неравенства или екстремуми, където техниката с множители на Лагранж включва познаване на частни производни на функции на няколко променливи. Частни производни не се учат дори в държави като Франция и Румъния, където учебното съдържание на математиката в последните училищни класове включва въпроси от линейната и висшата алгебра, както и от анализа, което пък е част от изучавания материал в първите курсове на висшите училища в останалите държави, в т. ч. и в България. Известно е например, че в САЩ в сравнение с България се учи много повече комбинаторика за сметка на геометрия, а в Япония и Холандия – много повече алгебра пак за сметка на геометрията. Изискванията, които международното жури поставя при определяне на темите, е всяка задача да може да се решава и с „ученически“ знания (подчертаваме съюза „и“), но поради споменатото разнообразие, този критерий е неточен. Типичен пример може да се намери в шорт-листа от Международната олимпиада през 1997 г. в гр. Марделплата, Аржентина. В коментар след задача 26 на стр. 64 пише: „Числата на Фибоначи не фигурират в училищните програми на много държави. Вероятно е целесъобразно да се разгледа следният вариант на тази задача.“ След коментара е предложена формулировка на задачата без числа на Фибоначи. В шорт-листа има и втори коментар, който касае друго решение на същата задача. Коментарът е следният: „Разсъждението в това второ решение по същество се основава на факта, че минималната стойност фактически се достига. Това може да се обоснове, като се използват стандартни аргументи за непрекъснати функции в компактни множества или такива за линейни форми върху изпъкнали многостени. След като обаче тези факти не са в училищните програми, второто решение не е включено тук“ (има се предвид шорт-листът). Няма никакво съмнение, че ако един ученик познава числата на Фибоначи и посочените факти, той има много по-голям шанс да успее да реши въпросната задача.

Въз основа на горните разглеждания може да се направи изводът, че горна граница на допълнителните знания и умения, които един ученик трябва да притежава, за да участва успешно на балкански и международни олимпиади по математика, не съществува. Такава граница не е желателно и да се поставя, защото в противен случай съответният ученик би се лишил от възможността да повиши математическата си култура, което в крайна сметка е и една от целите на олимпиадите. Следователно, когато се дефинира учебно съдържание на олимпиади по математика, се има предвид неговият минимум. За България е установена следната практика. В първите класове на гимназията (в единични случаи и по-рано), учениците, които желаят да бъдат конкурентно способни по време на състезания в областта на теорията на числата, изучават самостоятелно или в извънучилищните форми (школи) учебно съдържание, което включва: Основна теорема на аритметиката, Бройни системи, Питагорови тройки, Теория на сравненията, Теорема на Безу, Малка теорема на Ферма, Теорема на Ойлер и свойства на Ойлеровата функция, Показател, Теорема на Уилсон, Сравнения и системи сравнения от първа степен, Примитивни корени, Китайска теорема за остатъците, Сравнения от втора степен по прост модул и символ на Льожандър, Представяне на цели числа като суми от квадрати и теорема на Лагранж, Лема на Туе, Диофантови уравнения с едно и повече неизвестни от първа и по-висока степен, Метод на безкрайното спускане, Уравнение на Пел. Следващ етап на учебното съдържание по теория на числата включва: Аритметични функции, Аритметични свойства на корените на единицата, Рационални точки в равнината и върху конични сечения, Квадратични полета. В примерната помощна литература могат да се посочат книгите: Гаврилов, М., Л. Давидов, Делимост на числата, ДИ „Народна просвета“, София, 1976 и Нагел, Т., Увод в теорията на числата, „Наука и изкуство“, София 1971, както и сборникът Додунеков, С., К. Чакърян, Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999. Учебното съдържание по комбинаторика включва: Съединения без и с повторения, Свойства на биномните и полиномните коефициенти, Комбинаторни тъждества, Теорема (принцип) за включването и изключването, Разбивания, Орбити, Група на пермутациите, Система от различни представители и теорема на Хол, Принцип на Дирихле, Оцветявания, Математически игри и стратегии, Теорема на Ойлер за изпъкналите многостени, Формула на Пик, Сведения от теорията на графите. Примерната помощна литература съдържа заглавията: Младенович, П., Комбинаторика, Белград, 2001; Чуканов, В., Математически игри, ДИ „Народна просвета“, София, 1975; Скордев, Г., Правилни многостени, ДИ „Народна просвета“, София, 1978; Хаджииванов, Н., Числа на Рамзи, ДИ „Народна просвета“, София, 1982. Във връзка с последните три заглавия ще спомενем, че всички издания на Издателство „Народна просвета“ от серията „Алеф“, които излизаха през 70-те и 80-те години на миналия век, са подходящи за изучаване от ученици и попълват учебното съдържание на олимпиадите по математика в различни направления.

Най-големи са затрудненията с алгебрата, защото всичко извън теорията на числата, комбинаториката и геометрията се причислява в тази област. Няма да се спираме на въпроса дали това е правилно или не, а ще се ограничим с минималното учебно съдържание, което на практика се изисква от българските участници в математически състезания. То включва: Линейна зависимост и базис, Редици и граници на редици, Линейни рекурентни редици, Хармоничен ред, Формули на Виет за полиноми от произволна степен, Класически неравенства, Теорема на Болцано, Теорема на Вайерщрас за непрекъснатите функции, Теорема на Рол, Теорема на Лагранж, Формула на Тейлор, Интерполационни формули на Лагранж и Нютон, Разлагане на елементарни дроби, Изпъкнали функции и неравенство на Йенсен, Множители на Лагранж, Основна теорема на алгебрата, Деление на полиноми и правило на Хорнер, Нули на полиноми, Неразложимост на полиноми и критерии за неразложимост, Симетрични функции и степенни сборове, Корени на единицата, Функционални уравнения и неравенства. В примерната помощна литература по алгебра влизат книгите: Гаврилов, М, И. Димовски, И. Чобанов, Въведение в елементарната алгебра, ДИ „Народна просвета“, София, 1973; Обрешков, Н., Висша алгебра, „Наука и изкуство“, София, 1966; Чуканов, В., Неразложимост, ДИ „Народна просвета“, София, 1982; Кючуков, А., П. Недевски, Функционални и диференциални уравнения, АИ „Проф. М. Дринов“, София, 1995. Учебното съдържание по геометрия включва: Ойлерова окръжност и права на Ойлер, Молвайдеви формули, Теорема на Стюарт, Формула на Лайбниц, Теорема на Фойербах, Теорема на Карно, Теореми на Чева и Менелай, Синусов вариант на теоремата на Чева, Забележителни точки в триъгълника (Жергон, Нагел, Лемоан), Теорема на Ван-Обел, Права на Симсън, Теорема на Микел, Полюс и поляра, Теорема на Пап, Теорема на Брианшон, Теорема на Дезарг, Скаларно произведение, Теорема на Птоломей, Триъгълници на Наполеон, Барицентрични координати, Комплексни числа в геометрията, Инверсия, Хиперболични функции, Разрязвания и покрития, Изпъкнали множества в равнината и изпъкнали обвивки, Опорна права и опорна равнина, Теорема на Хели, Теорема на Юнг, Изопериметрични задачи, Екстремални задачи в геометрията. В примерната помощна литература ще споменем книгите: Хитов, Х., Геометрия на триъгълника, ДИ „Народна просвета“, София 1990; Михайлов, Б., Задачи по „елементарна“ геометрия, „Веди“, София, 1995; Коксетер, Г., С. Грейтцер, Новые встречи с геометрией, „Наука“, Москва, 1978; Шарыгин, И., Задачи по геометрии, „Наука“, Москва, 1986; Шклярский, Д., Н. Ченцов, Н. Яглом, Избранные задачи и теоремы планиметрии, „Наука“, Москва, 1967; Прасолов, В., Задачи по планиметрии. Часть I и II, „Наука“, Москва, 1986; Тонов, И., Приложение на комплексните числа в геометрията, ДИ „Народна просвета“, София, 1988; Табов, Й., Хомотетията в задачи, ДИ „Народна просвета“, София, 1989; Мушкаров, О., Л. Стоянов, Екстремални задачи в геометрията, ДИ „Народна просвета“, София, 1989; Кендеров, П., Изпъкнали множества, ДИ „Народна просвета“, София, 1985; Яглом, И., В. Болтянский, Выпуклые фигуры, Москва, 1951.

3. Основни учебни дейности в подготовката и самоподготовката за олимпиади. Официално приетата система за обучение на масовия ученик е класно-урочната, която осигурява плавност и системност в преподаването и възприемането. Освен това тя държи сметка за възпитанието и най-важната роля в нея се пада на учителя. За разлика от организираното образование в училище подготовката и тренирането на изявени ученици за участие в математически олимпиади има специфичен характер. Той се определя преди всичко от необходимостта за създаване на творческа атмосфера по време на обучение, която постепенно да превръща учениците в изследователи и да ги насочва към самостоятелност не само по отношение на мисленето, но и към процеса на обучение, т.е. към самообучение. Основните действащи лица при подготовката за олимпиади са вече учениците, докато учителят, ако използваме терминологията от театъра, става режисьор, който от позицията на опита и високо професионалната си компетентност представя идеите и посочва възможните пътища за тяхната реализация. Съществуват редица примери на прекрасни учители, които могат да се похвалят с постижения в това направление. Такъв е Младен Ценков от Софийската математическа гимназия (вече пенсионер), който беше успял да превърне часовете си по математика в истински научни семинари и „актьорите“ в тях бяха самите ученици. Именно учениците провеждаха часовете. Те се готвеха предварително по теми, зададени от учителя, проучваха литература, решаваха задачи, поставяха проблеми, разказваха за наученото, споделяха го с останалите и всички заедно напредваха в овладяването на математиката.

Урочната система въпреки своите предимства, изразяващи се най-вече във възможността за стегнатост и колективност на работата, ограничава не само по причина на време. Основните недостатъци са именно по отношение на изявените – на тези, чиито интереси и възможности излизат извън рамките на класа. Семинарната форма на обучение е освободена от посочените недостатъци. При нея на преден план излиза самоподготовката, включваща следните по-важни дейности: следене на периодични издания в областта на училищната математика; систематизиране на задачите от конкретно периодично издание за даден период; участие в задочни конкурси; решаване на задачи от предишни олимпиади и групирането им по тематика и методи за решаване; проучване на литературни и ИНТЕРНЕТ източници; събиране на задачи по определена тема или във връзка с определен метод; издирване на различни решения за конкретна задача; изнасяне на доклади (например по време на заниманията в „Клуб „Издирване на таланти““); участие в дискусии; разработване на реферати; изготвяне на литературни справки по дадени въпроси; разработване на публикации, в т.ч. и научни; следене на математическия живот в страната и участие в него; следене на математическия живот в чужбина и др. Изброените дейности се съчетават със самостоятелна работа в библиотека, четене на математическа литература, консултации с учители, учени и преподаватели във ВУЗ, работа с компютър и т.н. Става дума именно за дейности, при които целта е и мотив, а не за действия, при които съгласно [4, с. 107] целта и мотивът се разминават. Чрез тези дейности се осигурява реализацията на посочените в [4, 5, 6] дидактически принципи, от които изрично подчертаваме съзнателността, активността и трайността на придобитите знания и умения.

Основните цели на дейностите в подготовката и самоподготовката за олимпиади са създаване на условия за математическо творчество, задълбочаване и разширяване на математическата култура, формиране на умения и навици за самостоятелно овладяване на нови знания, развиване на математическите способности и увеличаване на възможностите на учениците за участие в самите олимпиади. Следователно, и подчертаваме това изрично, участието в математическа олимпиада не е единствената цел. Чрез изброените дейности учениците постигат задълбочено разбиране на математически знания, проявявайки съзнателност по пътя на разбирането. Те развиват умения за решаване на трудни задачи, за оценяване на факти и взимане на решения. У тях се стимулира доразвиване на известни идеи и генериране на нови, повишава се способността за търсене и откриване, създават се навици за рутинна дейност в областта на науката, подобрява се стила на изразяване. Постепенно учениците се превръщат в изследователи и творци.

С много малки изключения участниците в балкански и международни олимпиади поддържат специални тетрадки, в които отбелязват математически факти и твърдения. Броят на тетрадките при някои от тях е двуцифрено число. Периодично и задължително преди международна олимпиада учениците прелистват своите тетрадки и си припомнят съдържанието им. Затруднения в случая липсват, защото в процеса на усвояване знанията са били разбрани и осъзнати. Тези знания са били цел на дейностите, които учениците са осъществявали. Те са били и продължават да бъдат инструменти в същите дейности. Необходимите условия за реализация на принципа за трайност са изпълнени [6, с. 74] и прелистването на тетрадките се превръща не в учене, а в едно приятно и разтоварващо занимание.

Отделеното специално внимание на дейността „преговаряне“ е във връзка с т. нар. айерархичен подход при изследване и систематизиране на познавателните дейности на учениците, готвещи се за олимпиади. Този подход е засегнат от Иван Ганчев в [7, с. 180] по повод на учебните дейности в урока по математика. В разглеждания от нас случай усвояването на дейността „преговаряне“, конкретизирана в самостоятелен преглед на личните тетрадки, е в пряка зависимост от дейността „водене на лична тетрадка“, която е резултат например от споменатите по-горе издирване, събиране, проучване и систематизиране на теми, методи и задачи. От своя страна преговарянето влияе както върху изброените дейности, така също нагоре по вертикала върху успешното решаване на задачи, върху творчеството и научно-изследователската дейност. Връзките между отделните дейности и същностното обвързване помежду им отчитат не само структурата и методите на математиката, но и възможностите на учениците. Стимулирането и активизирането на тези връзки, както и на самите дейности, се осъществяват индивидуално и колективно по време на дискусии ученик – ученик или ученик – преподавател, консултативните срещи между ученици и преподаватели, съвместните обсъждания и специализираните подготовки.

4. Основни учебни дейности в специализираните подготовки. Една от характеристиките на специализираните подготовки е тяхната цикличност. По формални съображения, индуцирани от организацията на учебния процес в масовото училище, циклите са едногодишни, т.е. в рамките на учебната година. Това е удобно заради текучеството на наблюдаваните и участващите в специализираните подготовки ученици – едни завършват средното си образование и напускат училище, други се включват и т.н. По същия начин се обяснява и цикличността на провежданите математически олимпиади и състезания. От друга страна всеки цикъл е съставен от етапи, които се определят в зависимост от календарния план на олимпиадите. Самите етапи са съобразени с концепцията за поетапно формиране на умствените действия. От множеството на организираните състезания, чието разнообразие е по отношение на тяхното количество и качество, най-важните са: Зимно математическо състезание, Пролетен математически конкурс, Областен и Национален кръг на Националната олимпиада по математика, както Балканската и Международната олимпиада. Критерий за важността е не непременно масовост, защото например Международното математическо състезание „Европейско Кенгуру“, което е най-многочисленото (с около 10 хил. български участници), не се включва като етап на подготовка поради специфичния му характер – задачите в него са с избираем отговор. Важността се определя от нивото на задачите и нивото на възможностите на участващите ученици. В същото време използването на първите четири от изброените състезания и като селекция за балканските и международните олимпиади влияе върху това ниво по принципа на обратната връзка. „Модата“ се определя от международната олимпиада, която е най-важното състезание през годината. Става дума за важност по отношение на учебно съдържание, трудност на задачите и цели, каквито са запазване на традициите и издигане авторитета на българската математическа школа.

По повод на балканските и международните олимпиади в едногодишните цикли се организират подготовки за тях. Налагат се разклонения по възрастови причини и те са специално за балканските олимпиади, които са две – едната за ученици до 20-годишна възраст (каквото е ограничението и за международните олимпиади) и другата за ученици до 15,5–годишна възраст. Селекцията за дадена балканска олимпиада включва резултатите от Зимното математическо състезание, Пролетния математически конкурс и едно контролно, което е различно за двете възрастови групи. От своя страна селекцията за международна олимпиада е въз основа на представянето по време на Областния и Националния кръг на Националната олимпиада, както и на контролни. Контролните тук обикновено са две. Те моделират самата международна олимпиада и всяко от тях се провежда в два последователни дни съгласно регламента ѝ. Двете контролни формират един от етапите на подготовка. Същото важи и за контролното във връзка с балканската олимпиада, което я моделира След всяко контролно, както и след Зимното математическо състезание, Пролетния турнир и двата кръга на Националната олимпиада се провеждат специални дискусии за обсъждане на решения, варианти, стратегии, връзки с други задачи, методи и т.н. В този смисъл всяко от изброените състезания и контролни представлява етап от специализираната подготовка на участващите в тях ученици – общо 8, защото двете контролни за международната олимпиада се включват в един етап. Като прибавим и споменатите две подготовки, съответно за балканската и международната олимпиада, времетраенето на които е от една до три седмици, броят на етапите става общо 10. Организацията на етапите и циклите включва голям обем от работа, в т.ч. следене на резултати, без които не е възможно да се осъществи обратната връзка в управлението. За тази цел е създаден специален модел на базата на понятия и технологии от изкуствения интелект, който е представен в [8].

В началото обърнахме внимание, че в обучението, което обсъждаме, основната форма е самообучението и самоподготовката, но оттук не следва, че подготовката е маловажна. Напротив, научният подход, с който тя се осъществява, ѝ позволява да управлява самообучението и да го направлява, но в същото време и да участва активно в увеличаването и повишаването на нивото на възможностите на учениците, което е и главната цел на това обучение. Оттук следва значението на дейностите, извършвани в подготовката. Те са свързани с процесите на оптимизиране на подбора и структурирането на учебното съдържание, както и с приложението на подходящите подходи, методи, похвати и средства. По отношение на подходите се използват теоретично възможните [6, с. 154–155]: обяснително-илюстративният, евристичният (търсещ) и изследователският. Поради естеството на обучението, в което учениците трябва да бъдат и са активните действащи лица, ролята на обяснително-илюстративния подход има второстепенна роля. Дейностите на преподавателя тук са свързани преди всичко с неговата подготовка и с умението да предава ясно и достъпно необходимата информация. От своя страна дейността на учениците се изразява в усвояване на информацията, което включва слушане, разбиране и запомняне. Именно във връзка с разбирането по-важната роля се пада на евристичния подход.

Често срещаното изказване „Нищо не разбирам от математика!“ не е случайно. Разбирането в математиката е един от основните проблеми и той идва от спецификата ѝ. Не е един и същи смисълът в твърденията „Разбрах, че връх Мусала е най-високият връх на Балканите.“ и „Разбрах, че числото $x^7 - x$ се дели на 7 за всяко x.“, защото разбирането не се отъждествява със запомнянето. Запомнянето не е достатъчно. Една от съществените разлики в двете твърдения е, че не съществува разумен път за самостоятелно достигане на знанието „Мусала е най-високият връх на Балканите.“ Едва ли е нормално например човек да тръгне да измерва всички върхове и след това да нареди данните по големина. Затова неговият шанс е само да запомни (наизусти) факта. Напротив, за математическото знание има такъв път и той е дедуктивното доказателство, с помощта на което се установява верността на Малката теорема на Ферма и като следствие от нея – фактът, че „числото $x^7 - x$ се дели на 7 за всяко x.“ Всеки е в състояние да стигне до това знание, стига разбира се да владее съответното умение и знанията, от които то следва. Въпросът е в намирането на доказателството и в досещането, че точно това е пътят. Отговорът се дава от евристиката. Сега дейностите и на учениците, и на преподавателя са анализиране, абстрахиране, формулиране на хипотези, експериментиране, наблюдение и всичко останало (обяснимо и необяснимо), което е характерно за процесите на търсене и откриване. В тази връзка е и изследователският подход. Разликата е, че докато при евристичния подход целта е решението и достигането му, то при изследователския се тръгва от решението и целта е откриване на евристичните похвати, които са довели до него.

Реализацията на разгледаните подходи се осъществява с помощта на подходящи методи, включващи съответни похвати и средства. Ако използваме класификацията на Колягин, Оганесян и Луканкин за учебните методи [9], става дума за методите на преподаване и методите на учене. Тук разнообразието е голямо и необозримо, защото касае личния вкус, предпочитанията и възможностите. От преподавателя зависи дали ще избере лекция или обяснение, работа с конкретен учебник, книга или статия, демонстрация с компютър или ползване на ИНТЕРНЕТ. За учениците изборът е улеснен от обстоятелството, че обикновено методите на учене съответстват на методите на преподаване. Най-важното в подготовката обаче е осъществяването на диалог между ученици и преподавател. В този диалог централна роля се пада на проблемната ситуация, на съответната олимпийска задача, която мотивира, активизира и създава условия за изследователска настройка и творчество. Познавателната активност на учениците се повишава и те стават равноправни участници в решаването на проблема. Дейностите на преподавателя и неговата роля е да формулира задачата, да подскаже връзката ѝ с други задачи, да подтикне към обобщения и в крайна сметка да изясни общоматематическия ѝ смисъл. Като пример може да се посочи китайската задача от [10] и свързаната с нея дидактическа система.

Американският психолог Джером Брунер в книгата си [11] излага становище, че програмите по математика трябва да се строят спираловидно. Математическите идеи, понятията и структурите трябва първоначално да се преподават конкретно, но не задължително строго, като при задължителните следващи техни разглеждания трябва постепенно да се увеличава строгостта. Итерациите продължават до пълно усвояване. Точно такъв подход се следва в специализираните подготовки, които разглеждаме. Във връзка с решаването на задачи ще отбележим, че процесът на решаване не завършва с намиране на първото вярно решение, макар че по време на олимпиада в повечето случаи е точно така. Анализът на темите в етапите на подготовка, които непосредствено следват съответното състезание, има за цел и следните две дейности: оптимизиране на решенията и решаване на възможно най-широк кръг от нови задачи, произлизащи от решенията. Изследването на различни варианти е полезно не само по отношение на конкретната задача. То се докосва до неочаквани връзки с други задачи, до други подходи и дори до други области в математиката. Тук е съществен опитът на преподавателя, неговата осведоменост и ерудиция. Колкото до опита на самите ученици, сериозната роля се пада на олимпиадите и състезанията. Макар че подготовките и най-вече контролните моделират среда, близка до средата на олимпиадите, те не могат да създадат реалната обстановка и истинската състезателна атмосфера. Липсата на напрежение, породено от чувството на отговорност за успешно представяне, освобождават подготовките от психическото натоварване по време на състезанията. Затова истинският опит се придобива в благородната борба, каквато е олимпиадата. Това е борба, в която под формата на решаване на задачи, учениците демонстрират възможностите си, реализират усилията си, включително и тези по време на подготовка, доказват себе си и се изявяват. Но като при всяка борба и тук има победители и победени. Едва ли съществува ученик, който винаги решава всичко. Затова проучването на причините за неуспеха и отговорите на въпроси от рода на „Какво не успях да забележа?“, „В какво се заблудих в моето решение?“ и др. са едни от отправните точки при усъвършенстването. Извличането на поука е част от тренирането, а за неговото осъществяване е нужно съответно умение. Създаването на такова умение е цел на подготовките, като подходът е както индивидуален, така и колективен, защото човек се учи не само от своите грешки, а и от грешките на другите.

По-специална форма на подготовка е утвърдилата се практика през последните години да се изнасят лекции в определена област на математиката. Тези лекции наподобяват спец-курсовете във ВУЗ и се изнасят от съответни специалисти. Същественото е, че повечето от лекторите са бивши олимпийци и именно този факт им дава възможност да изнасят лекциите си с привеждане на съдържателни примери и проблемни ситуации. Споменатата особеност обаче не лишава лекциите от възможността да се реализират дейностите, които са типични за този вид обучение. Има се предвид актуализацията на старите знания и умения, които се използват при изложението, включително и систематизиране на изученото. Разбира се, това се прави за съответната област, третирана в курса. Основното в лекциите все пак остава въвеждането на нови понятия, доказването на нови теореми и представянето на нови методи и теории. Обикновено затвърдяването на новите понятия се осъществява чрез дейността „решаване на задачи“, като за целта се правят непосредствени приложения. Същата дейност се прилага и за усвояване на новите теореми и методи, като при възможност се използват дидактически системи от признаци в смисъла на [7, с. 109]. За упражняване на новото се разчита и на домашни упражнения (т. нар. задачки на листче), решенията на задачите от които се обсъждат колективно по време на следващата лекция. Повторението, което е основно правило на подготовките, се реализира най-пълноценно при следващ цикъл, когато се изнася същия курс, но вече с други задачи и приложения. Системата дава възможност за теоретична подготовка на нововключили се ученици, а вече слушалите курса затвърдяват и задълбочават своите знание и се усъвършенстват практически. По такъв начин цикличността в процеса на обучение се осъществява и по същество.

В своето произведение [12, с. 35] френският математик Жак Адамар (1865–1963) съобщава, че според Анри Поанкаре (1854–1912) и Херман Хелмхолц (1821–1894) в научното изследване се наблюдават три етапа – период на работа, почивка и отново работа. Отчитайки, че решаването на задачи и дейностите по време на проблемни ситуации и подготовки се доближават до научно-изследователската дейност и творчеството, в обучението на учениците се предвиждат почивки. Не става дума само за периодите между отделните етапи в дадения цикъл, а за разтоварващи дейности по време на самите подготовки. Най-често тези дейност са свързани с разказването на исторически факти от областта на математиката и запознаване с биографиите на известни математици. Позоваването на историята е особено подходящо, когато решаването на задача или използването на конкретна теорема са отнесени към поучителни епизоди. Известният специалист по методика на математиката акад. Борис Гнеденко [13, с. 28–41] отбелязва значението на историята за възбуждане на интерес към познанието. Примерът на великите представители на математиката като наука, способността им да съсредоточават вниманието си върху основните трудности и да ги преодоляват чрез продължителна работа поражда у учениците стремеж към подражание. Това ги активизира и мотивира както в подготовката, така и по време на олимпиади. Немският математик Готфрид Лайбниц (1646–1716) също сочи важността на историята с цел изтъкване характерните белези на откривателството. Гнеденко го цитира в [13, с. 30]: „Ползата е не толкова, че историята ще отдаде всекиму заслуженото и ще подбуди другите да се стремят към същите похвали, колкото с това, че опознаването на методите чрез подходящи примери води до развитие на изкуството да се открива.“

Тази полза е особено впечатляваща при преодоляване на теоретични затруднения с принципно значение, т.е. при решаването на теоретични задачи. Примерите на Николай Лобачевски (1792–1856), Карл Фридрих Гаус (1777–1855), Янош Бояй (1802–1860) и Бернхард Риман (1826–1866) пораждат стремеж към чистото познание и към изясняване на истината. Разбира се, това не означава, че се пренебрегва ролята на практиката. Самият Лобачевски е правил множество астрономически наблюдения, за да разбере същността на заобикалящото ни пространство. В случая пред него е стояла и друга задача – да намери аргументи срещу идеите на Кант за априорното знание. Не може да не се държи сметка за ролята на вътрешните потребности на самата наука, както и на естествения стремеж на човек към познанието заради самото познание. Но определяща е все пак практиката. Много показателни в това отношение са записките на Леонард Ойлер (1707–1783), за които се споменава в [13, с. 33]. Те показват, че твърде често великият математик е стигал до резултатите си по чисто експериментален път. Той правел пресмятания, които поразяват със сложността си. В първия етап от работата над някакъв математически факт Ойлер залагал на числовите примери, които потвърждавали факта. По-нататък той отбелязвал пътища за доказателство и на по-късен етап изпробвал тези пътища.

Въпросът за строгостта бил оставян за края на изследванията и чак неговото решаване давало основание за приключване на работата над съответния проблем.

Приведохме тези примери, за да обърнем внимание и на възпитателната роля на подготовките, да представим по-точно царящата в тях атмосфера, която е изпълнена с творчески дух и интелектуален заряд. Накрая ще отбележим още една дейност, която е съществена за управлението на подготовките и изобщо на процеса на обучение. Става дума за контрол на възприемането и усвояването, което включва установяване на началните стойности, следене на промеждутъчните състояния, осигуряване на обратна връзка, нейната преработка и взимането на решения.

5. Връзката между олимпиади и синергетика. Чрез олимпийските задачи учениците разкриват свойствата на понятията и действията. Конкретните проблемни ситуации, с които те се сблъскват по време на олимпиади, им дават възможност да развият способност за ориентиране. Освен това олимпиадите осигуряват подходяща среда за осъществяване на практически действия и именно операциите за обработване на тези действия са предпоставка за осъществяване на самообучението. Необходим момент в него е самоконтролът. Усвояването на знания и умения е продължителен процес. От една страна участието в олимпиада е етап в този процес, а от друга – чрез олимпиадата учениците имат възможност да получат обратна информация и да сравнят напредъка си. В резултат на пълната интериоризация на дейността „решаване на задачи“ самоконтролът се превръща в част от тяхното мислене.

Разглежданите въпроси са пряко свързани с понятието „самоорганизация“, което от своя страна е предмет на науката „синергетика“. През 70-те години на XX в. в науката беше осъзнато, че освен детерминираните и стохастичните процеси, съществува и трети клас, които са изключително важни. Тези процеси се описват формално с помощта на динамични системи, но поведението им може да се предскаже само за малък временен интервал, след който изследователите са принудени да използват статистика. Процесът на подготовка на изявени ученици спада точно към този клас процеси. Такива процеси се изучават от сравнително младата наука „синергетика“, която е известна още като „теория на самоорганизацията“. Под самоорганизация се разбира организация и управление като осъзнати дейности, както самоорганизация и самоуправление в смисъл на неосъзнати дейности. Самоорганизацията е процесът на преминаване от хаос към ред, който според „бащата“ на синергетиката Хакен [14] е резултат на кохерентно поведение на големия брой елементи на една сложна система и осъзнатото или неосъзнато йерархично подреждане на управляващите я параметри. Най-общо казано, синергетичният подход означава отчитане на нелинейност в разглежданите процеси, стъпаловидност и управление с помощта на водещи параметри. Няма да се спираме на подробностите по изясняване на този подход, а ще се ограничим с кратка ретроспекция на неговото прилагане към проблеми на олимпиадите.

Преди повече от 100 г., в края на XIX в., немският психолог Херман Ебингхаус (1850 – 1909) извежда експериментално закон за забравяне при учене, който има експоненциален вид. По-точно, ако $x(t)$ е обемът на запомнения материал, то $x(t) \approx C_1 - C_2 e^{\alpha t}$, където C_1 и C_2 са константи, а $\alpha < 0$ е показател за скорост на възприемане (забравяне). Както се вижда, според Ебингхаус процесът на възприемане е нелинеен. Водещият управляващ параметър в случая е числото α. По времето на Ебингхаус обаче синергетиката като наука не е била известна и използването на синергетични подходи е било невъзможно. До този момент е известен само един синергетичен модел в образованието и той принадлежи на руските учени Сергей Петрович Капица, Сергей Павлович Курдюмов и Георгий Генадиевич Малинецкий [15]. За да прилагаме синергетичен подход, беше необходимо да бъде разработена методика за определяне на личностните характеристики на учениците като управляващи параметри. Подробностите са описани в [16]. Ръководили сме се от петте йерархични и дискретни нива на Ван Хийле [17] и на тази база през учебната 2001/2002 г. 130 изявени ученици бяха разделени на 5 групи. Всяка група има определен индекс, който дефинира личностната характеристика на участващия в нея ученик. Скоковете от група в група се дължат на флуктуационни причини в нивата на възможностите. Определянето на групите е осъществено на базата на описателна статистика.

Един от начините за влияние върху способностите е чрез формиране на знания като продукти, изработени от обучавания. Става дума именно за формиране, а не само за възприемане на информация, което е необходимо условие, но далеч не е достатъчно. За да може да бъде използвана, включително до степен на произволност, информацията трябва да бъде така отработена от учениците, че да се превърне в тяхна лична собственост. Едва тогава може да се говори за знание. Това се постига в частност и чрез споменатите по-горе дейности. В [18] е изградена теория на известните от кибернетиката декларативни и алгоритмични знания във връзка с възможностите на изявени ученици. Изследването на динамиката на знанията, уменията и навиците осигурява възможност за моделиране бързината при решаване на задачи. В цитираната публикация е доказано е, че това е строго индивидуално.

Процесът на подготовка за участие в олимпиади е дълъг и сложен. Той продължава години наред с участието на голям брой ученици, учители и преподаватели. Всичко това изисква организация и следене на огромен брой ядра (личностни характеристики, резултати и др.), отчитане на различни параметри и съгласуване на най-разнообразни критерии. Както вече отбелязахме, в [8] е представен модел на организацията на подготовката и селекцията за олимпиади, който се основава на общи идеи от [19] за интерпретиране на различни области от изкуствения интелект с помощта на понятието „обобщена мрежа“.

Всяка олимпиада се състои в решаването на задачи, а критерият за успешно представяне е дали ученикът е решил задачите или доколко е напреднал в решенията им. Но може да се случи така, че ученикът успява да се справи с някои от задачите, а с други – не. Оттук следва, че резултатите от едно представяне не бива да се абсолютизират. В крайна сметка обаче нещата опират до умението да се решават задачи. Това поставя сериозни изисквания към самите задачи. Те не могат да бъдат каквито и да е, а само такива, че да оценяват адекватно възможностите на учениците. В тази връзка ще отбележим направения в [20] анализ на една дидактическа система от задачи. Осъществен е т. нар. ITEM Analysis, който включва две основни характеристики – трудност и дискриминация, както и не толкова често срещащите се сравнения с предварителна експертна оценка. Освен чрез коефициента α на Кронбах оценката на надеждността е пресметната и с формулата за „композиционна надеждност“ от [21], която отчита групирането на задачите на нива. Осъществено е също така сравняване на постиженията на експерименталната и контролната група чрез т. нар. t-критерий при предположение, че разпределението на баловете е нормално, а също така и с помощта на непараметричния критерий на Колмогоров-Смирнов в случай, че предположението за нормалност е под съмнение. Статистическият анализ доказва правилния избор на задачите от разглежданата дидактическа система.

В педагогически план и във връзка с подготовката за олимпиади ще отбележим трите основни измерения на задачите в широк смисъл съгласно Ралчо Трашлиев [22]: изпълнителското, конструктивното и аналитичното. Съществува третиране и в тесен смисъл, представители на което са Ян Вишин и Иван Ганчев. Независимо от различните тълкувания основен при всяка задача е подходът към нейното решаване. В [23] са разгледани връзките в системата „задача-решение-ученик“, които са интерпретирани чрез взаимодействия и сили със съображения от механиката и поточно от статиката. Моделът се базира на резултати от [24] във връзка с понятието „рефлексия“. В [23] е доказано, че процесът на решаване на една задача е успешен, когато силите в системата са в равновесие.

В [25] е разработен математически модел за краткосрочно прогнозиране в лабораторни условия и целенасочено управление на подготовката и самоподготовката на ученици Изводите чрез него са достоверни и приемливи за практиката. Теоретично полученото решение съвпада с характера на експериментално изведената от Ебингхаус функция, за която вече стана дума. Значението на предложения в [25] модел се определя от факта, че без извършване на измервания по време на учене може да се установят точките на максимум, след което са нужни почивки. Доказано е теоретично, че настъпването на критичен момент за кривите на учене не зависи от началните данни. То зависи само от индивидуалните характеристики на учениците. В [26] са разгледани криви, ветрила и повърхнини на учене. Докато кривите представляват добре известен инструмент, например у видния български психолог и педагог Генчо Пирьов [27], за следене и сравняване на процесите на усъвършенстване при учене, не са ни известни разглеждания досега на ветрила и повърхнини. В този смисъл получените в [26] графики с помощта на системата MATHEMATICA са първи по рода си.

Изборът на подход към трудните задачи и към техните решения има творчески характер и е строго индивидуален. Става въпрос за елемента „досещане“. Причината според нас за тайнствеността на досещането е в това, че то е резултат на неосъзната дейност на мозъка. В тази връзка не сме в състояние да кажем нищо ново. Единственото, което ни остава, е да застанем на позициите на изследователите на този въпрос от миналото: Адамар [12], Пойа [28], Пушкин [29] и др., а именно че досещането може да се подготвя. За това служат дейностите, които бяха разгледани по-горе. Самият Дьорд Пойа [28] не отрича възможността досещането да има случаен характер. Но като педагог с изключителен опит, чийто стремеж е да бъде в полза на своите ученици и студенти, той не отхвърля и другото схващане за досещането, а именно, че досещането може да дойде като резултат на логически и систематични разсъждения. Основната теза в настоящата публикация е, че горещо подкрепяме и тази възможност. Наличието на целенасочена подготовка и разумно управление увеличават значително шансовете ни за успех.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Wang Yan. My personal view on the mathematical contest. *Natural Magazine*, **12** (1990).

[2] R. Laumen. Mathematics competitions and mathematics education. *Journal of the WFNMC*, **5**, No 1 (1992).

[3] Zhang Junda, Wu Jianping. Principles and methods of proposing mathematical Olympiad questions. *Journal of the WFNMC*, **6**, No 2 (1993).

[4] М. Андреев. Дидактика, София, 1981.

[5] П. Петров. Дидактика, София, 1995.

[6] И. Ганчев, Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров. Методика на обучението по математика от VIII до XI клас. Модул, София, 1996.

[7] И. Ганчев. Основни учебни дейности в урока по математика. Модул, София, 1999.

[8] K. Atanassov, S. Grozdev. A generalized net model to organize the preparation of talented students in mathematics. Proc. Int. Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets, Warsaw, Nov. 6–7, 2001, 33–37.

[9] Ю. Колягин, В. Оганесян, Г. Луканкин. Методика преподавания математики в средней школе, 1975.

[10] С. Гроздев. Върху една китайска задача. *Математика и математическо образование*, **31** (2002), 239–244.

[11] J. Bruner. On Learning Mathematics. New York, 1966.

[12] Ж. Адамар. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. Советское радио, Москва, 1970.

[13] Б. Гнеденко. Елементи от историята на науката в уроците по математика. Някои въпроси на обучението по математика. Народна просвета, София, 1980.

[14] Г. Хакен. Синергетика. Мир, Москва, 1980.

[15] С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. Синергетика и прогнозы будущего. УРСС, Москва, 2001.

[16] С. Гроздев. Синергетика на ученето. *Педагогика*, **7** (2002), 3–23.

[17] P. M. Van Heile. Structure and Insight. Academic Press, New York, 1986.

[18] С. Гроздев. Моделиране и управление на възможностите на ученици за решаване на задачи. *Педагогика*, 2003 (под печат).

[19] K. Atanassov. Generalized Nets. World Scientific,Singapore, New Jersey, London, 1991.

[20] S. Grozdev, E. Stoimenova. Psychometric properties of Olympiad test problems. Proc. 3rd MCME, January 3–5, 2003, 257–264.

[21] П. Матеев, Е. Стоименова. Надеждност и точност на оценките от изпити и тестове. *Математика и математическо образование*, **30** (2001), 95–102.

[22] Р. Трашлиев. Задачата (Психолого-педагогически проблем). София, 1989.

[23] С. Гроздев. Организация и самоорганизация при решаване на задачи. *Математика и информатика*, **6** (2002), 51–58.

[24] М. Георгиева. Рефлексията в обучението по математика V–VI клас. Фабер, В. Търново, 2001.

[25] S. Grozdev. Mathematical modeling of educational process. *JTAM*, **32**, No 1 (2002), 85–90.

[26] S. Grozdev, J. Tsankov. Curves and surfaces of learning. *Mathematics and Education in Mathematics*, **32** (2003).

[27] Г. Пирьов. Проблеми на когнитивната психология. АИ „Проф. М. Дринов“, София, 2000.

[28] Д. Пойа. Математическое открытие. Наука, Москва, 1976.

[29] В. Н. Пушкин. Эвристика – наука о творческом мышлении. Москва, 1967.

Сава Гроздев
Институт по механика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 4
1113 София
e-mail: savagroz@math.bas.bg

OLYMPIADS AND SYNERGETICS

Sava Grozdev

The introduction of the present paper contains a short historical reference concerning the periods of accumulating Bulgarian experience in the holding of Mathematical Olympiads and the preparation of students for participation in them. A minimal Olympiad curriculum is specified which is necessary for a successful presentation in Balkan and International Olympiads and an exemplary literature is pointed out for mastering. Basic learning activities in preparation, self-preparation and specialized preparations are examined. Retrospection is proposed for investigations in the field of knowledge perception, cognitive psychology and problem solving when synergetical approach is applied.