МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2003
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2003
Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Sunny Beach, April 5–8, 2003

ГАУС-ПИТАГОРОВИ ТОЧКИ ВЪРХУ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

Пенка П. Гунчева

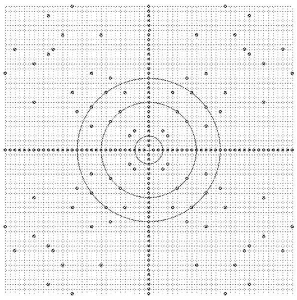
В тази статия изучаваме разпределението на неизродени Гаус-Питагорови точки върху някои криви от втора степен.

Един класически въпрос, свързан с елементарната теория на числата, е този за разпределението на точки с целочислени координати върху специални конични сечения. Ако уравнението $P(x, y) = 0$ представя някакво конично сечение K – крива от втора степен с целочислени коефициенти, точката (n, m), където n и m са цели числа, лежи върху K щом координатите ѝ удовлетворяват посоченото уравнение: $P(n, m) = 0$. Нататък, вместо точка с целочислени координати ще казваме целочислена точка (вж. [1]).

Терминът Гаус-Питагорова точка е въведен от Станчо Димиев [2]. Основната му мотивировка е в това, че върховете на така наречените диофантови фигури в равнината, съдържащи началото (вж. [3]), са Гаус-Питагорови точки. Аналогично на класическия въпрос, който припомнихме по-горе, възниква и въпросът за разпределението на Гаус-Питагорови точки върху конични сечения. Мотивацията на този въпрос е свързана с въпроса за пресичането на крива от втора степен с диофантова фигура. Оказва се, че има конични сечения, които не пресичат никоя диофантова фигура, освен в изродена Гаус-Питагорова точка. Нашата цел тук е да установим, че диофантова фигура с неизродени Гаус-Питагорови върхове не може да бъде вписана например във вътрешността на параболата $y = x^2$. Бегло засягаме и разпределението на Гаус-Питагоровите точки върху други криви от втора степен.

Темата ми е предложена от проф.Станчо Димиев и доц. Иван Тонов, на които изказвам тук своята благодарност. Дължа благодарност и на гл.ас. Александър Пенев, с помощта на който успях да реализирам един компютърен алгоритъм за получаване на Гаус-Питагорови точки. Този алгоритъм е използван за получаването на компютърните скици посочени в текста.

Някои дефиниции. Предварително ще напомним няколко дефиниции от [1–3]. Казваме, че целочислената точка (n, m) е Гаус-Питагорова точка, ако съществува такова цяло число l, че тройката (n, m, l) да бъде Питагорова тройка, т.е. $n^2 + m^2 = l^2$. Когато поне едно от целите числа n, m, l е равно на нула, считаме, че точката (n, m) е изродена Гаус-Питагорова точка. Ясно е, че началото $(0, 0)$ и целочислените точки лежащи върху осите, т.е. $(n, 0)$ и $(0, m)$, са изродени Гаус-Питагорови точки.



Фиг. 1

Ясно е също, че неизродените Гаус-Питагорови точки лежат върху концентричните окръжности с център началото и с целочислен положителен радиус. (фиг. 1)

Параболата. Разпределението на целочислените точки върху параболи от общ вид удовлетворява следната алтернатива: **или няма целочислени точки върху параболата, или има безбройно много.** Доказателство на това твърдение е изложено например в книгата на Т. Нагел [1].

С оглед на нашата цел, тук ще разгледаме само някои специални параболи, а именно тази с уравнение $y = x^2$ и някои други за които цитираната алтернатива се решава относно Гаус-Питагоровите точки.

Твърдение 1. *Върху параболата $y = x^2$ няма неизродени Гаус-Питагорови точки.*

Началото $(0, 0)$ лежи върху тази парабола, но е изродена Гаус-Питагорова точка.

Доказателство. Понеже всяка Гаус-Питагорова точка е целочислена точка, да вземем една такава точка (n, m). Приемаме, че $m = n^2$. Ако (n, m) е Гаус-Питагорова точка, ще има цяло число l, чиито квадрат да съвпада със сбора $n^2 + m^2$. Но тогава ще имаме, че $m + m^2 = l^2$, което е възможно само в случая $m = l = 0$. Наистина, невъзможно е да имаме $0 \leq m < l$, и $m = l^2 - m^2 = (l - m)(l + m)$, защото е очевидно, че

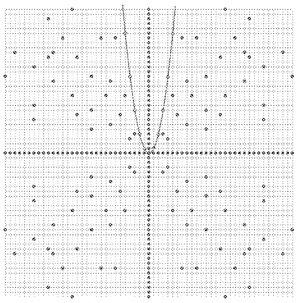
$$m < m + l < (l + m)(l - m) \qquad \square$$

Забележка. Компютърната скица изложена по-долу (фиг. 2) подсказва, че разглежданата парабола не загражда никакви Гаус-Питагорови точки.

Това наблюдение се обосновава математически. За тази цел най-напред ще определим това, което ще наричаме вътрешност на параболата $y = x^2$. Множеството от точки (u, v), за които $u = x, v > x^2$, ще наричаме вътрешност на разглежданата парабола.

Твърдение 2. *Във вътрешността на параболата $y = x^2$ няма Гаус-Питагорови точки освен изродените такива от вида $(0, m)$, където m е неотрицателно цяло число.*

Доказателство. Да допустнем, че (n, m) е Гаус-Питагорова точка лежаща във вътрешността на разглежданата парабола. Можем да считаме, че $n > 0$. Тогава имаме $m = n^2 + q$, където q е цяло положително число. Като изразим, че (n, m) е



Фиг. 2

Гаус-Питагорова точка, т.е. има цяло положително число p, $p > n$, $p > m$, такова, че $n^2 + m^2 = p^2$, и използваме, че $n^2 = m - q$, получаваме.

$$m - q = p^2 - m^2 = (p + m)(p - m).$$

От очевидното неравенство $m > m - q > 0$ следва, че $m > (p + m)(p - m) > m + 1$, което е невярно. Значи (n, m) не може да бъде Гаус-Питагорова точка.

Забележка. Доказаните по-горе твърдения са в сила и за параболите с уравнения

$$y = -x^2, \ x = y^2 \text{ и } x = -y^2.$$

Доказателствата са аналогични. От това следва, че Диофантовите фигури с неизродени Гаус-Питагорови върхове пресичат сечението на теоретико-множествените допълнения на вътрешностите на посочените четири параболи. □

Окръжността . Всяка окръжност е ограничено подмножество от точки в равнината, от което следва, че тя се вписва в квадрат с целочислена страна и не може да съдържа повече точки от броя на целочислените точки в квадрата.

Върху окръжността с център началото и целочислен положителен радиус или няма, освен четири изродени, или има краен брой Гаус-Питагорови точки. Наистина, да разгледаме окръжност с център началото и радиус цяло положително число n. Ясно е, че точките $(n, 0)$ и $(0, m)$ определят изродени Гаус-Питагорови точки върху разглежданата окръжност. Диофантовото уравнение от втора степен относно x и y

$$n^2 = x^2 + y^2$$

може да има най-много краен брой целочислени решения (x, y), всяко от които определя неизродена Гаус-Питагорова точка (x, y, n) върху окръжността.

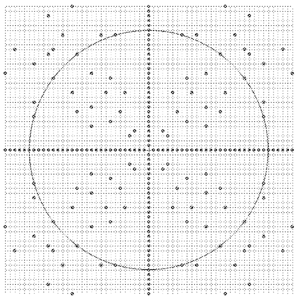
Фигура 3 илюстрира последното твърдение. Посочените Гаус-Питагорови точки върху взетата окръжност са получени експериментално с помощта на компютърни програми.

Елипсата. Същите съображения както при окръжността показват, че за елипсата можем да твърдим същото: имаме най-много краен брой Гаус-Питагорови точки, които можем да търсим експериментално с помощта на компютър.

Хиперболата. Да разгледаме например хиперболата

$$x^2 - y^2 = c^2, \ \text{където } c \text{ е цяло число.}$$

Тук ще се ограничим да посочим само следното необходимо условие за да имаме Гаус-Питагорови точки върху нея.



Фиг. 3

Ако (n, m) е точка върху посочената хипербола, то за да бъде тя Гаус-Питагорова е необходимо да имаме цяло число l такова, че $n^2 + m^2 = l^2$. От друга страна имаме $n^2 - m^2 = c^2$. От последните две равенства извличаме $2n^2 = l^2 + c^2$ и съответно $2m^2 = l^2 - c^2$.

Получихме следния критерий: за да бъде (n, m) Гаус-Питагорова точка върху разглежданата хипербола е необходимо числата $n^2 + m^2 + c^2$ и $n^2 + m^2 - c^2$ да са едновременно четни.

Следствие. *За да лежи една Гаус-Питагорова точка* (n, m) *върху разглежданата равнораменна хипербола е необходимо нормата ѝ* $n^2 + m^2$ *да има еднаква четност с числото* c (*общата полуос*).

Напомняме, че ако представим (n, m) като комплексно число $n + im$, то модулът му на квадрат е мултипликативна норма съвпадаща с $n^2 + m^2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. Нагел. Увод в теорията на числата. Наука и Изкуство, София, 1971.

[2] S. Dimiev, K. Markov. Gaus Integers and Diophantine Figure, *Mathematics and Education in Mathematics*, **31** (2002), 88–95.

[3] С. Димиев, Ив. Тонов. Диофантови фигури, *Математика и математическо образование*, **15** (1986), MR 1988d:51015.

Пенка Петрова Гунчева
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Филиал – Смолян
Ул. Дичо Петров 32
Смолян, България

GAUSS-PYTHAGOREAN POINTS ON CONIC SECTIONS

Penka P. Guncheva

In this paper we study the distribution of non-degenerated Gauss-Pythagorean points on some curves of second degree.